

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων

Παραδώστε τις λύσεις σας μέχρι την Πέμπτη 13 Νοεμβρίου.

1. (α) Έστω $f : M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ συνεχής στο M . Λέμε ότι η $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής κλάδος της $f^{\frac{1}{2}}$ αν είναι συνεχής στο M και ισχύει $h^2 = f$ στο M .

Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει συνεχής κλάδος της $w^{\frac{1}{2}}$ στο $f(M) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε υπάρχει συνεχής κλάδος της $f^{\frac{1}{2}}$ στο M .

Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει συνεχής κλάδος της $\log w$ στο $f(M) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε υπάρχει συνεχής κλάδος της $f^{\frac{1}{2}}$ στο M .

(β) Αποδείξτε ότι ορίζεται συνεχής κλάδος της $(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = ((z - 1)(z + 1))^{\frac{1}{2}}$ σε καθένα από τα σύνολα $\Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ και $\Omega' = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Τί σχέση υπάρχει ανάμεσα σε δυο συνεχείς κλάδους της $(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ στο ίδιο σύνολο, είτε το Ω είτε το Ω' ;

Αποδείξτε ότι οι συνεχείς κλάδοι της $(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ στο Ω και στο Ω' είναι αναλυτικοί.

(γ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής κλάδος της $(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ σε οποιοδήποτε σύνολο περιέχει κύκλο με το -1 στο εσωτερικό του και το 1 στο εξωτερικό του ή αντιστρόφως.

2. Υπολογίστε το $\int_{\gamma} \frac{1}{z^{1/2}} dz$, όπου γ είναι οποιαδήποτε από τις δυο καμπύλες με αρχικό άκρο το 1 και τελικό άκρο το -1 : $\gamma_1(t) = e^{it}$ για $t \in [0, \pi]$ και $\gamma_2(t) = e^{-it}$ για $t \in [0, \pi]$. Προσέξτε να ορίσετε όπως πρέπει το $z^{1/2}$ για κάθε μια από τις καμπύλες αυτές.

3. Υπολογίστε το $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^n} dz$ αν $n \in \mathbb{N}$ και $\gamma(t) = e^{it}$ για $t \in [0, 2\pi]$ και, κατόπιν, υπολογίστε τα

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(n\theta - \sin \theta) d\theta, \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) d\theta.$$

4. Έστω $f(z) = (\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3})e^z$ για $z \neq 0$. Βρείτε όλες τις τιμές του a ώστε να είναι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

για κάθε τμηματικά C^1 κλειστή καμπύλη γ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Για καθεμιά από αυτές τις τιμές του a βρείτε F ώστε $F'(z) = f(z)$ για $z \neq 0$.

5. (α) Έστω f αναλυτική και f' συνεχής στο ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και τμηματικά C^1 κλειστή καμπύλη γ στο Ω . Αν $|f(z) - 1| < 1$ για $z \in \Omega$, αποδείξτε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

(β) Έστω f, g αναλυτικές και f', g' συνεχείς στο ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και τμηματικά C^1 κλειστή καμπύλη γ στο Ω . Αν $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ για $z \in \Omega$, αποδείξτε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

6. Έστω $\operatorname{Im} z_1 < 0 < \operatorname{Im} z_2$ και έστω ότι η καμπύλη γ_1 έχει αρχικό άκρο το z_1 και τελικό άκρο το z_2 και η καμπύλη γ_2 έχει αρχικό άκρο το z_2 και τελικό άκρο το z_1 . Αν $\gamma_1^* \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ και $\gamma_2^* \cap [0, +\infty) = \emptyset$, αποδείξτε ότι

$$n(\gamma_1 + \gamma_2; 0) = 1.$$

7. (α) Έστω f συνεχής στο $\overline{\Delta(0; R)}$. Ορίζουμε $\gamma(t) = f(Re^{it})$ για $t \in [0, 2\pi]$. Αποδείξτε ότι, αν $n(\gamma; w) \neq 0$, τότε $w \in f(\Delta(0; R))$. Δηλαδή:

$$\{w \mid w \text{ περικλείεται από την } \gamma\} \subseteq f(\Delta(0; R)).$$

(Υπόδειξη: Η f ορίζει ομοτοπία με κλειστές ενδιάμεσες καμπύλες.)

(β) Αποδείξτε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας: κάθε πολυώνυμο p βαθμού ≥ 1 με μιγαδικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε αρκετά μεγάλο R και εφαρμόστε το (α) με $\gamma(t) = p(Re^{it})$ για $t \in [0, 2\pi]$ και για $w = 0$.)

8. Έστω $y, R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ και $\gamma_{R,y}$ η κλειστή καμπύλη η οποία περιγράφει μια φορά με τη θετική φορά διαδοχικά το ευθ.τμήμα $[-R, R]$, το ευθ. τμήμα $[R, R + iy]$, το ευθ. τμήμα $[R + iy, -R + iy]$ και το ευθ. τμήμα $[-R + iy, -R]$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[R, R+iy]} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R+iy, -R]} e^{-z^2} dz = 0.$$

Κατόπιν, αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2} dx$$

δεν εξαρτάται από το $y \in \mathbb{R}$. Τέλος, χρησιμοποιώντας τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy) dx = \sqrt{\pi} e^{-y^2}.$$