Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων

Παραδώστε τις λύσεις σας μέχρι την Πέμπτη 11 Δεκεμβρίου.

1. Έστω f αναλυτική στον $D(z_0;R)$ και συνεχής στον $\overline{D(z_0;R)}$. Αποδείξτε ότι

$$f(z) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

όπου $|z-z_0|<R$ και $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ για $t\in[0,2\pi]$.

2. Έστω $a, A, B, R > 0$ και f αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Αν ισχύει $|f(z)| \le A + B|z|^a$ για κάθε z με $|z| \ge R$, αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού $\le [a]$.

3. Βρείτε τα σημεία μεμονωμένης ανωμαλίας (χωρίς να ξεχάσετε το ∞) των:

$$\tfrac{1}{z^2+5z+6}\,, \quad \tfrac{1}{\sin\pi z}\,, \quad e^z + e^{1/z}\,.$$

Κατατάξτε τα σημεία αυτά σε πόλους και ουσιώδη ανώμαλα σημεία και βρείτε τα ιδιάζοντα μέρη των αντίστοιχων σειρών Laurent.

4. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$ και το $\mathrm{Re}\, f$ ή το $\mathrm{Im}\, f$ είναι άνω φραγμένο ή κάτω φραγμένο. Αποδείξτε ότι το z_0 είναι άρσιμο ανώμαλο σημείο.

(*Υπόδειξη:* Έστω $\mathrm{Re}\, f(z) \le M$ για $0 < |z-z_0| < R$. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Riemann στη συνάρτηση $\frac{f(z)-M+1}{f(z)-M-1}$.)

5. Έστω ανοικτό $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, ευθεία l και f συνεχής στο Ω και αναλυτική στο $\Omega\setminus l$. Αποδείξτε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω.

(*Υπόδειξη:* Θεώρημα Morera.)

6. Έστω ανοικτό, συνεκτικό $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ώστε να είναι $\overline{z}\in\Omega$ για κάθε $z\in\Omega$. Δηλαδή, το Ω είναι συμμετρικό ως προς το $\mathbb{R}$. Αν το Ω δεν είναι κενό, αποδείξτε ότι $\Omega\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$. Έστω και f αναλυτική στο Ω ώστε να είναι $f(z)\in\mathbb{R}$ για κάθε $z\in\Omega\cap\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$$

για κάθε $z\in\Omega$.

(*Υπόδειξη:* Η $\overline{f(\overline{z})}$ είναι αναλυτική στο Ω.)

7. Έστω ανοικτό, συνεκτικό $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ώστε κάθε σημείο του Ω είναι είτε σημείο αναλυτικότητας είτε σημείο μεμονωμένης ανωμαλίας της συνάρτησης f. Αν οι ρίζες της f έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω το οποίο δεν είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο Ω. (Επομένως, δεν υπάρχει κανένα σημείο μεμονωμένης ανωμαλίας της f.)

8. Έστω ανοικτό $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ και f, $f_n\ (n\in\mathbb{N})$ αναλυτικές στο Ω και συνεχείς στο $\overline{\Omega}$, την κλειστότητα του Ω στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Αν $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $\partial\Omega$, αποδείξτε ότι $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $\widehat{\Omega}$.

9. Έστω f αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

   (α) Αν η Re f έχει σημείο τοπικού μεγίστου στο Ω, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

   (*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την e^f .)

   (β) Αν η $|f|$ έχει σημείο τοπικού ελαχίστου στο Ω, αποδείξτε ότι είτε η τιμή της f στο σημείο αυτό είναι 0 είτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

   (*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $\frac{1}{f}$.)

10. Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, f αναλυτική στο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$, την κλειστότητα του Ω στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Αν η $|f|$ είναι σταθερή στο $\partial\Omega$, αποδείξτε ότι είτε η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο Ω είτε η f είναι σταθερή στο Ω.

11. Έστω f, g αναλυτικές στο $\mathbb{C}$ και $|f(z)| \leq |g(z)|$ για κάθε z. Αποδείξτε ότι υπάρχει μ ώστε $f(z) = \mu g(z)$ για κάθε z.

12. Έστω f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ ώστε $|f(z)| = 1$ για κάθε z με $|z| = 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει c με $|c| = 1$ και $n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $f(z) = cz^n$ για κάθε z. Αν επιτρέψουμε να έχει η f και πόλους στο $\mathbb{C}$, αποδείξτε ότι η f είναι ρητή συνάρτηση ειδικής μορφής.

    (*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $f(z)\overline{f(\frac{1}{\overline{z}})}$.)