

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων

Παραδώστε τις λύσεις σας μέχρι την Παρασκευή 6 Φεβρουαρίου.

1. Έστω f αναλυτική στον $D(z_0; r)$ και συνεχής στον $\overline{D(z_0; r)}$ και έστω ότι η f δεν μηδενίζεται στον κύκλο $C(z_0; r)$. Αν $k \in \mathbb{N}$ και $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ για $t \in [0, 2\pi]$, τότε τί παριστάνει το

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} z^k dz;$$

2. Έστω f αναλυτική στον $\mathbb{D}$ και συνεχής στον $\overline{\mathbb{D}}$ και έστω ότι ισχύει $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(z) = z^n$ έχει ακριβώς n λύσεις στον $\mathbb{D}$.

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεώρημα του Rouché σε κύκλο $C(0; r)$ για r κοντά στο 1.)

3. Έστω $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$. Στο $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n}\}$ θεωρούμε την

$$f(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}.$$

- (i) Αποδείξτε ότι $f(z) \in \mathbb{D}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και $f(z) \in \mathbb{T}$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$.
 (ii) Βρείτε την τιμή του δείκτη στροφής της καμπύλης $f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, ως προς το 0.
 (iii) Αποδείξτε ότι για κάθε $w \in \mathbb{D}$ η εξίσωση $f(z) = w$ έχει ακριβώς n λύσεις στο $\mathbb{D}$.

4. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a + \sin^2 x} dx \quad (|a| > 1), \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)(1+x^3)} dx.$$

5. (α) Έστω ανοικτό, συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και g αναλυτική στο Ω . Αποδείξτε ότι υπάρχει αναλυτικός κλάδος του $\log g$ στο Ω αν και μόνο αν ισχύει

$$\int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$$

για κάθε τμηματικά C^1 κλειστή καμπύλη γ στο Ω .

(β) Έστω m -πλά συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $A_1, \dots, A_{m-1}$ οι φραγμένες συνεκτικές συνιστώσες του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ και A_{∞} η μη-φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Θεωρούμε τυχόντα σημεία $a_j \in A_j$ για $j = 1, \dots, m-1$. Αποδείξτε ότι για κάθε f αναλυτική στο Ω η οποία δεν μηδενίζεται πουθενά στο Ω υπάρχουν $n_1, \dots, n_{m-1} \in \mathbb{N}_0$ ώστε για την

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - a_1)^{n_1} \dots (z - a_{m-1})^{n_{m-1}}}$$

να υπάρχει αναλυτικός κλάδος του $\log g$ στο Ω .

6. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο p_n για το οποίο ισχύει:

- (i) $|p_n(z)| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε z με $|z| \leq n$ και $\operatorname{Im} z \leq 0$ ή $\operatorname{Im} z \geq \frac{2}{n}$ και
 (ii) $|p_n(z)| \geq n$ για κάθε z με $|z| \leq n$ και $\operatorname{Im} z = \frac{1}{n}$.

(Υπόδειξη: Θεώρημα Runge.)

Αποδείξτε ότι για την ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ισχύει:

- (i) $p_n(z) \rightarrow 0$ για κάθε z ,
- (ii) $p_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ και
- (iii) η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη σε καμιά ανοικτή περιοχή κανενός σημείου του $\mathbb{R}$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) για την οποία ισχύει:

- (i) $p_n(z) \rightarrow 0$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$ και
- (ii) $p_n(z) \rightarrow 1$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

7. (α) Έστω ακολουθία (f_n) συναρτήσεων αναλυτικών στο ανοικτό, συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ η οποία είναι ομοιόμορφα φραγμένη στα συμπαγή του Ω . Έστω ότι οι f_n δεν μηδενίζονται πουθενά στο Ω και ότι $f_n(z_0) \rightarrow 0$ για κάποιο $z_0 \in \Omega$. Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω .

(β) Έστω ακολουθία (f_n) συναρτήσεων αναλυτικών στο ανοικτό, συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ η οποία είναι ομοιόμορφα φραγμένη στα συμπαγή του Ω . Έστω $E \subseteq \Omega$ το οποίο έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω ώστε για κάθε $z \in E$ το $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z)$ να είναι μιγαδικός αριθμός. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω .

8. Έστω ανοικτό, συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και

$$\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ αναλυτική στο } \Omega \text{ και } \operatorname{Re} f > 0 \text{ στο } \Omega\}.$$

Έστω ακολουθία (f_n) στο $\mathcal{F}$.

(α) Αν η $(f_n(z_0))$ είναι φραγμένη για τουλάχιστον ένα $z_0 \in \Omega$, αποδείξτε ότι υπάρχει υποακολουθία (f_{n_k}) η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω .

(β) Αν η $(f_n(z_0))$ είναι μη-φραγμένη για τουλάχιστον ένα $z_0 \in \Omega$, αποδείξτε ότι υπάρχει υποακολουθία (f_{n_k}) η οποία συγκλίνει στο ∞ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω .

(Υπόδειξη: Θεωρήστε τις συναρτήσεις e^{-f_n} .)

9. (α) Βρείτε σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα σε δυο γωνίες.

(β) Βρείτε σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα σε γωνία και ζώνη.

(γ) Βρείτε σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα σε γωνία και στην τομή δυο δίσκων ή στην τομή δίσκου και ημιεπιπέδου.

10. Βρείτε σύμμορφη απεικόνιση f καθώς και την αντίστροφή της

(α) ανάμεσα στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ και στον $\mathbb{D}$ έτσι ώστε $f(\infty) = 0$.

(β) ανάμεσα στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \tau$ και στον $\mathbb{D}$ έτσι ώστε $f(\infty) = 0$, όπου τ είναι το τόξο του $\mathbb{T}$ με άκρα τα e^{-ia} , e^{ia} και $0 < a < \pi$.

11. Υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα στον $\mathbb{D}$ και στο $\mathbb{D} \setminus \{0\}$;

12. (α) Έστω $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ αναλυτική στον $\mathbb{D}$. Αποδείξτε ότι ισχύει:

$$(i) \left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2}z_1} \right| \text{ για κάθε } z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

$$(ii) \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \text{ για κάθε } z \in \mathbb{D}.$$

Αποδείξτε ότι, αν ισχύει η ισότητα στο (i) για ένα τουλάχιστον ζευγάρι z_1, z_2 με $z_1 \neq z_2$ ή η ισότητα στο (ii) για ένα τουλάχιστον z , τότε η f είναι μετασχηματισμός Möbius και οι ισότητες ισχύουν ταυτοτικά.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε μετασχηματισμούς Möbius $z = S(u) = \frac{u+z_2}{1+\bar{z}_2 u}$, $v = T(w) = \frac{w-f(z_2)}{1-\bar{f}(z_2)w}$ και τη σύνθεση $T \circ f \circ S : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$.)

(β) Έστω τμηματικά C^1 καμπύλη γ στον $\mathbb{D}$. Ορίζουμε το **υπερβολικό μήκος** της γ να είναι το

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{1}{1-|z|^2} |dz|.$$

Αν η $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ είναι αναλυτική στον $\mathbb{D}$, η γ είναι τμηματικά C^1 καμπύλη στον $\mathbb{D}$ και $f(\gamma)$ είναι η καμπύλη-εικόνα, αποδείξτε ότι

$$l(f(\gamma)) \leq l(\gamma).$$

Αν η f είναι σύμμορφη επί του $\mathbb{D}$, αποδείξτε ότι $l(f(\gamma)) = l(\gamma)$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το (α).)

(γ) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ με $z_1 \neq z_2$, αποδείξτε ότι, ανάμεσα σε όλες τις τμηματικά C^1 καμπύλες στον $\mathbb{D}$ με αρχικό άκρο z_1 και τελικό άκρο z_2 , εκείνη η οποία έχει το ελάχιστο υπερβολικό μήκος είναι το τόξο του κύκλου που διέρχεται από τα z_1, z_2 και είναι ορθογώνιος στον $\mathbb{T}$. Αυτό το ελάχιστο υπερβολικό μήκος ονομάζεται **υπερβολική απόσταση** των z_1, z_2 και ισούται με

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1} \right|}.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον $S(z) = \lambda \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z}$, $|\lambda| = 1$, και το αποτέλεσμα του (β). Αναχθείτε, με κατάλληλο λ , στην περίπτωση $z_2 = 0, z_1 = x, 0 < x < 1$. Αποδείξτε ότι το $[0, x]$ έχει το ελάχιστο υπερβολικό μήκος.)

13. Αποδείξτε ότι για κάθε M, N με $0 < M < N$ υπάρχει $P = P(M, N) < N$ με την εξής ιδιότητα: αν η f είναι αναλυτική στον $D(z_0; R)$ και ισχύει $|f(z_0)| < M$ και $|f(z)| < N$ για κάθε $z \in D(z_0; R)$, τότε ισχύει $|f(z)| < P$ για κάθε $z \in D(z_0; \frac{R}{2})$.

(Υπόδειξη: Λήμμα του Schwarz.)

14. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα του Riemann, αποδείξτε ότι: αν το $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό και υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση f του Ω επί του $\mathbb{D}$ ώστε $f(z_0) = 0$ για κάποιο $z_0 \in \Omega$, τότε ισχύει $|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$ για κάθε g αναλυτική στο Ω με $g(z_0) = 0$ και σύνολο τιμών το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{D}$.

15. (α) Έστω $f, g : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ αναλυτικές στον $\mathbb{D}$ ώστε η f να είναι 1-1 και επί του Ω . Αν $f(0) = g(0)$, αποδείξτε ότι

$$g(D(0; r)) \subseteq f(D(0; r)), \quad 0 < r < 1.$$

(Υπόδειξη: Θεωρήστε την $f^{-1} \circ g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$.)

(β) Έστω $\Omega = \{w \mid -1 < \operatorname{Re} w < 1\}$. Βρείτε τη σύμμορφη απεικόνιση f του $\mathbb{D}$ επί του Ω με $f(0) = 0$ και $f'(0) > 0$. Αν η $g : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ είναι αναλυτική στον $\mathbb{D}$ και $g(0) = 0$, αποδείξτε ότι

$$|g(re^{it})| \leq \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad t \in \mathbb{R}, 0 < r < 1.$$