Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις ασκήσεις 2.1.1 - 2.1.5 της ενότητας 2.1. Ακολουθούν απαντήσεις ή υποδείξεις (όχι λύσεις) σε κάποιες από αυτές.

2.1.2. [α] Το διάστημα $A = (0,1)$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό. $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{bd} A = [0,1]$, $\operatorname{ext} A = \mathbb{C} \setminus [0,1]$, $\operatorname{cl} A = [0,1]$.

[β] Το $A = [0,1]$ είναι κλειστό αλλά όχι ανοικτό. $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{bd} A = [0,1]$, $\operatorname{ext} A = \mathbb{C} \setminus [0,1]$, $\operatorname{cl} A = [0,1]$.

[γ] Το $A = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό. $\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{bd} A = \mathbb{C}$, $\operatorname{ext} A = \emptyset$, $\operatorname{cl} A = \mathbb{C}$.

2.1.3. [α] Παρατηρήστε ότι $\{|z-w| \,|\, z, w \in A\} \subseteq \{|z-w| \,|\, z, w \in B\}$.

[β] Από το [α] έχουμε $\operatorname{diam} A \le \operatorname{diam} \operatorname{cl} A$. Κατόπιν, πάρτε τυχαίο $\lambda < \operatorname{diam} \operatorname{cl} A$. Τότε υπάρχουν $z, w \in clA$ ώστε $\lambda < |z-w|$. Πάρτε κατάλληλα μικρό $\epsilon > 0$ και δείτε ότι υπάρχουν $z', w' \in A$ ώστε $|z'-z| < \epsilon$ και $|w'-w| < \epsilon$. Πόσο μικρό πρέπει να είναι το ϵ έτσι ώστε από την τριγωνική ανισότητα $|z'-w'| \ge |z-w| - |z'-z| - |w'-w|$ να προκύπτει ότι $|z'-w'| > \lambda$; Τώρα, από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι $\operatorname{diam} A > \lambda$. Συμπεράνατε ότι $\operatorname{diam} A \ge \operatorname{diam} \operatorname{cl} A$.

[γ] Αν το A περιέχεται στον κλειστό δίσκο $\{z \,|\, |z - z_0| \le R\}$, τότε $\operatorname{diam} A \le 2R$. Αντιστρόφως, αν $R = \operatorname{diam} A < +\infty$, πάρτε τυχόν $z_0 \in A$ και αποδείξτε ότι το A περιέχεται στον κλειστό δίσκο $\{z \,|\, |z - z_0| \le R\}$.

2.1.4. [α] Αν $A \subseteq B$ αποδείξτε ότι $\operatorname{dist}(z, B) \le \operatorname{dist}(z, A)$, παρατηρώντας ότι $\{|z-w| \,|\, w \in A\} \subseteq \{|z-w| \,|\, w \in B\}$. Συμπεράνατε ότι $\operatorname{dist}(z, \operatorname{cl} A) \le \operatorname{dist}(z, A)$. Κατόπιν, πάρτε τυχαίο $\lambda > \operatorname{dist}(z, \operatorname{cl} A)$. Τότε υπάρχει $w \in \operatorname{cl} A$ ώστε $|z-w| < \lambda$. Πάρτε κατάλληλα μικρό $\epsilon > 0$ και δείτε ότι υπάρχει $w' \in A$ ώστε $|w'-w| < \epsilon$. Πόσο μικρό πρέπει να είναι το ϵ έτσι ώστε από την τριγωνική ανισότητα $|z-w'| \le |z-w| + |w'-w|$ να προκύπτει ότι $|z-w'| < \lambda$; Από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι $\operatorname{diam} A < \lambda$. Συμπεράνατε ότι $\operatorname{dist}(z, A) \le \operatorname{dist}(z, \operatorname{cl} A)$.

[β] Αν $\operatorname{dist}(z, A) = 0$ τότε για κάθε $r > 0$ υπάρχει $w \in A$ ώστε $|z-w| < r$ και άρα $D(z,r) \cap A \ne \emptyset$. Αντιστρόφως, αν $z \in \operatorname{cl} A$, τότε για κάθε $r > 0$ υπάρχει $w \in A$ ώστε $|z-w| < r$ και άρα $\operatorname{dist}(z, A) < r$. Επομένως $\operatorname{dist}(z, A) = 0$.

[γ] Για κάθε $w \in A$ έχουμε $\operatorname{dist}(z', A) - |z'-z''| \le |z'-w| - |z'-z''| \le |z''-w|$. Άρα $\operatorname{dist}(z', A) - |z'-z''| \le \operatorname{dist}(z'', A)$.

2.1.5. Έτω $z \in \operatorname{int}(\operatorname{bd} A)$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq \operatorname{bd} A$. Επίσης υπάρχει $w \in A$ ώστε $w \in D(z; r)$. Όμως, το A είναι ανοικτό, οπότε το w είναι εσωτερικό σημείο του A.

Για την $\operatorname{int}(\operatorname{bd} A) = \mathbb{C}$ δείτε τα σύνολα της άσκησης 2.1.2.