Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις ασκήσεις 5.1.1 - 5.1.3 της ενότητας 5.1, τις ασκήσεις 5.2.1 - 5.2.2 και 5.2.4 - 5.2.5 της ενότητας 5.2 και τις ασκήσεις 5.3.1 - 5.3.2 της ενότητας 5.3. Ακολουθούν απαντήσεις ή υποδείξεις σε κάποιες από αυτές.

5.1.1 - 5.1.3. Σε όλες τις ασκήσεις δουλέψτε με τον ορισμό της παραγώγου και τα πηλίκα διαφορών.

5.2.4. [α] Αρκεί να αποδείξετε ότι η $v = \operatorname{Im} f$ είναι σταθερή στο Ω. Από τις εξισώσεις C - R βρείτε τις $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. Θεωρήστε ευθ.τμήμα $[a, b]$ στο Ω. Βρείτε με τον κανόνα αλυσίδας (του απειροστικού λογισμού πολλών μεταβλητών) την παράγωγο $\frac{d}{dt} v((1-t)a + tb)$ και ολοκληρώστε την στο διάστημα $[0, 1]$. Αποδείξτε έτσι ότι $v(a) = v(b)$. Αν τα a, b είναι τυχαία σημεία στο Ω, ενώστε τα με πολυγωνική γραμμή η οποία περιέχεται ολόκληρη στο Ω και αποδείξτε ότι $v(a) = v(b)$. Συμπεράνατε ότι η v είναι σταθερή στο Ω. [β] Ισχύει $\alpha u + \beta v = \gamma$ στο Ω, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ και όπου $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$. Παραγωγίστε ως προς x, y και αποδείξτε με τις εξισώσεις C - R ότι οι μερικές παράγωγοι των u, v είναι όλες 0 στο Ω. Συνεχίστε όπως στο [α].