

Μιγαδική Ανάλυση.

Επαναληπτικό διαγώνισμα. 30 Μαΐου 2017.

Η διάρκεια του διαγωνίσματος είναι δύο ώρες. Λύστε όσα περισσότερα θέματα μπορείτε. Σε παρένθεση είναι οι μονάδες καθενός από τα θέματα.

1. (1,5) Βρείτε τους μιγαδικούς z με την ιδιότητα: $\text{Arg}(z^5) = \pi/2$ και $|z| = 2$.
2. (2,0) Βρείτε την τιμή τού ολοκληρώματος

$$\oint_{C(0;1)} \frac{e^z - 1}{z^2(z-2)} dz,$$

όπου $C(0;1)$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0, ακτίνα 1 και με την θετική φορά περιστροφής.

3. (2,0) Βρείτε τις μεμονωμένες ανωμαλίες τής συνάρτησης $f(z) = e^{1/z} + e^z/(z-1)^2$ και πείτε αν είναι πόλοι ή ουσιώδεις ανωμαλίες.
4. (2,5) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 8x^2 + 16} dx$$

με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

5. (2,0) Αν η f είναι αναλυτική στο \mathbb{C} και ισχύει $|f(z)| = 1$ όταν $|z| = 1$ και η f δεν μηδενίζεται στον μοναδιαίο δίσκο $D(0;1)$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο \mathbb{C} .

Καλή επιτυχία!

Μ. Παπαδημητράκης.