Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε πολύ απλά παραδείγματα (i) συνεκτικών A, B ώστε το $A \cap B$ να μην είναι συνεκτικό, (ii) συνεκτικού A του οποίου το ∂A δεν είναι συνεκτικό, (iii) συνεκτικού A του οποίου το A° δεν είναι συνεκτικό.

2. Αν το A είναι χωρίο (δηλαδή, ανοικτό και συνεκτικό) και $z_1, \dots, z_n \in A$, αποδείξτε ότι και το $A \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ είναι χωρίο.

3. Έστω ότι το A είναι κλειστό. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν κλειστά B, C έτσι ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$.

4. * Έστω ότι τα z, w ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του συμπαγούς F. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάσπαση B, C του F ώστε $z \in B$ και $w \in C$

5. Έστω $|a_n| r^n \leq M n^k$ για κάθε n (με σταθερά $M, r, k > 0$). Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ συγκλίνει για κάθε $z \in D_0(r)$.

6. Βρείτε όλα τα z για τα οποία η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2+z^n}$ συγκλίνει.

7. Θεωρήστε το ημιεπίπεδο $H = \{x + iy \,|\, x > -\frac{1}{2}\}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $|\frac{z}{z+1}| < 1$ για κάθε $z \in H$. Βάσει αυτού, αποδείξτε ότι, αν το $K \subseteq H$ είναι συμπαγές, τότε υπάρχει r με $0 < r < 1$ ώστε να ισχύει $|\frac{z}{z+1}| \leq r$ για κάθε $z \in K$. Βάσει αυτού, αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{z}{z+1})^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του H.

8. Έστω συνεχής $f : D_{z_0}(R) \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{r \to 0} \int_{C_{z_0}(r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$. Χρησιμοποιήστε τον τύπο $\int_{C_{z_0}(r)} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i$.

9. Έστω f συνεχής στο $\{z \,|\, 1 < |z| < +\infty\}$. Ορίζουμε $M(r) = \max_{z \in C_0(r)} |f(z)|$ και υποθέτουμε ότι $rM(r) \to 0$ όταν $r \to +\infty$. Αποδείξτε ότι $\int_{C_0(r)} f(z)\, dz \to 0$ όταν $r \to +\infty$.

10. Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης $\mathrm{Re}\, z$ στα διάφορα σημεία z.

11. Έστω ανοικτό Ω και $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε το συμμετρικό του Ω ως προς τον x-άξονα, δηλαδή το $\Omega^* = \{z \,|\, \overline{z} \in \Omega\}$, και την $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ με τύπο $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ για κάθε $z \in \Omega^*$. Αποδείξτε ότι το Ω^* είναι ανοικτό και ότι η f^* είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $z_0 \in \Omega^*$ αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\overline{z_0} \in \Omega$.