

**Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.**

1. Βρείτε τους δίσκους σύγκλισης των δυναμοσειρών  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^5 z^n$  και  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ .
2. Αναπτύξτε την  $\frac{1}{(z-3)(z-4)}$  ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης  $D_0(3)$ , ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης  $D_0(3, 4)$  και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης  $D_0(4, +\infty)$ .
3. Αν η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  συγκλίνει για κάποιο  $z \in C_{z_0}(R)$ , αποδείξτε ότι συγκλίνει απολύτως για κάθε  $z \in D_{z_0}(R)$ .
4. Έστω  $y, R > 0$  και  $\gamma_{R,y}$  η κλειστή καμπύλη που αποτελείται από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα  $[-R, R]$ ,  $[R, R + iy]$ ,  $[R + iy, -R + iy]$  και  $[-R + iy, -R]$ .
  - (i) Αν  $y > 0$  είναι σταθερό, αποδείξτε ότι  $\int_{[R, R+iy]} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$  και  $\int_{[-R+iy, -R]} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$  όταν  $R \rightarrow +\infty$ .
  - (ii) Χρησιμοποιώντας την  $\gamma_{R,y}$ , αποδείξτε ότι το  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2} dx$  είναι ανεξάρτητο του  $y \in [0, +\infty)$ .
  - (iii) Θεωρώντας δεδομένο τον τύπο  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (από τον απειροστικό λογισμό), αποδείξτε ότι  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy) dx = \sqrt{\pi} e^{-y^2}$  για κάθε  $y \geq 0$ .
5. Υπολογίστε το  $\oint_{C_0(r)} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)} dz$  όταν  $0 < r < 2$  και όταν  $2 < r < +\infty$ .
6. Υπολογίστε το  $\oint_{C_1(\frac{1}{2})} \frac{\text{Log } z}{z^n} dz$  όταν  $n \in \mathbb{N}$ .
7. Έστω  $f$  ολόμορφη στο  $\mathbb{C}$  και έστω ότι υπάρχουν σταθερές  $A, M$  και  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $|f(z)| \leq A + M|z|^n$  για κάθε  $z$ . Αποδείξτε ότι  $f^{(n+1)}(z) = 0$  για κάθε  $z$  και ότι η  $f$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $\leq n$ .
8. Έστω  $f$  ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει τον κλειστό δίσκο  $\overline{D}_{z_0}(R)$  και  $0 < r < R$ . Αν  $|f(z)| \leq M$  για κάθε  $z \in C_{z_0}(R)$ , βρείτε ένα άνω φράγμα για την  $|f^{(n)}|$  στον  $\overline{D}_{z_0}(r)$ , το οποίο να εξαρτάται από τα  $n, r, R, M$  αλλά όχι από την  $f$  ή το  $z_0$ .