Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αν η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και το πραγματικό της μέρος $\mathrm{Re}\, f$ είναι άνω φραγμένο στο $\mathbb{C}$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

2. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$, και έστω ότι $|f(z)| > 1$ για κάθε $z \in \partial\Omega$ και $f(z_0) = 1$ για κάποιο $z_0 \in \Omega$. Έχει η f κάποια ρίζα στο Ω;

3. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο Ω και έστω ότι $\lim_{z\to\zeta} f(z) = 0$ για κάθε $\zeta \in \partial\Omega$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο Ω.

4. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Αν η $|f|$ είναι σταθερή στο $\partial\Omega$, αποδείξτε ότι είτε η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Ω είτε η f είναι σταθερή στο Ω.

5. Βρείτε την σειρά Taylor με κέντρο 1 του ολόμορφου κλάδου της $z^{1/2}$ ο οποίος έχει τιμή 1 στο 1.

6. Έστω f ολόμορφη στον δίσκο $D_{z_0}(R)$ και έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Taylor της f. Αποδείξτε ότι
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|^2\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$
για κάθε r με $0 \le r < R$.

7. Έστω f, g ολόμορφες στο χωρίο Ω. Αν $fg = 0$ στο Ω, αποδείξτε ότι είτε $f = 0$ στο Ω είτε $g = 0$ στο Ω.

8. Έστω f, g ολόμορφες στο χωρίο Ω. Αν η $\overline{f}\, g$ είναι ολόμορφη στο Ω, αποδείξτε ότι είτε $g = 0$ στο Ω είτε η f είναι σταθερή στο Ω.

9. Έστω f ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (z_n) στον $\mathbb{D}$ ώστε $|z_n| \to 1$ και η $(f(z_n))$ να είναι φραγμένη.

10. Βρείτε τις μεμονωμένες ανωμαλίες των $\frac{z^2}{\sin z}$, $\frac{1}{\sin^2 z}$, $e^z + e^{1/z}$, $\frac{1}{e^z-1}$. Ποιές από αυτές είναι πόλοι (και ποια είναι η αντίστοιχη τάξη του πόλου) και ποιές είναι ουσιώδεις;

11. Έστω f ολόμορφη στο $D_{z_0}(R) \setminus \{z_0\}$ και έστω ότι το πραγματικό της μέρος $\mathrm{Re}\, f$ είναι άνω φραγμένο στο $D_{z_0}(R) \setminus \{z_0\}$. Αποδείξτε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.