Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. (i) Θεωρήστε κλειστές καμπύλες γ_1, γ_2 και σημείο z έξω από τις τροχιές τους. Έστω ότι υπάρχουν διαδοχικά σημεία $w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, w_{n+1}^{(1)} = w_1^{(1)}$ στην τροχιά γ_1^* και διαδοχικά σημεία $w_1^{(2)}, \dots, w_n^{(2)}, w_{n+1}^{(2)} = w_1^{(2)}$ στην τροχιά γ_2^* και καμπύλες $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1} = \sigma_1$ ώστε κάθε σ_j να συνδέει το $w_j^{(1)}$ με το $w_j^{(2)}$ και ώστε, για κάθε $j = 1, \dots, n$, το μέρος της γ_1 ανάμεσα στα $w_j^{(1)}, w_{j+1}^{(1)}$, το μέρος της γ_2 ανάμεσα στα $w_j^{(2)}, w_{j+1}^{(2)}$, η σ_j και η σ_{j+1} να βρίσκονται μέσα σε ένα κυρτό υποχωρίο D_j του $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. Αποδείξτε ότι $n(\gamma_1; z) = n(\gamma_2; z)$.

   (ii) Θεωρήστε σημείο z και δύο ημιευθείες l, m με κορυφή z. Έστω $A \in l$, $A \neq z$ και $B \in m$, $B \neq z$. Θεωρήστε καμπύλη γ_1 από το A στο B στην μία από τις δύο γωνίες που ορίζονται από τις l, m και καμπύλη γ_2 από το B στο A στην δεύτερη από τις γωνίες που ορίζονται από τις l, m. Θεωρήστε την κλειστή καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα έναν μικρό κύκλο με κέντρο z, αποδείξτε ότι $n(\gamma; z) = \pm 1$.

2. (i) Έστω $g_1, g_2 : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ συνεχείς στο A και $h_1, h_2 : A \to \mathbb{C}$ συνεχείς κλάδοι των $\arg g_1, \arg g_2$ στο A. Αποδείξτε ότι η $h_1 + h_2$ είναι συνεχής κλάδος του $\arg(g_1 g_2)$ στο A.

   (ii) Αν γ_1, γ_2 είναι κλειστές καμπύλες στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε η $\gamma_1\gamma_2$ είναι κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αποδείξτε ότι $\Delta \arg(\gamma_1\gamma_2) = \Delta \arg \gamma_1 + \Delta \arg \gamma_2$.

   (iii) Θεωρήστε κλειστές καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ έτσι ώστε $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_2(t)|$ για κάθε $t \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $n(\gamma_1; 0) = n(\gamma_2; 0)$.

3. Θεωρήστε σταθερές καμπύλες γ_1 και γ_2 στο συνεκτικό σύνολο A. Αν η γ είναι ομοτοπική (με κλειστές ενδιάμεσες καμπύλες) στο A με την γ_1, αποδείξτε ότι η γ είναι ομοτοπική (με κλειστές ενδιάμεσες καμπύλες) στο A και με την γ_2.

4. Αν η γ είναι κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, αποδείξτε ότι η γ είναι ομοτοπική (με κλειστές ενδιάμεσες καμπύλες) στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ με μία κλειστή καμπύλη της οποίας η τροχιά περιέχεται στον κύκλο $C_0(1)$.

5. (i) Έστω f συνεχής στον δίσκο $\overline{D}_0(R)$. Ορίζουμε $\gamma(t) = f(Re^{it})$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Αποδείξτε ότι, αν $n(\gamma; w) \neq 0$, τότε $w \in f(D_0(R))$.

   (ii) Βάσει του (i), αποδείξτε το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας.

6. Έστω f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $f(1) = 6$, $f(-1) = 10$. Αποδείξτε ότι, αν η γ είναι τυχαία κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, τότε το $\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2-1}\, dz$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή.

7. (i) Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του $\oint_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\, dz$, όπου γ είναι τυχούσα κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

   (ii) Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του $\int_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\, dz$, όπου γ είναι τυχούσα καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ από το $-i$ στο i.

8. Έστω f ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω γ κλειστή καμπύλη ομόλογη του μηδενός στο Ω. Αν $|f(\zeta)| \leq 1$ για κάθε $\zeta \in \gamma^*$, $z_0 \in \Omega$ και $n(\gamma; z_0) \neq 0$, αποδείξτε ότι $|f(z_0)| \leq 1$.