**Συμπληρωματικό φυλλάδιο ασκήσεων.**

1. Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων $\operatorname{Im} z$ και $|z|^3$ με τον ορισμό αλλά και με τις εξισώσεις C-R.

2. Αποδείξτε ότι η $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις C-R στο $0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $0$.

3. Έστω ανοικτά σύνολα $U, V$ και $f : V \to U$, $g : U \to \mathbb{C}$, $h : V \to \mathbb{C}$ ώστε η $h$ να είναι ένα-προς-ένα και $h = g \circ f$. Αν η $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $w_0 \in V$, η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = f(w_0)$, $g'(z_0) \neq 0$ και η $f$ είναι συνεχής στο $w_0$, αποδείξτε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $w_0$ και $f'(w_0) = \frac{h'(w_0)}{g'(z_0)}$.

4. Θεωρήστε την ολόμορφη συνάρτηση $w = z^2$.
(i) Με σταθερά $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$, θεωρήστε τις υπερβολές $x^2 - y^2 = u_0$ και $2xy = v_0$ στο $z$-επίπεδο ($z = x + iy$). Σε ποιά σημεία τέμνονται και ποιά είναι η γωνία τους στα σημεία τομής τους;
(ii) Με σταθερά $x_0, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, θεωρήστε τις παραβολές $u = \frac{1}{4y_0^2}v^2 - y_0^2$ και $u = -\frac{1}{4x_0^2}v^2 + x_0^2$ στο $w$-επίπεδο ($w = u + iv$). Σε ποιά σημεία τέμνονται και ποιά είναι η γωνία τους στα σημεία τομής τους;

5. Θεωρήστε τα παρακάτω σύνολα:
(i) $\{re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\}$,
(ii) $\{re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty, -\pi < \theta < \pi\}$,
(iii) $\{re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty, 0 < \theta < 2\pi\}$,
(iv) $\{re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}\}$.
Γράψτε τους τύπους των συνεχών κλάδων του λογαρίθμου που ορίζονται σε καθένα σύνολο καθώς και την εικόνα καθενός συνόλου μέσω των αντίστοιχων κλάδων του λογαρίθμου. Κάντε το ίδιο για συνεχείς κλάδους της τετραγωνικής ρίζας, της κυβικής ρίζας και της έκτης ρίζας.

5. Αν το $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό και αν οι $f_1, f_2$ είναι διαφορετικοί συνεχείς κλάδοι του $\log z$ στο $A$, αποδείξτε ότι $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$.

6. Έστω συνεχής $g : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, συνεχής κλάδος $f$ του $\log g$ στο $A$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι η $h = e^{\frac{1}{n}f}$ είναι συνεχής κλάδος της $g^{\frac{1}{n}}$ στο $A$.

7. Έστω καμπύλη $\gamma$ και $\phi$ συνεχής στο $\gamma^*$. Γνωρίζουμε ότι η $f(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι ολόμορφη στο $\infty$.

8. Βρείτε το σύνολο ολομορφίας της $f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{tz}}{1+t}\, dt$.

9. Βρείτε τους δακτύλιους σύγκλισης των $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{z^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{z^n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{z^n}$.

10. (i) Αν δύο δυναμοσειρές του τύπου $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ με θετικές ακτίνες σύγκλισης ορίζουν την ίδια συνάρτηση σε κάποιον δίσκο κέντρου $z_0$, αποδείξτε ότι οι συντελεστές των δύο δυναμοσειρών ταυτίζονται.
(ii) Αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα για δύο δυναμοσειρές του τύπου $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n$.

11. Έστω $\gamma_R$ η κλειστή καμπύλη που είναι το άθροισμα του ευθ. τμήματος $[0, R]$, της καμπύλης $\sigma_R$ που διαγράφει το τόξο του κύκλου $C_0(R)$ από το $R$ στο $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ με την θετική κατεύθυνση και του ευθ. τμήματος $[Re^{i\frac{\pi}{4}}, 0]$.
(i) Αποδείξτε ότι $\int_{\sigma_R} e^{-z^2}\, dz \to 0$ όταν $R \to +\infty$.
(ii) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα την $\gamma_R$ και τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, αποδείξτε ότι: $\int_0^{+\infty} \sin t^2\, dt = \int_0^{+\infty} \cos t^2\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

12. Αν $n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε τα $\oint_{C_0(1)} \frac{e^z}{z^n}\,dz$, $\oint_{C_1(\frac{1}{2})} \frac{\operatorname{Log} z}{(z-1)^n}\,dz$.

13. Έστω $f$ συνεχής στο $\overline{D}_{z_0}(R)$ και ολόμορφη στο $D_{z_0}(R)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $z \in D_{z_0}(R)$ ισχύει $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z_0}(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$.

14. Έστω $f$ ολόμορφη στο $D_{z_0}(R)$. Αν $|f(z)| \le \frac{1}{R - |z - z_0|}$ για κάθε $z \in D_{z_0}(R)$, αποδείξτε ότι $|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{(n+1)!}{R^{n+1}}(1 + \frac{1}{n})^n$.

15. Έστω $f$ ολόμορφη στο χωρίο $\Omega$ και $m = \inf\{|f(z)| \,|\, z \in \Omega\}$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $|f(z_0)| = m$, αποδείξτε ότι είτε $m = 0$ (και άρα $f(z_0) = 0$) είτε $m > 0$ και τότε η $f$ είναι σταθερή στο $\Omega$.

16. Έστω $f$ ολόμορφη στο χωρίο $\Omega$ και $K = \sup\{\operatorname{Re} f(z) \,|\, z \in \Omega\}$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $\operatorname{Re} f(z_0) = K$, αποδείξτε ότι η $f$ είναι σταθερή στο $\Omega$.

17. Έστω $f_n, f$ ολόμορφες στο φραγμένο χωρίο $\Omega$ και συνεχείς στο $\overline{\Omega}$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\partial\Omega$, αποδείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\overline{\Omega}$.

18. Έστω $f$ ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο $\Omega$ και συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Αν $\operatorname{Re} f = 0$ στο $\partial\Omega$, αποδείξτε ότι η $f$ είναι σταθερή στο $\Omega$.

19. Έστω $f$ ολόμορφη και όχι σταθερή στο χωρίο $\Omega$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\mu > 0$ ισχύει $\overline{\{z \in \Omega \,|\, |f(z)| < \mu\}} \cap \Omega = \{z \in \Omega \,|\, |f(z)| \le \mu\}$.

20. Βρείτε την σειρά Taylor της $\frac{1}{1+z^2}$ με κέντρο οποιοδήποτε $a \in \mathbb{R}$.

21. Έστω $f$ ολόμορφη στο $D_{z_0}(R_1, R_2)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f_1$ και $f_2$ ώστε η $f_2$ να είναι ολόμορφη στο $D_{z_0}(R_2)$ και η $f_1$ να είναι ολόμορφη στο $D_{z_0}(R_1, +\infty)$ και ώστε $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ για κάθε $z \in D_{z_0}(R_1, R_2)$. Αποδείξτε ότι, αν η $f$ είναι φραγμένη στο $D_{z_0}(R_1, R_2)$, τότε οι $f_1, f_2$ είναι φραγμένες στο $D_{z_0}(R_1, R_2)$.

22. Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $D_0(R, +\infty) = \{z \,|\, |z| > R\}$ ο μέγιστος δακτύλιος αυτού του τύπου που περιέχεται στο $\Omega$. Έστω $f$ ολόμορφη στο $\Omega$. Αποδείξτε ότι η $f$ μπορεί να οριστεί στο $\infty$ ώστε να είναι ολόμορφη και στο $\infty$ αν και μόνο αν η σειρά Laurent της $f$ στο $D_0(R, +\infty)$ είναι της μορφής $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n z^n + a_0$.

23. Υπάρχει $f$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ που να ικανοποιεί ένα από τα παρακάτω;
(i) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1+(-1)^n}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $f(\frac{1}{2k}) = f(\frac{1}{2k+1}) = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

24. Υπάρχει $f$ ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

25. Έστω $f$, $g$ ολόμορφες στο χωρίο $\Omega$ και $0 \in \Omega$. Αν οι $f$, $g$ δεν έχουν ρίζες στο $\Omega$ και $f'(\frac{1}{n})/f(\frac{1}{n}) = g'(\frac{1}{n})/g(\frac{1}{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τί συμπεραίνετε για τις $f$, $g$;

26. Έστω ότι το χωρίο $\Omega$ είναι συμμετρικό ως προς το $\mathbb{R}$, δηλαδή $\overline{z} \in \Omega$ για κάθε $z \in \Omega$. Αν $\Omega \neq \emptyset$, αποδείξτε ότι $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Έστω $f$ ολόμορφη στο $\Omega$ με $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ για κάθε $z \in \Omega$.

27. Έστω $f, g$ ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ και $|f(z)| \le |g(z)|$ για κάθε $z$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mu$ ώστε $f(z) = \mu g(z)$ για κάθε $z$.

28. Είναι το $0$ μεμονωμένη ανωμαλία της $\frac{1}{\sin(1/z)}$ ;

29. Αποδείξτε ότι μια μεμονωμένη ανωμαλία της $f(z)$ δεν είναι πόλος της $e^{f(z)}$.

30. Έστω $z_0$ μεμονωμένη ανωμαλία της $f$, η οποία δεν είναι σταθερή σε καμία περιοχή του $z_0$. Αν υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^s|f(z)| \in [0,+\infty]$, αποδείξτε ότι το $z_0$ είναι είτε αιρόμενη ανωμαλία είτε πόλος της $f$ και ότι υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^s|f(z)| \begin{cases} = 0, & \text{αν } s > m \\ = +\infty, & \text{αν } s < m \\ \in (0,+\infty), & \text{αν } s = m \end{cases}$$

31. Έστω χωρίο $\Omega$ ώστε κάθε σημείο του $\Omega$ να είναι είτε σημείο ολομορφίας είτε μεμονωμένη ανωμαλία της $f$. Αν οι ρίζες της $f$ έχουν σημείο συσσώρευσης στο $\Omega$, το οποίο δεν είναι ουσιώδης ανωμαλία της $f$, αποδείξτε ότι η $f$ είναι σταθερή $0$ στο $\Omega$.

32. (i) Έστω ουσιώδης ανωμαλία $z_0$ της $f$ και $w \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ η συνάρτηση $\frac{1}{f-w}$ *δεν* είναι φραγμένη στο $D_{z_0}(r) \setminus \{z_0\}$.

    (ii) Αν το $z_0$ είναι ουσιώδης ανωμαλία της $f$, αποδείξτε ότι για κάθε $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ υπάρχει ακολουθία $(z_n)$ με $z_n \to z_0$ και $z_n \neq z_0$ για κάθε $n$ ώστε $f(z_n) \to w$.

33. Αποδείξτε την αρχή μεγίστου χρησιμοποιώντας την αρχή ανοικτής απεικόνισης.