Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n-1}$ (i) αν την θεωρήσουμε πραγματική σειρά, (ii) αν την θεωρήσουμε μιγαδική σειρά.

2. (i) Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου όπου είναι δυνατόν:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 i^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{i^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2i)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+i)^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4i)^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+i)(6+i)(9+i)\cdots(3n+i)}{(3+4i)(3+8i)(3+12i)\cdots(3+4ni)}.$$

   (ii) Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας όπου είναι δυνατόν:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n i^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+i}{2n-i}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+i}{n-i}\right)^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(1+2i)^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 (1-i)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+3i)^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+i}{(\sqrt[n]{n}+i)^n}.$$

3. Έστω $|a_n| r^n \leq M n^k$ για κάθε n (με σταθερά $M, r, k > 0$). Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ συγκλίνει για κάθε $z \in D_0(r)$.

4. Για κάθε $a > 0$ βρείτε τα z για τα οποία η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^a}$ συγκλίνει.

5. Βρείτε όλα τα z για τα οποία η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2+z^n}$ συγκλίνει.

6. Ελέγξτε την υπό συνθήκη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση των σειρών $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \sin \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n (1 - \cos \frac{1}{n})$.

7. Έστω $|\operatorname{Arg} z_n| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει απολύτως. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \infty$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| = +\infty$.

8. (i) Έστω $s_n = z_1 + \cdots + z_n$. Αν η ακολουθία $(a_{n+1} s_n)$ συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) s_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει.
   Ειδικώτερα: αν η (s_n) είναι φραγμένη, αν $a_n \to 0$ και αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει.
   Ποιά είναι η σχέση των παραπάνω με τα κριτήρια των Dirichlet και Abel;
   (ii) Μία πραγματική ακολουθία (a_n) με $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$ λέμε ότι είναι *φραγμένης κύμανσης*.
   Αποδείξτε ότι κάθε ακολουθία φραγμένης κύμανσης συγκλίνει.
   Αποδείξτε ότι το σύνολο των ακολουθιών φραγμένης κύμανσης είναι γραμμικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$).
   Αποδείξτε ότι κάθε μονότονη ακολουθία είναι φραγμένης κύμανσης.
   Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $a_+ = (|a| + a)/2$ και $a_- = (|a| - a)/2$. Παρατηρήστε ότι αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n)_+ < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n)_- < +\infty$. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι κάθε ακολουθία φραγμένης κύμανσης με όριο 0 γράφεται ως διαφορά δύο φθινουσών ακολουθιών με όριο 0.

9. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

10. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z^{2n}+1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$.

11. Θεωρήστε το ημιεπίπεδο $H = \{x + iy \mid x > -\frac{1}{2}\}$ και αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{z}{z+1})^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq H$.

12. (i) Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει και η $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει απολύτως, αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ των δύο σειρών συγκλίνει και ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.
(ii) Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει αλλά ότι το γινόμενο Cauchy αυτής της σειράς με τον εαυτό της αποκλίνει.

13. Υπολογίστε το $\int_\gamma |z|\,dz$ για καθεμία από τις παρακάτω καμπύλες γ με αρχή το $-i$ και τέλος το i.
(i) $\gamma(t) = it$ για $t \in [-1, 1]$.
(ii) $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(iii) $\gamma(t) = -\cos t + i \sin t$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

14. (i) Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma z^n\,dz = \frac{z_1^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1},$$

όπου z_0 είναι η αρχή και z_1 είναι το τέλος της καμπύλης γ.
(ii) Υπάρχουν πολυώνυμα $p_n(z)$ ώστε $p_n(z) \to \frac{1}{z}$ ομοιόμορφα στον κύκλο $C_0(1)$;

15. Έστω συνεχής $f : D_{z_0}(R) \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_{z_0}(r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

Χρησιμοποιήστε τον τύπο $\int_{C_{z_0}(r)} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$.

16. Έστω συνεχής $f : \{z \,|\, |z| > 1\} \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε $M(r) = \max_{z \in C_0(r)} |f(z)|$ και υποθέτουμε ότι $\lim_{r\to+\infty} rM(r) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_0(r)} f(z)\,dz = 0.$$