Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τις τιμές των $(-1)^{1/2}$, $i^{1/3}$, $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{1/4}$.

2. Θεωρήστε τα παρακάτω σύνολα:
(i) $\{re^{i\theta}\,|\,0<r<+\infty, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\}$,
(ii) $\{re^{i\theta}\,|\,0<r<+\infty, -\pi<\theta<\pi\}$,
(iii) $\{re^{i\theta}\,|\,0<r<+\infty, 0<\theta<2\pi\}$,
(iv) $\{re^{i\theta}\,|\,0<r<+\infty, \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5\pi}{2}\}$.
Σε καθένα από αυτά τα σύνολα γράψτε τους τύπους των συνεχών κλάδων της τετραγωνικής ρίζας, της κυβικής ρίζας και της έκτης ρίζας.

3. (i) Γράψτε τον τύπο ενός ολόμορφου κλάδου της $(w+1)^{1/2}$ στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$ και τον τύπο ενός ολόμορφου κλάδου της $(w-1)^{1/2}$ στο $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολόμορφος κλάδος της $(w^2-1)^{1/2}$ στο $\Omega=\mathbb{C}\setminus((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))$ και γράψτε τον τύπο του.
(ii) Ομοίως, γράψτε τον τύπο ενός ολόμορφου κλάδου της $(w+1)^{1/2}$ στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$ και τον τύπο ενός ολόμορφου κλάδου της $(w-1)^{1/2}$ στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,1]$. Αποδείξτε (πιο δύσκολα απ' ότι στο (i)) ότι υπάρχει ολόμορφος κλάδος της $(w^2-1)^{1/2}$ στο $\Omega'=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.
(iii) Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα σε δύο ολόμορφους κλάδους της $(w^2-1)^{1/2}$ στο ίδιο σύνολο, είτε στο Ω είτε στο Ω';
(iv) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ολόμορφος κλάδος της $(w^2-1)^{1/2}$ σε οποιονδήποτε κύκλο ο οποίος γυρνάει γύρω από ένα μόνο από τα σημεία ±1.

4. Έστω $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφες στο χωρίο Ω και έστω ότι οι f',g' είναι συνεχείς στο Ω.
(i) Αν $|f(z)-1|<1$ για κάθε $z\in\Omega$, αποδείξτε ότι $\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω.
(ii) Αν $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$ για κάθε $z\in\Omega$, αποδείξτε ότι $\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω.

5. Έστω $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\phi(t)|}{1+|t|}\,dt<+\infty$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(t)}{t-z}\,dt$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Ποιός είναι ο τύπος της f' στο $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$;

6. Έστω καμπύλη γ και ϕ συνεχής στο γ^*. Γνωρίζουμε ότι η $f(z)=\int_\gamma\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη στο ∞.

7. Βρείτε τα σύνολα ολομορφίας των εξής συναρτήσεων (του z):

$$\int_0^1\frac{1}{1+tz}\,dt,\quad \int_{-1}^1\frac{e^{tz}}{1+t^2}\,dt,\quad \int_0^{+\infty}\frac{e^{tz}}{1+t^2}\,dt,\quad \int_0^{+\infty}e^{-tz^2}\,dt.$$

8. Βρείτε τους δίσκους (ή δακτύλιους) σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^5z^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}z^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{z^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{z^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{z^n}.$$

9. (i) Χρησιμοποιώντας την γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$, γράψτε την $\frac{1}{1-z}$ ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D_0(1)$ και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D_0(1,+\infty)$.
(ii) Γράψτε την $\frac{1}{(z-3)(z-4)}$ ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D_0(3)$, ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D_0(3,4)$ και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D_0(4,+\infty)$.

10. Αν $m\in\mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας την γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$, γράψτε την $\frac{1}{(1-z)^m}$ ως δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$, και υπολογίστε τον δίσκο σύγκλισής της.

11. Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει για κάποιο $z\in C_{z_0}(R)$, αποδείξτε ότι συγκλίνει απολύτως για κάθε $z\in D_{z_0}(R)$.

12. (i) Αν δύο δυναμοσειρές του τύπου $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με θετικές ακτίνες σύγκλισης ορίζουν την ίδια συνάρτηση σε κάποιον δίσκο κέντρου z_0, αποδείξτε ότι οι συντελεστές των δύο δυναμοσειρών ταυτίζονται.
(ii) Αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα για δύο δυναμοσειρές του τύπου $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$.

13. Θεωρήστε δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ και υποθέστε ότι

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \qquad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Αν οι δύο δυναμοσειρές συγκλίνουν στον δίσκο $D_{z_0}(R)$, αποδείξτε ότι και η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει στον $D_{z_0}(R)$ και ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D_{z_0}(R).$$

14. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Βρείτε τα z για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{kn}}{n}$ συγκλίνει.

15. Θεωρήστε την δυναμοσειρά

$$\frac{z^3}{1} - \frac{z^{2\cdot 3}}{1} + \frac{z^{3^2}}{2} - \frac{z^{2\cdot 3^2}}{2} + \cdots + + \frac{z^{3^n}}{n} - \frac{z^{2\cdot 3^n}}{n} + \cdots .$$

Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι 1 και ότι το σύνολο των $z \in C_0(1)$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει καθώς και το σύνολο των $z \in C_0(1)$ για τα οποία η δυναμοσειρά αποκλίνει είναι και τα δύο πυκνά στον κύκλο $C_0(1)$.