Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ και γ_r η κλειστή καμπύλη που διαγράφει μία φορά με την θετική κατεύθυνση το σύνορο του τετραγώνου $\{x+iy \,|\, |x|\leq r, |y|\leq r\}$. Αποδείξτε ότι το $\oint_{\gamma_r} f(z)\,dz$ είναι σταθερή συνάρτηση του $r>0$.

2. Έστω $y>0, R>0$ και $\gamma_{R,y}$ η κλειστή καμπύλη που αποτελείται από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $[-R,R]$, $[R,R+iy]$, $[R+iy,-R+iy]$ και $[-R+iy,-R]$.
(i) Αν το $y>0$ είναι σταθερό, αποδείξτε ότι
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{[R,R+iy]} e^{-z^2}\,dz=0, \qquad \lim_{R\to+\infty}\int_{[-R+iy,-R]} e^{-z^2}\,dz=0.$$
(ii) Χρησιμοποιώντας την $\gamma_{R,y}$, αποδείξτε ότι το $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}\,dx$ είναι ανεξάρτητο του $y\in[0,+\infty)$.
(iii) Θεωρώντας δεδομένο τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (από τον απειροστικό λογισμό), αποδείξτε ότι
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2xy)\,dx=\sqrt{\pi}e^{-y^2}, \qquad \text{για κάθε } y\geq 0.$$

3. Έστω γ_R η κλειστή καμπύλη που είναι το άθροισμα του ευθ. τμήματος $[0,R]$, της καμπύλης σ_R που διαγράφει το τόξο του κύκλου $C_0(R)$ από το R στο $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ με την θετική κατεύθυνση και του ευθ. τμήματος $[Re^{i\frac{\pi}{4}},0]$.
(i) Αποδείξτε ότι
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_R} e^{-z^2}\,dz=0.$$
(ii) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα την γ_R και τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, αποδείξτε ότι
$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

4. Υπολογίστε το $\oint_{C_0(r)}\frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,dz$ όταν $0<r<2$ και όταν $2<r<+\infty$.

5. Αν $n\in\mathbb{N}$, υπολογίστε τα
$$\oint_{C_0(1)}\frac{e^z}{z^n}\,dz, \quad \oint_{C_1(1/2)}\frac{\operatorname{Log} z}{(z-1)^n}\,dz, \quad \oint_{C_1(1/2)}\frac{z^{1/2}}{(z-1)^n}\,dz.$$
Στο τελευταίο ολοκλήρωμα ως $z^{1/2}$ χρησιμοποιούμε τον ολόμορφο κλάδο της τετραγωνικής ρίζας στο χωρίο $\mathbb{C}\setminus\{x\,|\,x\leq 0\}$ ο οποίος έχει τιμή 1 στο 1.

6. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και έστω ότι υπάρχουν σταθερές A, M και $n\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|f(z)|\leq A+M|z|^n$ για κάθε z. Αποδείξτε ότι ισχύει $f^{(n+1)}(z)=0$ για κάθε z και ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$.

7. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το $\overline{D}_{z_0}(R)$ και έστω $0<r<R$. Αν ισχύει $|f(z)|\leq M$ για κάθε $z\in C_{z_0}(R)$, βρείτε ένα άνω φράγμα για την $|f^{(n)}|$ στο $\overline{D}_{z_0}(r)$, το οποίο να εξαρτάται από τα n, r, R, M αλλά όχι από την f ή το z_0.

8. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\overline{D}_{z_0}(R)$ και ολόμορφη στο $D_{z_0}(R)$. Αποδείξτε ότι
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z_0}(R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \qquad \text{για κάθε } z\in D_{z_0}(R).$$

9. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο $D_{z_0}(R)$. Αν ισχύει $|f(z)|\leq\frac{1}{R-|z-z_0|}$ για κάθε $z\in D_{z_0}(R)$, αποδείξτε ότι
$$|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{(n+1)!}{R^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

10. Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ευθεία l και f συνεχής στο Ω και αναλυτική στο $\Omega \setminus l$. Αποδείξτε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω.

11. Αν η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και το πραγματικό της μέρος $\mathrm{Re}\, f$ είναι άνω φραγμένο στο $\mathbb{C}$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

12. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο Ω και έστω $\lim_{z\to\zeta} f(z) = 0$ για κάθε $\zeta \in \partial\Omega$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο Ω.

13. Έστω ότι οι f_n, f είναι ολόμορφες στο φραγμένο χωρίο Ω και συνεχείς στο $\overline{\Omega}$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\partial\Omega$, αποδείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\overline{\Omega}$.

14. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο χωρίο Ω, έστω $m = \inf\{|f(z)| \,|\, z \in \Omega\}$ και έστω ότι υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $|f(z_0)| = m$. Αποδείξτε ότι αν $m > 0$ (δηλαδή $f(z_0) \neq 0$) τότε η f είναι σταθερή στο Ω.

15. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Αν η $|f|$ είναι σταθερή στο $\partial\Omega$, αποδείξτε ότι είτε η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Ω είτε η f είναι σταθερή στο Ω.

16. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και έστω ότι ισχύει $|f(z)| > 1$ για κάθε $z \in \partial\Omega$ και $f(z_0) = 1$ για κάποιο $z_0 \in \Omega$. Έχει η f κάποια ρίζα στο Ω;

17. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο χωρίο Ω και έστω $K = \sup\{\mathrm{Re}\, f(z) \,|\, z \in \Omega\}$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $\mathrm{Re}\, f(z_0) = K$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

18. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και έστω ότι ισχύει $\mathrm{Re}\, f(z) \geq m$ για κάθε $z \in \partial\Omega$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\mathrm{Re}\, f(z) \geq m$ για κάθε $z \in \Omega$.

19. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο φραγμένο χωρίο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Αν η $\mathrm{Re}\, f$ είναι σταθερή στο $\partial\Omega$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

20. Βρείτε την σειρά Taylor με κέντρο 1 του ολόμορφου κλάδου της $z^{1/2}$ στο $D_1(1)$ ο οποίος έχει τιμή 1 στο 1.

21. Βρείτε την σειρά Taylor της $\frac{1}{1+z^2}$ με κέντρο οποιοδήποτε $a \in \mathbb{R}$.

22. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο $D_{z_0}(R_1, R_2)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει f_2 ολόμορφη στο $D_{z_0}(R_2)$ και f_1 ολόμορφη στο $D_{z_0}(R_1, +\infty) \cup \{\infty\}$ ώστε να ισχύει

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \qquad \text{για κάθε } z \in D_{z_0}(R_1, R_2).$$

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι φραγμένη στο $D_{z_0}(R_1, R_2)$, τότε και οι f_1, f_2 είναι φραγμένες στο $D_{z_0}(R_1, R_2)$.

23. Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $D_0(R, +\infty) = \{z \,|\, |z| > R\}$ ο μέγιστος δακτύλιος αυτού του τύπου που περιέχεται στο Ω. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω. Αποδείξτε ότι η f μπορεί να οριστεί στο ∞ ώστε να είναι ολόμορφη και στο ∞ αν και μόνο αν η σειρά Laurent της f στο $D_0(R, +\infty)$ είναι της μορφής $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n z^n + a_0$.

24. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο $D_{z_0}(R)$ και έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ η σειρά Taylor της f. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \qquad \text{για κάθε } r \text{ με } 0 \leq r < R.$$

25. Έστω ότι οι f, g είναι ολόμορφες στο χωρίο Ω. Αν $fg = 0$ στο Ω, αποδείξτε ότι είτε $f = 0$ στο Ω είτε $g = 0$ στο Ω.

26. Έστω ότι οι f, g είναι ολόμορφες στο χωρίο Ω. Αν η $\overline{f}\, g$ είναι ολόμορφη στο Ω, αποδείξτε ότι είτε $g = 0$ στο Ω είτε η f είναι σταθερή στο Ω.

27. (i) Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και ισχύει $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε το $f(i)$.
(ii) Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και ισχύει $f(x) = x^2$ όταν $1 < x < 2$. Υπολογίστε το $f(-i)$.

29. Υπάρχει f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ που να ικανοποιεί ένα από τα παρακάτω;
(i) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1+(-1)^n}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $f(\frac{1}{2k}) = f(\frac{1}{2k+1}) = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

30. Υπάρχει f ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε να ισχύει $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

31. Έστω ότι οι f, g είναι ολόμορφες στο χωρίο Ω και $0 \in \Omega$. Αν οι f, g δεν έχουν ρίζες στο Ω και ισχύει $f'(\frac{1}{n})/f(\frac{1}{n}) = g'(\frac{1}{n})/g(\frac{1}{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τί συμπεραίνετε για τις f, g;

32. Έστω ότι το χωρίο Ω είναι συμμετρικό ως προς το $\mathbb{R}$, δηλαδή ότι ισχύει $\overline{z} \in \Omega$ για κάθε $z \in \Omega$.
(i) Αν $\Omega \neq \emptyset$, αποδείξτε ότι $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.
(ii) Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω και ότι ισχύει $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ για κάθε $z \in \Omega$.

33. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και ότι ισχύει $f(z) \in \mathbb{T}$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $c \in \mathbb{T}$ και $n \in \mathbb{N}_0$ ώστε να ισχύει $f(z) = cz^n$ για κάθε z. (*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $f(z)\overline{f(\frac{1}{\overline{z}})}$.)

34. Έστω ότι οι f, g είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ και ότι ισχύει $|f(z)| \leq |g(z)|$ για κάθε z. Αποδείξτε ότι υπάρχει c ώστε να ισχύει $f(z) = cg(z)$ για κάθε z.

35. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη και όχι σταθερή στο χωρίο Ω. Αποδείξτε ότι για κάθε $\mu > 0$ ισχύει
$$\overline{\{z \in \Omega \,|\, |f(z)| < \mu\}} \cap \Omega = \{z \in \Omega \,|\, |f(z)| \leq \mu\}.$$

36. Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (z_n) στο $\mathbb{D}$ ώστε $|z_n| \to 1$ και η $(f(z_n))$ να είναι φραγμένη.