Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω f ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ με $\iint_{\mathbb{D}} |f(z)|\, dxdy < +\infty$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Cauchy για κύκλους, αποδείξτε ότι

$$f(w) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{f(z)}{(1-\overline{z}w)^2}\, dxdy$$

για κάθε $w \in \mathbb{D}$.

2. Έστω f ολόμορφη στο $D_{z_0}(R)$.
(i) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μέσης τιμής, αποδείξτε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{z_0}(R)} f(z)\, dxdy.$$

(ii) Αποδείξτε ότι

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_{z_0}(R)} |f(z)|\, dxdy.$$

3. Έστω p, q δύο πολυώνυμα χωρίς κοινές ρίζες και έστω ότι $|p(z)| = |q(z)|$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Αποδείξτε ότι, αν το $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ρίζα του p πολλαπλότητας k, τότε το $b = \frac{1}{\overline{a}}$ είναι ρίζα του q πολλαπλότητας k, και αντιστρόφως.

4. Έστω f ολόμορφη στην οριζόντια ζώνη $\Omega = \{x + iy \,|\, A < y < B\}$ και περιοδική με περίοδο 1, δηλαδή ισχύει $f(z + 1) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.
(i) Αποδείξτε ότι υπάρχουν c_n ώστε να είναι

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n z}$$

για κάθε $z \in \Omega$, και βρείτε τύπους για τα c_n.
(ii) Αποδείξτε ότι η σειρά στο (i) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε μικρότερη οριζόντια ζώνη $\{x + iy \,|\, a < y < b\}$ με $A < a < b < B$.

5. Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{C}$ ονομάζεται **πραγματική-αναλυτική** στο ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}$ αν για κάθε $t_0 \in I$ υπάρχουν $\epsilon > 0$ και $a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$, έτσι ώστε $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subseteq I$ και

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t - t_0)^n \qquad \text{για κάθε } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon).$$

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I, τότε υπάρχει ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ έτσι ώστε $I \subseteq \Omega$ και ώστε η f να μπορεί να επεκταθεί ως συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ η οποία είναι ολόμορφη στο Ω.

6. (i) Έστω ότι το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f και έστω $w \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ η συνάρτηση $\frac{1}{f-w}$ *δεν είναι* φραγμένη στο $D_{z_0}(r) \setminus \{z_0\}$.
(ii) Αποδείξτε το **θεώρημα Casorati-Weierstrass**: Αν το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, τότε για κάθε w υπάρχει ακολουθία (z_n) με $z_n \to z_0$ και $z_n \neq z_0$ για κάθε n έτσι ώστε $f(z_n) \to w$.

7. Είναι το 0 μεμονωμένη ανωμαλία της $\frac{1}{\sin(1/z)}$;

8. Βρείτε τις μεμονωμένες ανωμαλίες (όχι άρσιμες) των:

$$\frac{1}{z^2+5z+6}, \quad \frac{1}{(z^2-1)^2}, \quad \frac{e^z-1}{z}, \quad \frac{e^z-1}{z^3}, \quad \frac{1}{\sin z}, \quad \tan z, \quad \frac{1}{\sin^2 z}, \quad e^z + e^{1/z}, \quad \frac{1}{e^z-1}.$$

Ποιές από τις ανωμαλίες είναι πόλοι και ποιά είναι η τάξη τους;

9. Έστω f ολόμορφη στο $D_{z_0}(R) \setminus \{z_0\}$ ώστε η $\mathrm{Re}\, f$ να είναι άνω φραγμένη στο $D_{z_0}(R) \setminus \{z_0\}$. Αποδείξτε ότι το z_0 είναι άρσιμη ανωμαλία της f.

10. Έστω χωρίο Ω έτσι ώστε κάθε σημείο του Ω είναι είτε σημείο ολομορφίας είτε μεμονωμένη ανωμαλία της συνάρτησης f. Αν οι ρίζες της f έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω, το οποίο δεν είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, αποδείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω. Θα μπορούσε το σημείο συσσώρευσης των ριζών να είναι ουσιώδης ανωμαλία της f χωρίς η f να είναι ταυτοτικά 0 στο Ω;

11. (i) Έστω $z_0 \in \mathbb{D}$, $|\lambda| = 1$ και
$$T(z) = \tfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$$
για $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Η T είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ και συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$. (Στην πραγματικότητα η T είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{z_0}}\}$). Αποδείξτε ότι $T(z) \in \mathbb{D}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, και $T(z) \in \mathbb{T}$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Η μοναδική ρίζα της T είναι το z_0.
Τώρα έστω $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ και $|\lambda| = 1$ και
$$B(z) = \lambda \prod_{k=1}^n \tfrac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}$$
για $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Η B είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ και συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$. (Στην πραγματικότητα η B είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{z_1}}, \dots, \frac{1}{\overline{z_n}}\}$). Αποδείξτε ότι $B(z) \in \mathbb{D}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, και $B(z) \in \mathbb{T}$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Οι μοναδικές ρίζες της B είναι τα $z_1, \dots, z_n$.
Κάθε τέτοια συνάρτηση B ονομάζεται **(πεπερασμένο) γινόμενο Blaschke**.
(ii) Αποδείξτε το αντίστροφο του (i). Δηλαδή, έστω f ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ και συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$ και έστω $f(z) \in \mathbb{D}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, και $f(z) \in \mathbb{T}$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Αν η f δεν είναι σταθερή, αποδείξτε ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ και λ με $|\lambda| = 1$ έτσι ώστε να είναι $f(z) = \lambda \prod_{k=1}^n \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}$ για κάθε $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

12. Αποδείξτε την πρώτη αρχή μεγίστου από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης.

13. Έστω f ολόμορφη στο $D_0(R)$, $f'(0) \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ και g ολόμορφη στο $D_0(r)$ έτσι ώστε να είναι $f(z^n) = f(0) + g(z)^n$ για κάθε $z \in D_0(r)$.

14. Έστω χωρία Ω_1, Ω_2 και δύο μη-σταθερές συναρτήσεις $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ και $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$. Θεωρούμε και την $h = g \circ f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$.
(i) Αν οι f, h είναι ολόμορφες στο Ω_1, τότε είναι και η g ολόμορφη στο Ω_2 ;
(ii) Αν οι g, h είναι ολόμορφες στα αντίστοιχα Ω_2, Ω_1, τότε είναι και η f ολόμορφη στο Ω_1 ;

15. Έστω ημιευθείες l, m με κοινό άκρο z. Οι l, m χωρίζουν το $\mathbb{C}$ σε δύο κλειστά γωνιακά υποσύνολα, έστω U_1, U_2. Έστω $A \in l$, $A \neq z$ και $B \in m$, $B \neq z$. Θεωρήστε στο U_1 καμπύλη γ_1 από το A στο B και στο U_2 καμπύλη γ_2 από το B στο A. Τέλος θεωρήστε την κλειστή καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Χρησιμοποιώντας έναν κύκλο με κέντρο το z, αποδείξτε ότι $n(\gamma; z) = \pm 1$.

16. Έστω κλειστό και συνεκτικό $F \subseteq \mathbb{C}$ ώστε $\pm 1 \in F$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολόμορφος κλάδος του $\log \frac{z-1}{z+1}$ στο $\Omega = \mathbb{C} \setminus F$.

17. (Καραμελίτσα) Έστω τετράγωνο χωρίο R με κέντρο το z_0 και f ολόμορφη στο R και συνεχής στο $\overline{R}$. Αν ισχύει $|f(z)| \leq m$ για κάθε z σε μία από τις τέσσερις πλευρές του R και $|f(z)| \leq M$ για κάθε z στις άλλες τρεις πλευρές του R, αποδείξτε ότι $|f(z_0)| \leq \sqrt[4]{mM^3}$.

18. (Καραμελίτσα) Αν η f είναι ολόμορφη και ένα-προς-ένα στο $\mathbb{C}$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $a \neq 0$ και b έτσι ώστε να είναι $f(z) = az + b$ για κάθε z.

19. (Καραμελίτσα) Έστω έξι διαφορετικά σημεία $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$. Είναι δυνατόν να ενώσουμε κάθε z_k με κάθε w_j με απλές καμπύλες γ_{kj} των οποίων οι τροχιές είναι ανά δύο ξένες; (Όταν λέμε **απλή** καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ εννοούμε ότι η γ είναι ένα-προς-ένα.)