Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και $f(1) = 6$, $f(-1) = 10$. Αποδείξτε ότι, αν η γ είναι τυχαία κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, τότε το $\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2-1}\, dz$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή.

2. (i) Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του $\oint_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\, dz$, όπου γ είναι τυχούσα κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
(ii) Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του $\int_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\, dz$, όπου γ είναι τυχούσα καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ από το $-i$ στο i.

3. Έστω f ολόμορφη στο ανοικτό Ω και γ κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη ομόλογη του μηδενός στο Ω, με $n(\gamma; z_0) \neq 0$.
(i) Αν A είναι η συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ η οποία περιέχει το z_0, αποδείξτε ότι $A \subseteq \Omega$ και $\partial A \subseteq \gamma^*$.
(ii) Αν $|f(\zeta)| \leq 1$ για κάθε $\zeta \in \gamma^*$, αποδείξτε ότι $|f(z_0)| \leq 1$.

4. Βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων

$$\frac{1}{z^2+5z+6}, \quad \frac{1}{(z^2-1)^2}, \quad e^z + e^{1/z}, \quad \frac{\cos z - 1}{z^4}, \quad \frac{1}{\sin(\pi z)}, \quad \tan(\pi z), \quad \frac{1}{\sin^2(\pi z)}, \quad \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}$$

στις μεμονωμένες ανωμαλίες τους στο $\mathbb{C}$.

5. Αν τα $z_1, \ldots, z_n \in D_0(R)$ είναι διαφορετικά, η f είναι ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει τον δίσκο $\overline{D}_0(R)$, και $p(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0(R)} \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}\, dz = \frac{f(z_1)}{p'(z_1)} + \cdots + \frac{f(z_n)}{p'(z_n)}.$$

6. Αν $n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε τό $\oint_{C_0(n)} \tan(\pi z)\, dz$.

7. (i) Αποδείξτε ότι υπάρχει $m > 0$ (ανεξάρτητο του $n \in \mathbb{N}$) έτσι ώστε να είναι $|\sin(\pi z)| \geq m$ και $|\tan(\pi z)| \geq m$ για κάθε $z \in \partial R_n$, όπου R_n είναι το τετράγωνο χωρίο με κορυφές στα σημεία $\pm(n + \frac{1}{2}) \pm i(n + \frac{1}{2})$.
(ii) Έστω f ολόμορφη στο $D_0(R, +\infty)$ για κάποιο $R > 0$ και έστω ότι το $\lim_{z\to\infty} zf(z)$ είναι μιγαδικός αριθμός. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \oint_{\partial R_n} \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}\, dz = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \oint_{\partial R_n} \frac{f(z)}{\tan(\pi z)}\, dz = 0.$$

(iii) Έστω f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ εκτός από πόλους στα σημεία $z_1, \ldots, z_N \notin \mathbb{Z}$ και έστω ότι το $\lim_{z\to\infty} zf(z)$ είναι μιγαδικός αριθμός. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(k) = -\pi \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{\tan(\pi z)}; z_j\right),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k f(k) = -\pi \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}; z_j\right).$$

(iv) Αν $w \notin \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι

$$-\frac{1}{w} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-w} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k-w} = -\frac{\pi}{\tan(\pi w)}.$$

(v) Αν $w \notin \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k-w)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi w)}$$

και κατόπιν ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(vi) Αν $a > 0$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2} = -\frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{a} \frac{1}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}.$$

8. Υπολογίστε τά

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^8}\,dx, \quad \mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx, \quad \mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{x(x^2+1)}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+1}\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta \ (0<a<1), \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4+1}\,dx.$$