Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω f ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το $\overline{D}_{z_0}(R)$ (ή, πιο γενικά, ολόμορφη στο $D_{z_0}(R)$ και συνεχής στο $\overline{D}_{z_0}(R)$) και έστω ότι η f δεν μηδενίζεται στον κύκλο $C_{z_0}(R)$. Τί παριστάνει το
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z_0}(R)}\frac{f'(z)}{f(z)}\,z^k\,dz\,;$$

2. Έστω f ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το $\overline{\mathbb{D}}$ (ή, πιο γενικά, ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ και συνεχής στο $\overline{\mathbb{D}}$) και έστω ότι ισχύει $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(z) = z^n$ έχει ακριβώς n λύσεις στο $\mathbb{D}$.

3. Έστω $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ και $|\lambda| = 1$. Θεωρούμε το (πεπερασμένο) γινόμενο Blaschke
$$B(z) = \lambda\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}.$$
(Δείτε το έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.)
(i) Βρείτε την τιμή του δείκτη στροφής της καμπύλης $B(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, ως προς το 0.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $w \in \mathbb{D}$ η εξίσωση $B(z) = w$ έχει ακριβώς n λύσεις στο $\mathbb{D}$, δηλαδή ότι η $B : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ είναι n-προς-ένα από το $\mathbb{D}$ επί του $\mathbb{D}$.

4. (α) Έστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ολόμορφη στο $\mathbb{D}$. Αποδείξτε ότι ισχύει:
(i) $\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \le \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.
(ii) $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$.
Αποδείξτε ότι, αν ισχύει η ισότητα στο (i) για ένα τουλάχιστον ζευγάρι z_1, z_2 με $z_1 \neq z_2$ ή η ισότητα στο (ii) για ένα τουλάχιστον z, τότε η f είναι μετασχηματισμός Möbius και οι ισότητες ισχύουν ταυτοτικά.
(*Υπόδειξη:* Θεωρήστε κατάλληλους μετασχηματισμούς Möbius S, T και την σύνθεση $T \circ f \circ S : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.)
(β) Έστω τμηματικά λεία καμπύλη γ στο $\mathbb{D}$. Ορίζουμε το **υπερβολικό μήκος** της γ να είναι το
$$l(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{1-|z|^2}\,|dz|.$$
Αν η $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$, η γ είναι τμηματικά λεία καμπύλη στο $\mathbb{D}$ και $f(\gamma)$ είναι η καμπύλη-εικόνα, αποδείξτε ότι $l(f(\gamma)) \le l(\gamma)$. Αν η f είναι μετασχηματισμός Möbius, αποδείξτε ότι $l(f(\gamma)) = l(\gamma)$.
(γ) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$, αποδείξτε ότι, ανάμεσα σε όλες τις τμηματικά λείες καμπύλες στο $\mathbb{D}$ με αρχικό άκρο z_1 και τελικό άκρο z_2, εκείνη η οποία έχει το ελάχιστο υπερβολικό μήκος είναι το τόξο του κύκλου που διέρχεται από τα z_1, z_2 και είναι ορθογώνιος στον $\mathbb{T}$. Αυτό το ελάχιστο υπερβολικό μήκος ονομάζεται **υπερβολική απόσταση** των z_1, z_2 και ισούται με
$$d_h(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+|(z_1-z_2)/(1-\overline{z_2}z_1)|}{1-|(z_1-z_2)/(1-\overline{z_2}z_1)|}.$$
(*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό Möbius, αναχθείτε στην περίπτωση $z_2 = 0$, $z_1 = x$, $0 < x < 1$. Αποδείξτε ότι το $[0, x]$ έχει το ελάχιστο υπερβολικό μήκος.)
Αποδείξτε ότι η d_h είναι μετρική στο $\mathbb{D}$, η λεγόμενη **υπερβολική μετρική**.

5. Αποδείξτε ότι για κάθε M, N με $0 < M < N$ υπάρχει $P = P(M, N) < N$ με την εξής ιδιότητα: αν η f είναι ολόμορφη στο $D_{z_0}(R)$ και ισχύει $|f(z_0)| < M$ και $|f(z)| < N$ για κάθε $z \in D_{z_0}(R)$, τότε ισχύει $|f(z)| < P$ για κάθε $z \in D_{z_0}(\frac{R}{2})$.

6. Βρείτε όλες τις ολόμορφες $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ με $f(0) = \frac{1}{2}$ και $f'(0) = \frac{3}{4}$.

7. Βρείτε τον αριθμό των ριζών της $z^4 - 6z + 3$ στον δακτύλιο $D_0(1, 2)$.

8. Έστω f, g ολόμορφες σε ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το $\overline{\mathbb{D}}$ (ή, πιο γενικά, ολόμορφες στο $\mathbb{D}$ και συνεχείς στο $\overline{\mathbb{D}}$) με $|f(\zeta)| < |g(\zeta)|$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{T}$ και $|g(z)| > 1$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(z) = g(z)$ στο $\mathbb{D}$.

9. Έστω ολόμορφες $f, g : \mathbb{D} \to \Omega$ ώστε η f να είναι ένα-προς-ένα στο $\mathbb{D}$ και επί του Ω. Αν $f(0) = g(0)$, αποδείξτε ότι $g(D_0(r)) \subseteq f(D_0(r))$ για κάθε r, $0 < r < 1$.

10. Έστω ολόμορφη $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ με $f(0) = 0$ και $|f'(0)| < 1$. Για κάθε n ορίζουμε $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f \circ f}_{n \text{ φορές}}$. Αποδείξτε ότι $f_n(z) \to 0$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$.

11. Έστω f ολόμορφη στο ανοικτό Ω. Υποθέτουμε ότι η γ είναι κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη στο Ω, ότι το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ έχει ακριβώς μία φραγμένη συνεκτική συνιστώσα U και ότι $n(\gamma; z) = 1$ για κάθε $z \in U$. Επίσης υποθέτουμε ότι το $\mathbb{C} \setminus f(\gamma)^*$ έχει ακριβώς μία φραγμένη συνεκτική συνιστώσα V και ότι $n(f(\gamma); w) = N$ για κάθε $w \in V$. Τέλος, υποθέτουμε ότι $f(z) \notin f(\gamma)^*$ για κάθε $z \in U$.
(i) Αποδείξτε ότι η f είναι N-προς-ένα από το U επί του V.
(ii) Αν επιπλέον $N = 1$ τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την $f^{-1} : V \to U$. Αποδείξτε ότι

$$f^{-1}(w) = \tfrac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \tfrac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \, d\zeta$$

για κάθε $w \in V$.

12. Έστω

$$f(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

για $z \in \mathbb{D}$ και έστω συμπαγές $F \subseteq \mathbb{D}$ με $0 \in F$. Αν m είναι ο αριθμός των ριζών της f στο F, αποδείξτε ότι

$$\min_{z \in \partial F} |f(z)| \leq |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m|.$$

13. Είναι τα χωρία

$$D_0(1,3) \setminus [1,3], \quad \mathbb{C} \setminus \big((-\infty, -2] \cup [-1/2, 1/2] \cup [2, +\infty)\big)$$

απλά συνεκτικά; Ποιές είναι οι τιμές που μπορεί να έχει το $\oint_\gamma (z + \frac{1}{z}) \, dz$, όπου γ είναι οποιαδήποτε κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη στο πρώτο σύνολο; στο δεύτερο σύνολο;

14. Έστω f ολόμορφη στο απλά συνεκτικό χωρίο Ω εκτός από μεμονωμένες ανωμαλίες στο Ω. Αποδείξτε ότι τα (i) και (ii) είναι ισοδύναμα:
(i) $e^{\oint_\gamma f(z)\, dz} = 1$ για κάθε κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη γ στο Ω της οποίας η τροχιά δεν περιέχει μεμονωμένες ανωμαλίες της f.
(ii) $\mathrm{Res}(f; z) \in \mathbb{Z}$ για κάθε μεμονωμένη ανωμαλία z της f στο Ω.
Αν η f ικανοποιεί τα (i), (ii) και είναι ολόμορφη στο $z_0 \in \Omega$, ορίζουμε $F(z) = e^{\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta}$ για $z \in \Omega$, όπου γ είναι οποιαδήποτε τμηματικά λεία καμπύλη στο Ω από το z_0 στο z και της οποίας η τροχιά δεν περιέχει μεμονωμένες ανωμαλίες της f.
Αποδείξτε ότι η F είναι καλώς ορισμένη και ολόμορφη στο Ω εκτός από τις μεμονωμένες ανωμαλίες της f.
Αποδείξτε ότι κάθε σημείο στο Ω είναι είτε σημείο ολομορφίας είτε πόλος της F αν και μόνο αν όλες οι μεμονωμένες ανωμαλίες της f στο Ω είναι απλοί πόλοι της f.