Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω ακολουθία (f_n) ολόμορφων συναρτήσεων στο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, η οποία είναι τοπικά φραγμένη σε κάθε σημείο του Ω.

   (i) Έστω ότι οι f_n δεν μηδενίζονται πουθενά στο Ω, και ότι $f_n(z_0) \to 0$ για κάποιο $z_0 \in \Omega$. Αποδείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

   (ii) Έστω $E \subseteq \Omega$ το οποίο έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω, ώστε για κάθε $z \in E$ το $\lim_{n\to+\infty} f_n(z)$ να υπάρχει και να είναι μιγαδικός αριθμός. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

2. Έστω ακολουθία (f_n) ολόμορφων συναρτήσεων στο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, με $\operatorname{Re} f_n(z) > 0$ για κάθε $z \in \Omega$ και για κάθε n.

   (i) Αν η $(f_n(z_0))$ είναι φραγμένη για τουλάχιστον ένα $z_0 \in \Omega$, αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

   (ii) Αν η $(f_n(z_0))$ είναι μη-φραγμένη για τουλάχιστον ένα $z_0 \in \Omega$, αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) η οποία αποκλίνει στο ∞ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

3. Έστω f φραγμένη και ολόμορφη στην κατακόρυφη ημι-ζώνη

   $$\Omega = \{z = x + iy \,|\, a < x < b, y > 0\}$$

   και έστω $-\infty < a < x_0 < b < +\infty$. Αν $f(x_0 + iy) \to A$ όταν $y \to +\infty$, αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει

   $$\sup_{x\in[a+\epsilon,b-\epsilon]} |f(x + iy) - A| \to 0$$

   όταν $y \to +\infty$.

4. Έστω $M \geq 0$, ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $\mathcal{F}$ η συλλογή όλων των ολόμορφων f στο Ω με

   $$\iint_\Omega |f(x, y)|^2 \, dxdy \leq M.$$

   Αποδείξτε ότι η $\mathcal{F}$ είναι τοπικά φραγμένη σε κάθε $z \in \Omega$.

5. Έστω (f_n) ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων στο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, και έστω $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αν κάθε f_n έχει το πολύ k ρίζες στο Ω, αποδείξτε ότι είτε η f έχει το πολύ k ρίζες στο Ω είτε η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω.

6. (i) Βρείτε σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα σε δύο γωνίες.

   (ii) Βρείτε σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα σε γωνία και σε ζώνη.

   (*Υπόδειξη*. Χρησιμοποιήστε γνωστή σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα στην γωνία $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ και σε ζώνη.)

   (iii) Βρείτε σύμμορφη απεικόνιση f καθώς και την αντίστροφή της ανάμεσα στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ και στο $\mathbb{D}$, έτσι ώστε $f(\infty) = 0$.

   (*Υπόδειξη*. Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.)

7. Υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση ανάμεσα στο $\mathbb{D}$ και στο $\mathbb{D} \setminus \{0\}$;

8. Έστω ολόμορφη $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ και ακολουθίες (z'_n) και (z''_n) στο $\mathbb{D}$ ώστε $z'_n \to 1$ και

   $$\Big|\frac{z''_n - z'_n}{1 - \overline{z'_n}z''_n}\Big| \leq M < 1$$

   για κάθε n. Αποδείξτε ότι $z''_n \to 1$. Επίσης, αν $f(z'_n) \to i$, αποδείξτε ότι $f(z''_n) \to i$.

9. Γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση του $\mathbb{C}$ επί του $\mathbb{D}$. Βρείτε $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ η οποία είναι ένα-προς-ένα στο $\mathbb{C}$ και επί του $\mathbb{D}$, ώστε οι f και f^{-1} να είναι συνεχείς.

10. Θεωρούμε το πάνω ημιεπίπεδο

$$\mathbb{H}_+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

(i) Έστω $z_0 \in \mathbb{H}_+$ και $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$. Βρείτε την μοναδική σύμμορφη απεικόνιση ϕ του $\mathbb{H}_+$ επί του $\mathbb{D}$ με $\phi(z_0) = 0$ και $\operatorname{Arg} \phi'(z_0) = \theta_0$.
(*Υπόδειξη*. Η ϕ θα έχει την μορφή $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.)
(ii) Έστω ολόμορφη $f : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_+$. Αποδείξτε ότι:
(a) $\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_1)-\overline{f(z_2)}}\right| \leq \left|\frac{z_1-z_2}{z_1-\overline{z_2}}\right|$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_+$.
(b) $\frac{|f'(z)|}{\operatorname{Im} f(z)} \leq \frac{1}{\operatorname{Im} z}$ για κάθε $z \in \mathbb{H}_+$.
Αποδείξτε ότι, αν ισχύει ισότητα είτε στο (a) για τουλάχιστον ένα ζευγάρι $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_+$ με $z_1 \neq z_2$ είτε στο (b) για τουλάχιστον ένα $z \in \mathbb{H}_+$, τότε υπάρχουν $z_0 \in \mathbb{H}_+$ και λ με $|\lambda| = 1$ ώστε $\frac{f(z)-i}{f(z)+i} = \lambda \frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$ για κάθε $z \in \mathbb{H}_+$, και τότε οι ισότητες στο (a) και στο (b) ισχύουν ταυτοτικά.
(iii) Έστω ολόμορφη $f : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{D}$ με $f(i) = 0$. Αποδείξτε ότι $|f(z)| \leq |\frac{i-z}{i+z}|$ για κάθε $z \in \mathbb{H}_+$ και $|f'(i)| \leq \frac{1}{2}$.

11. Έστω απλά συνεκτικό χωρίο $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ και $z_0 \in \Omega$, και έστω $\mathcal{F}$ η συλλογή όλων των ολόμορφων $f : \Omega \to \mathbb{D}$ με $f(z_0) = 0$ οι οποίες είναι ένα-προς-ένα στο Ω. Σταθεροποιούμε ένα $a \in \Omega$, $a \neq z_0$, και ορίζουμε

$$m = \sup\{|f(a)| \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $f_0 \in \mathcal{F}$ ώστε $|f_0(a)| = m$, και ότι κάθε τέτοια f_0 είναι σύμμορφη απεικόνιση του Ω επί του $\mathbb{D}$.

12. Έστω απλά συνεκτικό χωρίο $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ έτσι ώστε να είναι $\overline{z} \in \Omega$ για κάθε $z \in \Omega$ (δηλαδή το Ω είναι συμμετρικό ως προς τον x-άξονα). Έστω $z_0 \in \Omega \cap \mathbb{R}$ και έστω f η (μοναδική) σύμμορφη απεικόνιση του Ω επί του $\mathbb{D}$ με $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) > 0$.
Θεωρούμε τα πάνω και κάτω κομμάτια των Ω και $\mathbb{D}$:

$$\Omega_+ = \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \Omega_- = \{z \in \Omega \mid \operatorname{Im} z < 0\},$$

$$\mathbb{D}_+ = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \mathbb{D}_- = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$f(\Omega_+) = \mathbb{D}_+, \quad f(\Omega_-) = \mathbb{D}_-, \quad f(\Omega \cap \mathbb{R}) = (-1, 1).$$