Μιχάλης Παπαδημητράκης

Μιγαδική Ανάλυση

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι μιγαδικοί αριθμοί.

1.1 Οι πράξεις στο $\mathbb{R}^2$.

Είναι γνωστό ότι με $\mathbb{R}^2$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ζευγαριών

$$(x, y)$$

πραγματικών αριθμών x, y. Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζονται δύο πράξεις, η **πρόσθεση** και ο **πολλαπλασιασμός** με τύπους[1]

$$\boxed{\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}}$$

Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθούν οι βασικές αλγεβρικές ιδιότητες των δύο αυτών πράξεων:
(i) *Μεταθετική ιδιότητα:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1),$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_2, y_2)(x_1, y_1).$$

(ii) *Προσεταιριστική ιδιότητα:*

$$\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + \big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big),$$

$$\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\big)(x_3, y_3) = (x_1, y_1)\big((x_2, y_2)(x_3, y_3)\big).$$

(iii) *Επιμεριστική ιδιότητα:*

$$(x_1, y_1)\big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) = (x_1, y_1)(x_2, y_2) + (x_1, y_1)(x_3, y_3).$$

(iv) *Ύπαρξη μηδενικού στοιχείου και μοναδιαίου στοιχείου:*

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y), \quad (x, y)(1, 0) = (x, y).$$

Δηλαδή, το $(0, 0)$ είναι το μηδενικό στοιχείο για την πρόσθεση, και το $(1, 0)$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό.
(v) *Ύπαρξη αντίθετου στοιχείου και αντίστροφου στοιχείου:*

$$-(x, y) = (-x, -y), \quad (x, y)^{-1} = \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\Big).$$

Το ότι το $(-x, -y)$ είναι το αντίθετο στοιχείο του (x, y) σημαίνει ότι

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0).$$

[1]Το σύμβολο $:=$ με τις δύο τελείες μπροστά από το $=$ δηλώνει ότι το αριστερό μέλος της ισότητας ορίζεται με τον τύπο που βρίσκεται στο δεξιό μέλος της.

Και το ότι το $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ είναι το αντίστροφο στοιχείο του (x, y) σημαίνει ότι

$$(x, y)\Big(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = (1, 0).$$

Οι δύο τελευταίες ισότητες (αλλά και όλες οι προηγούμενες) δικαιολογούνται βάσει των τύπων των δύο πράξεων. Φυσικά, για να ορίζεται το αντίστροφο στοιχείο πρέπει να είναι $x^2 + y^2 \neq 0$ ή, ισοδύναμα, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Σχόλιο. Το ότι στο $\mathbb{R}^2$ ορίζονται οι πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, οι οποίες ικανοποιούν τις ίδιες βασικές αλγεβρικές ιδιότητες που έχουν οι αντίστοιχες πράξεις στο $\mathbb{R}$, σημαίνει ότι το $\mathbb{R}^2$ είναι, όπως και το $\mathbb{R}$, ένα *αλγεβρικό σώμα*.

Βάσει των ορισμών της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και χρησιμοποιώντας το αντίθετο και το αντίστροφο στοιχείο, μπορούμε να ορίσουμε την αφαίρεση και την διαίρεση στο σύνολο $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) := (x_1, y_1) + (-(x_2, y_2)) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

$$\begin{aligned}\frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} &:= (x_1, y_1)(x_2, y_2)^{-1} = (x_1, y_1)\Big(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}, -\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\Big) \\ &= \Big(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{-x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2+y_2^2}\Big).\end{aligned}$$

Το γεωμετρικό μοντέλο για το σύνολο $\mathbb{R}^2$ είναι το γνωστό μας xy-επίπεδο με τον οριζόντιο x-άξονα και τον κατακόρυφο y-άξονα, όπου κάθε ζευγάρι (x, y) αντιστοιχίζεται στο σημείο του επιπέδου με τετμημένη x και τεταγμένη y. Επίσης, είναι γνωστός ο γεωμετρικός τρόπος πρόσθεσης σημείων του xy-επιπέδου, δηλαδή με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Για τον γεωμετρικό τρόπο πολλαπλασιασμού σημείων θα μιλήσουμε σε λίγο.

1.2 Οι μιγαδικοί αριθμοί και το σύνολο $\mathbb{C}$.

Από τώρα και στο εξής, για απλούστευση, θα γράφουμε κάθε ζευγάρι $(x, 0)$ απλά x. Δηλαδή θα ταυτίζουμε κάθε $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ με το αντίστοιχο $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(x, 0) = x.}$$

Πολλές φορές αυτήν την ταύτιση την κάνουμε αυθόρμητα, και χωρίς να το συνειδητοποιούμε, όταν τα σημεία $(x, 0)$ του x-άξονα στο xy-επίπεδο τα γράφουμε x.

Η ταύτιση του x με το αντίστοιχο $(x, 0)$ μας επιτρέπει να θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Με το γράμμα i θα συμβολίζουμε το στοιχείο $(0, 1)$:

$$\boxed{i := (0, 1).}$$

Τώρα με απλές πράξεις (βάσει των τύπων του αθροίσματος και του γινομένου) έχουμε ότι

$$(x, 0) + i(y, 0) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = (x, 0) + (0, y) = (x, y).$$

Αν σ' αυτήν την σχέση αντικαταστήσουμε τα $(x, 0)$ και $(y, 0)$ με τα αντίστοιχα x και y, βρίσκουμε

$$\boxed{x + iy = (x, y).}$$

Δηλαδή το ζευγάρι (x, y) ισούται με το αποτέλεσμα της παράστασης $x + iy$.

Από τώρα και στο εξής θα γράφουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ και στις δύο μορφές: $x + iy$ και (x, y). Θα προτιμάμε την πρώτη μορφή, την $x + iy$, την λεγόμενη *μιγαδική μορφή* των στοιχείων του $\mathbb{R}^2$. Όταν γράφουμε τα στοιχεία (x, y) του $\mathbb{R}^2$ με την μιγαδική μορφή $x + iy$, τα ονομάζουμε **μιγαδικούς αριθμούς**, και τότε χρησιμοποιούμε παραδοσιακά το σύμβολο $\mathbb{C}$ αντί του $\mathbb{R}^2$. Με άλλα λόγια, το $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

$$x + iy,$$

όπου $\mathbb{C}$ είναι εναλλακτική γραφή του $\mathbb{R}^2$ και $x + iy$ είναι εναλλακτική γραφή του (x, y).

Χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές μορφές των διαφόρων ζευγαριών, οι τύποι των τεσσάρων πράξεων γράφονται ως εξής:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Με $x_1 = x_2 = 0$ και $y_1 = y_2 = 1$ στον τύπο του γινομένου, βρίσκουμε ότι

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Αυτή η ιδιότητα του αριθμού i μας επιτρέπει να μην χρειάζεται να θυμόμαστε τον τύπο του γινομένου: μπορούμε απλά να χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πράξεων (την μεταθετική, την προσεταιριστική και την επιμεριστική) ώστε να πολλαπλασιάσουμε τις παρενθέσεις ως εξής:

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

Επίσης, με $x_1 = x_2 = x$ και $y_1 = y$ και $y_2 = -y$ στον τύπο του γινομένου, βρίσκουμε αμέσως ότι

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Αυτή είναι μια πολύ χρήσιμη σχέση (και θα την δούμε ξανά παρακάτω), και μας επιτρέπει να βρίσκουμε το αντίστροφο στοιχείο χωρίς να θυμόμαστε τον τύπο του:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Ομοίως, για την διαίρεση γράφουμε

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_1y_2 + y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$

χωρίς να χρειάζεται να θυμόμαστε τον περίπλοκο τύπο της.

Με τα γράμματα $x, y, u, v, \xi, \eta, a, b, \alpha, \beta, k, l, m, n$ θα συμβολίζουμε, συνήθως, πραγματικούς αριθμούς, ενώ με τα z, w, ζ θα συμβολίζουμε, συνήθως, μιγαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, θα γράφουμε:

$$z = x + iy, \qquad w = u + iv, \qquad \zeta = \xi + i\eta.$$

Η σχέση $i^2 = -1$ σημαίνει ότι η πολυωνυμική εξίσωση δευτέρου βαθμού $z^2 + 1 = 0$ έχει ως λύση τον μιγαδικό αριθμό i (και τον αντίθετό του $-i$), ενώ, όπως γνωρίζουμε πολύ καλά, η ίδια εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Σχόλιο. Θα αποδείξουμε πολύ αργότερα ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ με συντελεστές στο $\mathbb{C}$ (και $n \geq 1$, $a_n \neq 0$) έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\mathbb{C}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathbb{C}$ είναι ένα *αλγεβρικά κλειστό σώμα* (σε αντίθεση με το $\mathbb{R}$ στο οποίο η πολυωνυμική εξίσωση $x^2 + 1$ με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$).

Οι συνηθισμένες *σχέσεις διάταξης* $<$ και $\leq$ στο $\mathbb{R}$ δεν μπορούν να επεκταθούν στο $\mathbb{C}$ διατηρώντας τις συνηθισμένες ιδιότητές τους. Πράγματι, αν αυτό ήταν δυνατόν, τότε θα έπρεπε κάθε αριθμός της μορφής $z^2 = z\,z$ να είναι θετικός όταν $z \neq 0$, και τότε θα καταλήγαμε στην εξής αντίφαση: το $1 = 1^2$ είναι θετικό και το $-1 = i^2$ είναι κι αυτό θετικό. Γι αυτόν τον λόγο, *όταν γράφουμε τις ανισότητες $z < w$ και $z \leq w$ θα προϋποθέτουμε ότι οι αριθμοί z, w είναι πραγματικοί και ότι οι σχέσεις $<$ και $\leq$ είναι οι γνωστές ανισοτικές σχέσεις στο $\mathbb{R}$.*

Σχόλιο. Το ότι δεν ορίζονται ανισοτικές σχέσεις στο $\mathbb{C}$ σημαίνει ότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι *διατεταγμένο σώμα* (σε αντίθεση με το $\mathbb{R}$).

Το γεωμετρικό μοντέλο για το $\mathbb{C}$ είναι φυσικά το ίδιο με το γεωμετρικό μοντέλο για το $\mathbb{R}^2$ (αφού τα δύο σύνολα είναι τα ίδια), δηλαδή το xy-επίπεδο, όπου κάθε μιγαδικός $z = x + iy$ αντιστοιχίζεται στο σημείο (x, y) του επιπέδου με τετμημένη x και τεταγμένη y. Ο οριζόντιος x-άξονας ονομάζεται **πραγματικός άξονας**, διότι αυτός περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς x (ταυτισμένους με τα σημεία $(x, 0)$). Οι μιγαδικοί αριθμοί iy ονομάζονται **φανταστικοί αριθμοί** και, ως σημεία $(0, y)$ του xy-επιπέδου, βρίσκονται πάνω στον κατακόρυφο y-άξονα, ο οποίος ονομάζεται **φανταστικός άξονας**. Σε αυτό το πλαίσιο, το xy-επίπεδο ονομάζεται και **μιγαδικό επίπεδο**.

Ο **συζυγής** του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός που συμβολίζεται $\overline{z}$, και ορίζεται με τον τύπο

$$\boxed{\overline{z} := x - iy.}$$

Τα σημεία z και $\overline{z}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

Το **πραγματικό μέρος** και το **φανταστικό μέρος** του $z = x + iy$ συμβολίζονται, αντιστοίχως, $\operatorname{Re} z$ και $\operatorname{Im} z$, και ορίζονται με τους τύπους

$$\boxed{\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y.}$$

Τέλος, το **μέτρο** ή **απόλυτη τιμή** του $z = x + iy$ συμβολίζεται $|z|$ και ορίζεται με τον τύπο

$$\boxed{|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

Γεωμετρικά, το $|z|$ εκφράζει την απόσταση του σημείου z από το 0 ή, με άλλα λόγια, το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{0z}$.

Φυσικά, στην περίπτωση πραγματικού αριθμού $x = x + i0$, το $|x|$ που μόλις ορίσαμε ισούται με $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2}$ και ταυτίζεται με την ήδη γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού x.

Καταγράφουμε μερικές χρήσιμες σχέσεις:

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2, \quad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2,$$

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0,$$

$$|z|^2 = z\overline{z}, \quad |\overline{z}| = |z|,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Ειδικά την σχέση $|z|^2 = z\overline{z}$ την είδαμε και προηγουμένως στην μορφή $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$, και είδαμε, επίσης, την χρησιμότητά της στους τύπους του αντιστρόφου και της διαίρεσης:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Όλες οι προηγούμενες αλγεβρικές σχέσεις αποδεικνύονται πολύ εύκολα με λίγες πράξεις.

Γράφουμε, επίσης, μερικές χρήσιμες και απλές ανισοτικές σχέσεις:

$$\boxed{|\operatorname{Re} z| \le |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \le |z|, \quad |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.}$$

Κι αυτές αποδεικνύονται εύκολα. Για παράδειγμα, η τρίτη ανισότητα για το $z = x + iy$ γράφεται ισοδύναμα $\sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y|$ και αποδεικνύεται υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο.

Η επόμενη πολύ χρήσιμη ισότητα γενικεύει την γνωστή ισότητα $(x_1+x_2)^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ που ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2.}$$

Την αποδεικνύουμε ως εξής (χρησιμοποιώντας προηγούμενες ιδιότητες):

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2.
\end{aligned}$$

Τέλος, έχουμε την **τριγωνική ανισότητα**:

$$\boxed{|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.}$$

Αυτή μπορεί να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα καθώς και την ανισότητα $\operatorname{Re} z \le |\operatorname{Re} z| \le |z|$, ως εξής:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2.
\end{aligned}$$

Και τώρα διαγράφουμε τα τετράγωνα από την $|z_1 + z_2|^2 \le (|z_1| + |z_2|)^2$.

Λόγω της σχέσης ανάμεσα στους μιγαδικούς αριθμούς και στα σημεία του μιγαδικού επιπέδου, ένα οποιοδήποτε επίπεδο σχήμα το οποίο περιγράφεται με σχέσεις που ικανοποιούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες x, y του σημείου (x, y) μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα με σχέσεις που ικανοποιεί ο αντίστοιχος μιγαδικός $z = x + iy$.

Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η οποιαδήποτε ευθεία στο επίπεδο έχει εξίσωση $ax + by = c$, όπου οι πραγματικοί a, b δεν είναι και οι δύο ίσοι με 0 και ο c είναι οποιοσδήποτε πραγματικός. Αν θέσουμε $z = x + iy$ και $w = a + ib$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι η εξίσωση $ax + by = c$ παίρνει τη μορφή

$$\operatorname{Re}(\overline{w}z) = c,$$

όπου ο (μιγαδικός) w δεν είναι ίσος με 0 (και ο c είναι πραγματικός). Εννοείται ότι τα ημιεπίπεδα που καθορίζονται από τις ανισότητες $ax + by \ge c$ και $ax + by \le c$ περιγράφονται ισοδύναμα από τις αντίστοιχες ανισότητες $\operatorname{Re}(\overline{w}z) \ge c$ και $\operatorname{Re}(\overline{w}z) \le c$.

Η Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$ και $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$ είναι ίση με

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|.$$

Επομένως, ο κύκλος $C(z_0; r)$ με κέντρο το σημείο $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$ και ακτίνα $r > 0$ περιγράφεται με την εξίσωση $|z - z_0| = r$:

$$C(z_0; r) = \{z \mid |z - z_0| = r\}.$$

Φυσικά, ο αντίστοιχος ανοικτός δίσκος $D(z_0;r)$ περιγράφεται με την ανισότητα $|z-z_0|<r$ και ο κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0;r)$ με την $|z-z_0|\leq r$:

$$D(z_0;r)=\{z\,|\,|z-z_0|<r\},\qquad \overline{D}(z_0;r)=\{z\,|\,|z-z_0|\leq r\}.$$

Ασκήσεις.

1.2.1. Κάντε τις πράξεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους τύπους του αντιστρόφου και της διαίρεσης: $\frac{1}{3-i4}$, $\frac{2-i3}{-3+i5}$.

1.2.2. Αν $t\in\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\operatorname{Re}(tz)=t\operatorname{Re}z$ και $\operatorname{Im}(tz)=t\operatorname{Im}z$.

1.2.3. Αποδείξτε ότι $\operatorname{Re}(iz)=-\operatorname{Im}z$, $\operatorname{Im}(iz)=\operatorname{Re}z$.

1.2.4. Αποδείξτε ότι $\operatorname{Re}(z-\overline{z})=0$, $\operatorname{Im}(z+\overline{z})=0$.

1.2.5. Αποδείξτε ότι το z είναι πραγματικό αν και μόνο αν $\overline{z}=z$. Αποδείξτε ότι το z είναι φανταστικό αν και μόνο αν $\overline{z}=-z$.

1.2.6. Ποιές είναι οι λύσεις της εξίσωσης $|z|=z$; Ποιές είναι οι λύσεις της $|z|=iz$;

1.2.7. Έστω $z_1,z_2\neq 0$. Αποδείξτε ότι $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ αν και μόνο αν υπάρχει $t>0$ ώστε $z_2=tz_1$.

1.2.8. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$, αποδείξτε την πιο πλήρη μορφή της:

$$||z_1|-|z_2||\leq|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|.$$

1.2.9. Λύστε την εξίσωση $z^2+z+1=0$, ανάγοντάς την σε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο πραγματικούς αγνώστους.

1.2.10. Αποδείξτε ότι $|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|\leq\sqrt{2}|z|$.

1.2.11. Αν $|z_3|\neq|z_4|$, αποδείξτε ότι $\frac{|z_1+z_2|}{|z_3+z_4|}\leq\frac{|z_1|+|z_2|}{||z_3|-|z_4||}$.

1.2.12. Αν $|z|<1$, αποδείξτε ότι $|\operatorname{Im}(1-\overline{z}+z^2)|<2$.

1.2.13. Ποιά είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή του $|z^4-4z^2+3|$ όταν $|z|=2$; όταν $|z|\leq 2$;

1.2.14. Αποδείξτε ότι $|z\pm w|^2\leq(1+|z|^2)(1+|w|^2)$.

1.2.15. (i) Αποδείξτε ότι $|z-w|=|1-\overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z|=1$ ή $|w|=1$.
(ii) Αποδείξτε ότι $|z-w|<|1-\overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z|,|w|<1$ ή $|z|,|w|>1$.

1.2.16. (i) Αποδείξτε ότι $|z-w|=|z-\overline{w}|$ αν και μόνο αν $\operatorname{Im}z=0$ ή $\operatorname{Im}w=0$.
(ii) Αποδείξτε ότι $|z-w|<|z-\overline{w}|$ αν και μόνο αν $\operatorname{Im}z,\operatorname{Im}w<0$ ή $\operatorname{Im}z,\operatorname{Im}w>0$.

1.2.17. Ποιός είναι ο περιορισμός για το w ώστε η εξίσωση $z+\overline{z}=w$ να έχει λύση; Ίδια ερώτηση για την εξίσωση $z-\overline{z}=w$. Πόσες λύσεις έχουν αυτές οι εξισώσεις αν ικανοποιούνται οι αντίστοιχοι περιορισμοί για το w;

1.2.18. Υπάρχει μια ευθεία l στο μιγαδικό επίπεδο τέτοια ώστε, για κάθε z, τα σημεία $z,\overline{z}$ να είναι συμμετρικά ως προς την l. Ποιά είναι η l;
Ίδια ερώτηση για τα $z,-\overline{z}$, για τα $z,i\overline{z}$, και για τα $z,-i\overline{z}$.

1.2.19. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σύνολα:

$$\{z\,|\,|z|<1,|z-i|<1\},\qquad\{z\,|\,|z|<1,\operatorname{Im}z>0,|z-i|>1\}.$$

1.2.20. Για καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των z που την ικανοποιούν:

$$z+\overline{z}=1, \quad i(z-\overline{z})\leq 2, \quad 2i(\overline{z}-z)+|z|^2+1\leq 0,$$
$$(2-i)z+(2+i)\overline{z}=-2, \quad \mathrm{Re}((1-i)z)\geq 1, \quad |z|+\mathrm{Re}\, z\leq 1.$$

1.2.21. Έστω $z, w \neq 0$. Αποδείξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{0z}$, $\overrightarrow{0w}$ είναι ίσο με $\mathrm{Re}(\overline{w}z)$. Συμπεράνατε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{0z}$, $\overrightarrow{0w}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(\overline{w}z)=0$.

1.2.22. (i) Αν $w\neq 0$, σε ποιό από τα ημιεπίπεδα που περιγράφονται από τις $\mathrm{Re}(\overline{w}z)\leq 0$ και $\mathrm{Re}(\overline{w}z)\geq 0$ ανήκει το w και σε ποιό το $-w$;

(ii) Αν $w\neq 0$, αποδείξτε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{0w}$ είναι κάθετο στην ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Re}(\overline{w}z)=c$. Πώς μεταβάλλεται αυτή η ευθεία όταν το c αυξάνεται στο $(-\infty,+\infty)$;

(iii) Αν $w\neq 0$ και $c_1\leq c_2$, περιγράψτε το σύνολο των z για τα οποία ισχύει $c_1\leq \mathrm{Re}(\overline{w}z)\leq c_2$.

(iv) Αν $w, w'\neq 0$, αποδείξτε ότι οι $\mathrm{Re}(\overline{w}z)=c$, $\mathrm{Re}(\overline{w'}z)=c'$ είναι εξισώσεις της ίδιας ευθείας αν και μόνο αν υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ ώστε $w'=tw$, $c'=tc$.

(v) Αν $w, w'\neq 0$, αποδείξτε ότι οι $\mathrm{Re}(\overline{w}z)=c$, $\mathrm{Re}(\overline{w'}z)=c'$ είναι εξισώσεις παράλληλων ευθειών αν και μόνο αν υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ ώστε $w'=tw$.

1.2.23. Για κάθε $\alpha>0$, περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των z με την ιδιότητα $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=\alpha$. Πώς μεταβάλλεται αυτό το σύνολο όταν το α αυξάνεται στο $(0,+\infty)$; Πώς πρέπει να εννοήσουμε τις "οριακές" περιπτώσεις $\alpha=0$ και $\alpha=+\infty$.

1.2.24. Για κάθε α, περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των z με την ιδιότητα $\mathrm{Re}(z^2)=\alpha$. Πώς μεταβάλλεται αυτό το σύνολο όταν το α αυξάνεται στο $(-\infty,+\infty)$;
Ίδια ερώτηση για τη σχέση $\mathrm{Im}(z^2)=\alpha$.

1.3 Ορίσματα.

Έστω οποιοσδήποτε μιγαδικός $z=x+iy\neq 0$. Θέτοντας

$$r := |z| = \sqrt{x^2+y^2} > 0,$$

έχουμε ότι

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}=1$$

και άρα υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός

$$\theta_0\in(-\pi,\pi]$$

ώστε να ισχύει

$$\cos\theta_0=\frac{x}{r}, \qquad \sin\theta_0=\frac{y}{r}.$$

Τότε το σύνολο των θ που ικανοποιούν τις

$$\cos\theta=\frac{x}{r}, \qquad \sin\theta=\frac{y}{r} \tag{1.1}$$

αποτελείται από τους αριθμούς

$$\theta=\theta_0+2k\pi \qquad \text{με } k\in\mathbb{Z}$$

και μόνο από αυτούς. Το θ_0 ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** ή **πρωτεύουσα γωνία** του z, και κάθε $\theta=\theta_0+2k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$ ονομάζεται **όρισμα** ή **γωνία** του z. Άρα *το z έχει άπειρα ορίσματα, τους όρους μιας αριθμητικής προόδου (δυο κατευθύνσεων) με βήμα 2π. Από τα ορίσματα του z ακριβώς ένα είναι το πρωτεύον όρισμα, εκείνο που περιέχεται στο* $(-\pi,\pi]$. Συμβολίζουμε $\mathrm{Arg}\, z$ το πρωτεύον όρισμα θ_0 του z και $\arg z$ κάθε όρισμα του z:

$$\boxed{\operatorname{Arg} z := \theta_0, \quad \arg z := \theta_0 + 2k\pi = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.}$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε, και ειδικά σε σχέση με την (1.1), αν $z \neq 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε

$$\boxed{\arg z = \theta + 2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).}$$

Η γραφή

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

ονομάζεται **πολική αναπαράσταση** του z. Επομένως, κάθε $z \neq 0$ έχει άπειρες πολικές αναπαραστάσεις με το ίδιο r, το $r = |z|$, αλλά με άπειρα θ.

Το γεωμετρικό νόημα του $\theta_0 = \operatorname{Arg} z$ είναι το εξής. Αν το σημείο z δεν ανήκει στον αρνητικό x-άξονα, τότε το θ_0 είναι το προσημασμένο μέτρο της κυρτής γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{0z}$ με τον θετικό x-άξονα, με θετικό πρόσημο αν το z είναι στο άνω ημιεπίπεδο, και με αρνητικό πρόσημο αν το z είναι στο κάτω ημιεπίπεδο. Αν το z ανήκει στον θετικό x-άξονα, τότε προφανώς $\theta_0 = 0$. Αν το z ανήκει στον αρνητικό x-άξονα, τότε είναι $\theta_0 = \pi$. Με άλλα λόγια, το θ_0 είναι το προσημασμένο μέτρο της κυρτής γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{0z}$ με τον θετικό x-άξονα, με $+$ αν πηγαίνουμε από τον θετικό x-άξονα προς το $\overrightarrow{0z}$ με την θετική φορά περιστροφής (δηλαδή την αντίθετη προς τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού) και με $-$ αν πηγαίνουμε από τον θετικό x-άξονα προς το $\overrightarrow{0z}$ με την αρνητική φορά περιστροφής.
Για κάθε άλλο $\theta = \arg z = \theta_0 + 2k\pi$ ο λόγος

$$\frac{\theta - \theta_0}{2\pi} = k$$

εκφράζει τον αριθμό των επιπλέον πλήρων περιστροφών (γύρω από το σημείο 0) που πρέπει να κάνουμε ώστε να ξαναγυρίσουμε στο διάνυσμα $\overrightarrow{0z}$. Αν οι περιστροφές είναι με την θετική φορά, τότε $k > 0$, ενώ, αν οι περιστροφές είναι με την αρνητική φορά, τότε $k < 0$.

Σχόλιο. Στο $z = 0$ *δεν* αντιστοιχίζουμε όρισμα ούτε πολική αναπαράσταση.

Σχόλιο. Το ότι ονομάζουμε πρωτεύον όρισμα του z το (μοναδικό) $\arg z$ το οποίο περιέχεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ είναι καθαρά ζήτημα παραδοσιακής σύμβασης.
Αν I είναι ένα οποιοδήποτε διάστημα στο $\mathbb{R}$ μήκους 2π το οποίο περιέχει ακριβώς ένα από τα δύο άκρα του, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\theta \in I$ ώστε να ισχύει $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$. Αυτό το θ είναι ένα από τα $\arg z$, και θα μπορούσαμε να ονομάσουμε αυτό το θ πρωτεύον όρισμα του z και να το συμβολίσουμε $\operatorname{Arg} z$. Ένα τέτοιο διάστημα, εκτός του $(-\pi, \pi]$, είναι το $[0, 2\pi)$, και χρησιμοποιείται παραδοσιακά στη θέση του $(-\pi, \pi]$ σε κάποια βιβλία. Εμείς θα επιμείνουμε στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, το οποίο χρησιμοποιείται ευρύτερα τώρα πια στα περισσότερα μαθηματικού περιεχομένου βιβλία και κυρίως σε μεταπτυχιακό επίπεδο.

Παράδειγμα 1.3.1. (i) Κάθε $z = x > 0$ έχει $\operatorname{Arg} z = 0$ και $\arg z = 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) Κάθε $z = x < 0$ έχει $\operatorname{Arg} z = \pi$ και $\arg z = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
(iii) Κάθε $z = iy$ με $y > 0$ έχει $\operatorname{Arg} z = \pi/2$ και $\arg z = \pi/2 + 2k\pi = (2k + 1/2)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
(iv) Κάθε $z = iy$ με $y < 0$ έχει $\operatorname{Arg} z = -\pi/2$ και $\arg z = -\pi/2 + 2k\pi = (2k - 1/2)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
(v) Αν το $z = x + iy$ είναι στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x, y > 0$), τότε το $\operatorname{Arg} z$ είναι στο διάστημα $(0, \pi/2)$.
(vi) Αν το $z = x + iy$ είναι στο δεύτερο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x < 0$, $y > 0$), τότε το $\operatorname{Arg} z$ είναι στο διάστημα $(\pi/2, \pi)$.
(vii) Αν το $z = x + iy$ είναι στο τρίτο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x < 0$, $y < 0$), τότε το $\operatorname{Arg} z$ είναι στο διάστημα $(-\pi, -\pi/2)$.
(viii) Αν το $z = x + iy$ είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x > 0$, $y < 0$), τότε το $\operatorname{Arg} z$ είναι στο διάστημα $(-\pi/2, 0)$.

Παράδειγμα 1.3.2. Ο αριθμός $z = 1 - i$ έχει μέτρο $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Άρα $\frac{z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$, οπότε τα ορίσματα $\arg z$ είναι τα $\theta \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Από αυτά τα θ, στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ ανήκει μόνο το $\theta_0 = -\frac{\pi}{4}$, και άρα

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}, \qquad \arg z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Είναι γεωμετρικά προφανές ότι *δυο μιγαδικοί αριθμοί* $z_1, z_2 \neq 0$ *βρίσκονται πάνω στην ίδια ημιευθεία με κορυφή το* 0 *αν και μόνο αν τα ορίσματά τους* $\arg z_1, \arg z_2$ *ταυτίζονται.*

Από τους γνωστούς τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών βρίσκουμε με λίγες πράξεις ότι

$$\boxed{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2).} \tag{1.2}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\quad + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2).\end{aligned}$$

Με την (1.2) και με την αρχή της επαγωγής αποδεικνύεται (δείτε την άσκηση 1.3.7) ο λεγόμενος **τύπος του de Moivre**:

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.}$$

Τέλος, για κάθε $z_1, z_2 \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.} \tag{1.3}$$

Ας το αποδείξουμε. Αν $\arg z_1 = \theta_1 + 2k_1\pi$ και $\arg z_2 = \theta_2 + 2k_2\pi$, με $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, τότε είναι

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις δύο ισότητες και, χρησιμοποιώντας την (1.2) καθώς και την $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$, παίρνουμε

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Αυτό μας λέει ότι

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Όμως

$$\arg z_1 + \arg z_2 = (\theta_1 + 2k_1\pi) + (\theta_2 + 2k_2\pi) = \theta_1 + \theta_2 + 2(k_1 + k_2)\pi \qquad \text{με } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Τώρα σκεφτόμαστε ότι όταν τα k_1, k_2 διατρέχουν, ανεξάρτητα το ένα με το άλλο, όλες τις ακέραιες τιμές, τότε το $k = k_1 + k_2$ διατρέχει όλες τις ακέραιες τιμές. Άρα συνδυασμένες οι δύο τελευταίες ισότητες λένε ότι $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Σχόλιο. *Δεν είναι σωστό* ότι η ισότητα (1.3) ισχύει με τα πρωτεύοντα ορίσματα. Δηλαδή, δεν είναι σωστό ότι η $\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$ ισχύει για κάθε $z_1, z_2 \neq 0$.
Για παράδειγμα,

$$\mathrm{Arg}((-i)(-i)) = \mathrm{Arg}(-1) = \pi$$

αλλά

$$\mathrm{Arg}(-i) + \mathrm{Arg}(-i) = \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -\pi.$$

Ήδη είπαμε ότι προσθέτουμε γεωμετρικά τους αριθμούς z_1, z_2 ως εξής: προσθέτουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{0z_1}$ και $\overrightarrow{0z_2}$ με τον κανόνα του παραλληλογράμμου, και τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{0z} = \overrightarrow{0z_1} + \overrightarrow{0z_2}$ μας δίνει το $z_1 + z_2 = z$.

Από την ισότητα (1.3) και την ισότητα $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ προκύπτει ο γεωμετρικός τρόπος πολλαπλασιασμού σημείων του μιγαδικού επιπέδου. Αν έχουμε τα μη-μηδενικά σημεία z_1, z_2, τότε το σημείο $z = z_1z_2$ προσδιορίζεται ως εξής: το μήκος του $\overrightarrow{0z}$ ισούται με το γινόμενο των μηκών των $\overrightarrow{0z_1}$ και $\overrightarrow{0z_2}$, και η γωνία του $\overrightarrow{0z}$ (με τον θετικό x-άξονα) ισούται με το άθροισμα των γωνιών των $\overrightarrow{0z_1}$ και $\overrightarrow{0z_2}$.

Ασκήσεις.

1.3.1. Βρείτε τα ορίσματα και το πρωτεύον όρισμα καθενός από τα

$$\pm(\sqrt{3} \pm i), \quad \pm(1 \pm i\sqrt{3}), \quad \pm(1 \pm i).$$

1.3.2. Ας συμβολίσουμε $\Delta(a, b, c)$ το τρίγωνο με κορυφές τους μιγαδικούς a, b, c.
Έστω $z_1, z_2 \neq 0$ και $z_2 \neq 1$. Αποδείξτε ότι $z_1z_2 = z$ αν και μόνο αν το τρίγωνο $\Delta(0, z_1, z)$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $\Delta(0, 1, z_2)$. Πώς ακριβώς πρέπει να εννοήσουμε την ομοιότητα των δύο τριγώνων;

1.3.3. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σημεία z για τα οποία $\arg z = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.

1.3.4. Περιγράψτε γεωμετρικά τα σημεία z για τα οποία $\arg(z^2) = \pi + 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Το ίδιο με $\arg(z^3) = \pi + 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Το ίδιο με $\arg(z^4) = \pi + 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.

1.3.5. Αποδείξτε ότι:

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \begin{cases} \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2, & \text{αν } -\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \leq \pi \\ \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 + 2\pi, & \text{αν } -2\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \leq -\pi \\ \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 - 2\pi, & \text{αν } \pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \leq 2\pi \end{cases}$$

Υπάρχουν άλλες περιπτώσεις για την τιμή του $\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$;

1.3.6. Έστω $z_1, z_2 \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

1.3.7. Χρησιμοποιώντας την (1.2) και την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε τον τύπο του de Moivre για $n \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, αποδείξτε τον τύπο του de Moivre για $n = 0$ και για $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$.

1.3.8. Με τον τύπο του de Moivre αποδείξτε ότι

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \qquad \sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta,$$

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \qquad \sin(4\theta) = 4\cos\theta\sin\theta - 8\cos\theta\sin^3\theta.$$

1.3.9. Βάσει της πολύ χρήσιμης αλγεβρικής ισότητας

$$\boxed{1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \begin{cases} (z^{n+1} - 1)/(z - 1), & \text{αν } z \neq 1 \\ n + 1, & \text{αν } z = 1 \end{cases}}$$

βρείτε τύπους για τα αθροίσματα

$$1 + r\cos\theta + r^2\cos(2\theta) + \cdots + r^n\cos(n\theta), \qquad r\sin\theta + r^2\sin(2\theta) + \cdots + r^n\sin(n\theta)$$

με $r \geq 0$.

1.3.10. Αν ισχύει $\mathrm{Re}(z^n) \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $z \geq 0$.

1.3.11. (i) Αποδείξτε ότι τρία ανά δύο διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3 ανήκουν στην ίδια ευθεία αν και μόνο αν το $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ είναι πραγματικός.
(ii) Αποδείξτε ότι τέσσερα ανά δύο διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 ανήκουν στην ίδια ευθεία ή στον ίδιο κύκλο αν και μόνο αν το $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\,\frac{z_2-z_4}{z_3-z_4}$ είναι πραγματικός.

1.4 Δυνάμεις και ρίζες.

Είναι σαφές ότι η δύναμη z^n με ακέραιο εκθέτη n ορίζεται για μιγαδικό z όπως στην περίπτωση πραγματικού z:

$$z^n := \begin{cases} z\cdots z \ (n \text{ φορές}), & \text{αν } n \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{αν } n = 0 \text{ και } z \neq 0 \\ 1/z^{-n}, & \text{αν } n \in \mathbb{Z}, n < 0 \text{ και } z \neq 0 \end{cases}$$

Φυσικά, όπως στην περίπτωση πραγματικών αριθμών, ισχύουν οι συνηθισμένες αλγεβρικές ιδιότητες των δυνάμεων (και αποδεικνύονται πολύ εύκολα):

$$(z_1z_2)^n = z_1^n z_2^n, \qquad z^{n_1+n_2} = z^{n_1}z^{n_2}, \qquad z^{n_1n_2} = (z^{n_1})^{n_2}.$$

Ειδικά στην περίπτωση μεγάλου n, η δύναμη z^n υπολογίζεται σχετικά εύκολα χρησιμοποιώντας τον τύπο του de Moivre ως εξής. Κατ' αρχάς, η περίπτωση $z = 0$ είναι απλή: $z^n = 0$. Αν $z \neq 0$, τότε γράφουμε μια πολική αναπαράσταση του z:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

οπότε

$$\arg z = \theta + 2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Τότε

$$z^n = |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Άρα

$$|z^n| = |z|^n$$

και

$$\arg(z^n) = n\theta + 2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα 1.4.1. Θα υπολογίσουμε το $(1 + i\sqrt{3})^8$.
Είναι $|1 + i\sqrt{3}| = 2$, οπότε

$$1 + i\sqrt{3} = 2\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 2\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big)\Big).$$

Επομένως

$$(1 + i\sqrt{3})^8 = 2^8\Big(\cos\Big(\frac{8\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{8\pi}{3}\Big)\Big).$$

Επειδή $\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$, βρίσκουμε ότι

$$(1 + i\sqrt{3})^8 = 2^8\Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi}{3}\Big)\Big) = 256\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = -128 + i128\sqrt{3}.$$

Και, επειδή $-\pi < \frac{2\pi}{3} \le \pi$, έχουμε ότι

$$\mathrm{Arg}((1+i\sqrt{3})^8) = \frac{2\pi}{3}, \qquad \arg((1+i\sqrt{3})^8) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Τώρα θα δούμε το ζήτημα των ριζών μιγαδικών αριθμών. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ με $n \ge 2$, και την εξίσωση

$$z^n = w$$

όπου το w είναι δοσμένο και το z είναι άγνωστο.

Κατ' αρχάς, αν $w = 0$, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι το $z = 0$, οπότε θα γράφουμε

$$0^{1/n} = 0$$

και θα λέμε ότι η **n-οστή ρίζα** του 0 είναι το 0.

Έστω $w \neq 0$. Τότε γράφουμε μια πολική αναπαράσταση του γνωστού w και μια πολική αναπαράσταση του άγνωστου z:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi),$$

όπου θ είναι οποιοδήποτε από τα $\arg z$, και ϕ είναι οποιοδήποτε από τα $\arg w$. Έτσι η εξίσωση $z^n = w$ γράφεται ισοδύναμα

$$|z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = |w|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Από εδώ παίρνουμε το ισοδύναμο

$$|z|^n = |w|, \qquad n\theta = \phi + 2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

δηλαδή το

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}, \quad \theta = \frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Σχόλιο. Γράψαμε $\sqrt[n]{|w|}$ την n-οστή ρίζα του μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού $|w|$. Γενικότερα, από τώρα και στο εξής θα συμβολίζουμε με $\sqrt[n]{r}$ την γνωστή μας από τον Απειροστικό Λογισμό n-οστή ρίζα του $r \ge 0$, η οποία είναι κι αυτή μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Άρα, για κάθε $w \neq 0$, η εξίσωση $z^n = w$ έχει τις λύσεις

$$z = \sqrt[n]{|w|}\Big(\cos\Big(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big)\Big) \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Από αυτό το συμπέρασμα φαίνεται ότι η εξίσωση $z^n = w$ έχει άπειρες λύσεις ως προς z (διότι το $k \in \mathbb{Z}$ έχει άπειρες τιμές) αλλά αυτό δεν είναι σωστό: θα δούμε ότι η τελευταία παράσταση η οποία μας δίνει το z έχει ακριβώς n διαφορετικές τιμές. Πράγματι, αν k', k'' είναι δύο οποιεσδήποτε τιμές του $k \in \mathbb{Z}$, τότε η ισότητα

$$\cos\Big(\frac{\phi}{n} + k'\frac{2\pi}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\phi}{n} + k'\frac{2\pi}{n}\Big) = \cos\Big(\frac{\phi}{n} + k''\frac{2\pi}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\phi}{n} + k''\frac{2\pi}{n}\Big)$$

ισοδυναμεί με την

$$\frac{\phi}{n} + k'\frac{2\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + k''\frac{2\pi}{n} + 2m\pi \qquad \text{με } m \in \mathbb{Z}$$

κι αυτή ισοδυναμεί με

$$k' = k'' + mn \qquad \text{με } m \in \mathbb{Z}$$

δηλαδή με το ότι

το $k' - k''$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του n.

Τώρα σκεφτόμαστε ότι οι ακέραιοι $0, 1, \ldots, n-1$ έχουν την εξής διπλή ιδιότητα: αφ' ενός δύο οποιοιδήποτε από αυτούς *δεν* διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του n, αφ' ετέρου κάθε άλλος ακέραιος διαφέρει από έναν από αυτούς κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του n. Συμπεραίνουμε ότι οι τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ που δίνουν διαφορετικές ανά δύο τιμές της λύσης z (όπως αυτή δίνεται από τον τύπο (1.4)) της εξίσωσης $z^n = w$ είναι ακριβώς οι $0, 1, \ldots, n-1$, και οι αντίστοιχες διαφορετικές ανά δύο τιμές του z είναι οι

$$z = \sqrt[n]{|w|}\Big(\cos\Big(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big)\Big) \quad \text{με } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.5}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η εξίσωση $z^n = w$, με $w \neq 0$, έχει ακριβώς n λύσεις, οι οποίες δίνονται από τον τύπο (1.5). Τις λύσεις αυτές τις αποκαλούμε με το κοινό για όλες όνομα **n-οστή ρίζα** του w και τις συμβολίζουμε $w^{1/n}$. Δηλαδή

$$\boxed{w^{1/n} := \sqrt[n]{|w|}\Big(\cos\Big(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big)\Big) \quad \text{με } k = 0, 1, \ldots, n-1.} \tag{1.6}$$

όπου ϕ είναι οποιοδήποτε από τα $\arg w$. Με άλλα λόγια, όταν $w \neq 0$, τότε υπάρχουν n διαφορετικά $w^{1/n}$, αυτά που δίνονται από τον τύπο (1.6).

Είναι φανερό από την (1.6) ότι όλα τα $w^{1/n}$ έχουν το ίδιο μέτρο $\sqrt[n]{|w|}$, και ότι, όταν το k διατρέχει τους αριθμούς $0, 1, \ldots, n-1$ διαδοχικά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, τότε καθένα από τα $w^{1/n}$ από το δεύτερο και πέρα προκύπτει από το προηγούμενό του με στροφή κατά γωνία $\frac{2\pi}{n}$, και το πρώτο προκύπτει από το τελευταίο πάλι με στροφή κατά γωνία $\frac{2\pi}{n}$. Άρα στο μιγαδικό επίπεδο τα $w^{1/n}$ είναι οι κορυφές ενός κανονικού n-γώνου και βρίσκονται πάνω στον κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα $\sqrt[n]{|w|}$.

Παράδειγμα 1.4.2. Τα $1^{1/n}$, δηλαδή οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = 1$, ονομάζονται **n-οστές ρίζες της μονάδας**. Ένα από τα $\arg 1$ είναι το $\phi = \operatorname{Arg} 1 = 0$, οπότε οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι οι μιγαδικοί

$$\cos\Big(k\frac{2\pi}{n}\Big) + i\sin\Big(k\frac{2\pi}{n}\Big) = \Big(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\Big)^k \qquad \text{με } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Με $k = 0$ παίρνουμε την τετριμμένη n-οστή ρίζα 1. Η πρώτη μη-τετριμμένη από αυτές τις n-οστές ρίζες συμβολίζεται ω_n και προκύπτει όταν $k = 1$:

$$\boxed{\omega_n := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}}$$

Αυτή ονομάζεται **πρωτεύουσα n-οστή ρίζα της μονάδας**. Προφανώς, όλες οι άλλες προκύπτουν από αυτήν ως εξής:

$$\omega_n^k \qquad \text{με } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}.$$

Βάσει του τελευταίου παραδείγματος και χρησιμοποιώντας τους τύπους (1.2) και (1.6), βλέπουμε ότι οι n-οστές ρίζες του γενικού $w \neq 0$ γράφονται

$$z_0, z_0\omega_n, z_0\omega_n^2, \ldots, z_0\omega_n^{n-1},$$

όπου $z_0 = \sqrt[n]{|w|}(\cos\frac{\phi}{n} + i\sin\frac{\phi}{n})$.

Ασκήσεις.

1.4.1. Υπολογίστε τις δυνάμεις: $(1+i)^{15}$, $(1+i)^{20}$, $(1-i)^{13}$.

1.4.2. Ποιές είναι οι τιμές που παίρνει το i^n όταν το n διατρέχει το $\mathbb{Z}$;
Ίδια ερώτηση για το $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, καθώς και για το $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

1.4.3. Υπολογίστε τις ρίζες: $(-1)^{1/2}$, $(-1)^{1/3}$, $(-1)^{1/4}$, $i^{1/2}$, $i^{1/3}$, $i^{1/4}$.

1.4.4. Λύστε την $z^2 = w$ (με γνωστό w και άγνωστο z) χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές μορφές των z, w. Δηλαδή, με δοσμένα $u, v \in \mathbb{R}$, λύστε την

$$(x + iy)^2 = u + iv$$

ως προς τα $x, y \in \mathbb{R}$ (συναρτήσει των u, v).

1.5 Εκθετικό.

Το **εκθετικό** του $z = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$, συμβολίζεται e^z, και ορίζεται με τον τύπο

$$\boxed{e^z := e^x(\cos y + i \sin y)}$$

Αν $z \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν $z = x + i0$, τότε $e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$. Επομένως δεν υπάρχει κίνδυνος αντίφασης ανάμεσα στο σύμβολο e^z όπως το ορίσαμε μόλις τώρα και στο σύμβολο e^z όπως το έχουμε ορίσει στον Απειροστικό Λογισμό στην περίπτωση που το z είναι πραγματικό.

Παράδειγμα 1.5.1. Γνωρίζουμε καλά ότι το εκθετικό ενός πραγματικού αριθμού, δηλαδή το e^x, έχει πάντοτε θετική τιμή. Αυτό *δεν* ισχύει για το e^z όταν το z είναι γενικά μιγαδικό. Π.χ.

$$e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0(\cos \pi + i \sin \pi) = -1,$$
$$e^{i\pi/2} = e^{0+i\pi/2} = e^0(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)) = i.$$

Ας δούμε μερικές ιδιότητες των εκθετικών. Αν $z = x + iy$, τότε

$$|e^z| = |e^x||\cos y + i \sin y| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x,$$

δηλαδή

$$\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}.}$$

Επίσης,

$$\arg(e^z) = y + 2k\pi \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z},$$

δηλαδή

$$\boxed{\arg(e^z) = \operatorname{Im} z + 2k\pi \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}.}$$

Από το ότι για $z = x + iy$ ισχύει $|e^z| = e^x > 0$ συμπεραίνουμε ότι *το εκθετικό e^z δεν παίρνει ποτέ την τιμή* 0.

Έχουμε ακόμη ότι

$$\overline{e^z} = \overline{e^x}\,\overline{(\cos y + i \sin y)} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^x(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^{x+i(-y)} = e^{\overline{z}},$$

οπότε

$$\boxed{\overline{e^z} = e^{\overline{z}}}$$

Μια βασική ιδιότητα του e^z είναι η εξής. Αν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε, βάσει των ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{R}$ και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1+z_2}, \end{aligned}$$

διότι $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. Άρα

$$\boxed{e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα παίρνουμε ότι

$$e^{z_1-z_2}e^{z_2} = e^{(z_1-z_2)+z_2} = e^{z_1}$$

και άρα

$$\boxed{\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.}$$

Μια άλλη βασική ιδιότητα είναι η εξής.

$$\boxed{e^{z_2} = e^{z_1} \quad \Leftrightarrow \quad z_2 - z_1 = i2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.}$$

Πράγματι, αν $z_2 - z_1 = i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$e^{z_2} = e^{z_1}e^{i2k\pi} = e^{z_1}(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)) = e^{z_1}.$$

Αντιστρόφως, έστω $e^{z_2} = e^{z_1}$ και $z_2 - z_1 = x + iy$. Τότε

$$e^x(\cos y + i\sin y) = e^{z_2-z_1} = \frac{e^{z_2}}{e^{z_1}} = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

και, επομένως, $x = 0$ και $y = 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Άρα $z_2 - z_1 = i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Μια χρήσιμη παρατήρηση είναι η εξής. Χρησιμοποιώντας το εκθετικό, μπορούμε να γράψουμε με συνοπτικότερο τρόπο οποιαδήποτε πολική αναπαράσταση ενός $z \neq 0$:

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}.}$$

Η παράσταση $|z|e^{i\theta}$ είναι η λεγόμενη *εκθετική μορφή* της πολικής αναπαράστασης του z.

Τέλος, ας παρατηρήσουμε ότι ο τύπος (1.6) που μας δίνει τις n-οστές ρίζες του $w \neq 0$ γράφεται αρκετά πιο συνοπτικά ως εξής:

$$\boxed{w^{1/n} = \sqrt[n]{|w|}e^{i(\frac{\phi}{n}+k\frac{2\pi}{n})} \quad \text{με } k = 0, 1, \ldots, n-1.} \tag{1.7}$$

όπου ϕ είναι οποιοδήποτε $\arg w$, δηλαδή $w = |w|e^{i\phi}$. Έτσι βρίσκουμε τις εκθετικές μορφές των πολικών αναπαραστάσεων των ριζών $w^{1/n}$ από την εκθετική μορφή της πολικής αναπαράστασης του w.

Ασκήσεις.

1.5.1. Περιγράψτε γεωμετρικά την κίνηση του σημείου $e^{i\theta}$ όταν το μεταβλητό θ αυξάνεται σε ένα διάστημα $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. Το ίδιο όταν το θ αυξάνεται στο $(-\infty, +\infty)$.

1.5.2. Αποδείξτε ότι ισχύει $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$ για κάθε z.

1.5.3. Ορίζουμε τις τριγωνομετρικές παραστάσεις

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

(i) Αποδείξτε ότι οι παραστάσεις αυτές αποτελούν επεκτάσεις στο $\mathbb{C}$ των γνωστών τριγωνομετρικών παραστάσεων στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους;

(ii) Αποδείξτε τις σχέσεις

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z + w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w, \quad \cos(z + w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w,$$

$$|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y, \quad |\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

(Θυμόμαστε ότι οι τύποι $\cosh t := \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ και $\sinh t := \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ ορίζουν το *υπερβολικό συνημίτονο* και το *υπερβολικό ημίτονο* του $t \in \mathbb{R}$.)

1.6 Λογάριθμοι.

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι ο αριθμός 0 δεν είναι τιμή του εκθετικού, διότι για κάθε $z = x + iy$ είναι $|e^z| = e^x > 0$. Από την άλλη μεριά, κάθε $w \neq 0$ είναι τιμή του εκθετικού e^z για κατάλληλα z. Αυτό θα το αποδείξουμε λύνοντας την

$$e^z = w$$

ως προς z, και αυτό θα γίνει θεωρώντας οποιαδήποτε πολική αναπαράσταση

$$w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

του w και γράφοντας $z = x + iy$. Τότε η ισότητα $e^z = w$ γράφεται ισοδύναμα

$$e^x(\cos y + i\sin y) = |w|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Αυτή ισοδυναμεί με

$$e^x = |w|, \qquad y = \theta + 2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

και αυτή ισοδυναμεί με

$$x = \ln|w|, \qquad y = \theta + 2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z},$$

όπου με $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συμβολίζουμε τη γνωστή από τον Απειροστικό Λογισμό λογαριθμική συνάρτηση στο $(0, +\infty)$. Άρα, για κάθε $w \neq 0$, η εξίσωση $e^z = w$ έχει τις άπειρες λύσεις

$$z = \ln|w| + i(\theta + 2k\pi) \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

ή, ισοδύναμα,

$$z = \ln|w| + i\arg w.$$

Συνοψίζουμε:

$$\boxed{e^z = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \ln|w| + i\arg w.}$$

Τις άπειρες λύσεις $z = \ln|w| + i\arg w$ της εξίσωσης $e^z = w$ (για $w \neq 0$) τις αποκαλούμε με το κοινό για όλες όνομα **λογάριθμος** του w, και τις συμβολίζουμε $\log w$. Δηλαδή

$$\boxed{\log w := \ln|w| + i\arg w = \ln|w| + i(\theta + 2k\pi) \quad \text{με } k \in \mathbb{Z},} \tag{1.8}$$

όπου $\arg w = \theta + 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως:

$$\boxed{e^z = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \log w.}$$

Επειδή τα άπειρα $\arg w$ ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, συνεπάγεται ότι τα άπειρα $\log w$ ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $i2\pi$. Όλα αυτά τα $\log w$ έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος $\ln|w|$ και επομένως βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφη ευθεία. Βρίσκουμε όλα τα $\log w$ αν βρούμε ένα από αυτά: όλα τα άλλα προκύπτουν από αυτό που βρήκαμε πηγαίνοντας προς τα πάνω και προς τα κάτω κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

Αν ως $\arg w$ επιλέξουμε το $\theta = \operatorname{Arg} w$, δηλαδή εκείνο το $\arg w$ που περιέχεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, τότε το αντίστοιχο $\log w$ ονομάζεται **πρωτεύων λογάριθμος** του w, και συμβολίζεται $\operatorname{Log} w$. Δηλαδή

$$\boxed{\operatorname{Log} w := \ln|w| + i\operatorname{Arg} w.} \tag{1.9}$$

Συνδυάζοντας την (1.8), με $\theta = \operatorname{Arg} w$, και την (1.9), βρίσκουμε

$$\boxed{\log w = \ln|w| + i(\operatorname{Arg} w + 2k\pi) = \operatorname{Log} w + i2k\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.}$$

Παράδειγμα 1.6.1. $\log 1 = \ln|1| + i(0 + 2k\pi) = i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, και $\mathrm{Log}\, 1 = \ln|1| + i0 = 0$.
$\log(-1) = \ln|-1| + i(\pi + 2k\pi) = i(2k+1)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, και $\mathrm{Log}(-1) = \ln|-1| + i\pi = i\pi$.
$\log i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(2k + \frac{1}{2})\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, και $\mathrm{Log}\, i = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$.
$\log(-i) = \ln|-i| + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(2k - \frac{1}{2})\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, και $\mathrm{Log}(-i) = \ln|-i| + i(-\frac{\pi}{2}) = -i\frac{\pi}{2}$.

Για κάθε $w_1, w_2 \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2.}$$

Η απόδειξη βασίζεται στην αντίστοιχη ιδιότητα της συνάρτησης ln στο $(0, +\infty)$ και στην (1.3):

$$\log(w_1 w_2) = \ln|w_1 w_2| + i\arg(w_1 w_2) = \ln|w_1| + \ln|w_2| + i\arg w_1 + i\arg w_2 = \log w_1 + \log w_2.$$

Ασκήσεις.

1.6.1. Βρείτε τους λογαρίθμους και τον πρωτεύοντα λογάριθμο καθενός από τα

$$\pm(\sqrt{3} \pm i), \quad \pm(1 \pm i\sqrt{3}), \quad \pm(1 \pm i).$$

1.6.2. (i) Αποδείξτε ότι για κάθε $w \neq 0$ ισχύει $e^{\log w} = w$.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε z ισχύει $\log(e^z) = z + i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.

1.6.3. Δείτε την άσκηση 1.3.5 και αποδείξτε ότι:

$$\mathrm{Log}(w_1 w_2) = \begin{cases} \mathrm{Log}\, w_1 + \mathrm{Log}\, w_2, & \text{αν } -\pi < \mathrm{Arg}\, w_1 + \mathrm{Arg}\, w_2 \leq \pi \\ \mathrm{Log}\, w_1 + \mathrm{Log}\, w_2 + 2\pi i, & \text{αν } -2\pi < \mathrm{Arg}\, w_1 + \mathrm{Arg}\, w_2 \leq -\pi \\ \mathrm{Log}\, w_1 + \mathrm{Log}\, w_2 - 2\pi i, & \text{αν } \pi < \mathrm{Arg}\, w_1 + \mathrm{Arg}\, w_2 \leq 2\pi \end{cases}$$

Υπάρχουν άλλες περιπτώσεις για την τιμή του $\mathrm{Log}\, w_1 + \mathrm{Log}\, w_2$;

1.6.4. (i) Βρείτε τις τιμές των $\log(i^{1/2})$ και $\frac{1}{2}\log i$, και παρατηρήστε ότι $\log(i^{1/2}) = \frac{1}{2}\log i$.
(ii) Βρείτε τις τιμές των $\log(i^2)$ και $2\log i$, και παρατηρήστε ότι $\log(i^2) \neq 2\log i$.
(iii) Γενικεύοντας το (i), αποδείξτε ότι για κάθε $w \neq 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\log(w^{1/n}) = \frac{1}{n}\log w$.

1.6.5. Έστω $w \neq 0$. Αποδείξτε ότι η παράσταση $e^{\frac{1}{n}\log w}$ δίνει ακριβώς τις n-οστές ρίζες του w.

1.6.6. (i) Έστω $w \neq 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $w^a = e^{a\log w}$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ και για κάθε $a \in \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$.
(ii) Επεκτείνοντας το αποτέλεσμα του (i), ορίζουμε

$$w^a := e^{a\log w}$$

για κάθε $w \neq 0$ και κάθε a.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία τοπολογίας του $\mathbb{C}$.

2.1 Βασικές έννοιες.

Υπενθυμίζουμε ότι η Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι ίση με

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Επίσης, ο κύκλος $C(z; r)$ με κέντρο το σημείο z και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο

$$C(z; r) = \{w \,|\, |w - z| = r\},$$

και οι αντίστοιχοι ανοικτός δίσκος $D(z; r)$ και κλειστός δίσκος $\overline{D}(z; r)$ είναι τα σύνολα

$$D(z; r) = \{w \,|\, |w - z| < r\}, \quad \overline{D}(z; r) = \{w \,|\, |w - z| \leq r\}.$$

Οι βασικές ιδιότητες της Ευκλείδειας απόστασης είναι οι εξής:

1. $|z_1 - z_2| \geq 0$.
2. $|z_1 - z_2| = 0$ αν και μόνο αν $z_1 = z_2$.
3. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$.
4. $|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$.

Οι τρεις πρώτες ιδιότητες αποδεικνύονται πολύ εύκολα. Η τέταρτη προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα $|z + w| \leq |z| + |w|$ αν στη θέση των z και w βάλουμε τα $z_1 - z_2$ και $z_2 - z_3$.

Αν κάποιος έχει μια βασική εξοικείωση με την έννοια του μετρικού χώρου, καταλαβαίνει ότι το σύνολο $\mathbb{C}$ εφοδιασμένο με την συνάρτηση, η οποία σε κάθε ζευγάρι σημείων του $\mathbb{C}$ αντιστοιχίζει την Ευκλείδεια απόστασή τους, αποτελεί έναν *μετρικό χώρο*. Θα καταλάβει επίσης ότι πολλές από τις έννοιες που θα αναπτύξουμε παρακάτω (π.χ. περιοχή, ανοικτό σύνολο, κλειστό σύνολο, συμπαγές σύνολο) εντάσσονται στο γενικότερο πλαίσιο των μετρικών χώρων. Πάντως, στο μάθημα αυτό δεν θα απαιτηθεί η προηγούμενη γνώση των μετρικών χώρων. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι κάποια εξοικείωση με αυτές τις έννοιες δεν θα βοηθήσει στην ευκολότερη κατανόηση.

Ο ανοικτός δίσκος $D(z; r)$ ονομάζεται και **r-περιοχή** του z.

Σε ολόκληρο το μάθημα κάθε σύνολο που θα μελετάμε θα είναι υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$.

Ορισμός. *Το σύνολο A χαρακτηρίζεται* **φραγμένο** *αν περιέχεται σε κάποιον δίσκο με κέντρο το* 0.

Δηλαδή το A είναι φραγμένο αν υπάρχει κάποιο $R > 0$ ώστε να είναι $A \subseteq \overline{D}(0; R)$ ή, ισοδύναμα, ώστε για κάθε $z \in A$ να ισχύει $|z| \leq R$.

Παράδειγμα 2.1.1. Ένας δίσκος $\overline{D}(z_0; r_0)$ είναι φραγμένο σύνολο. Το ίδιο κι ένα ορθ. παραλληλόγραμμο $\{x+iy \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.
Μία ευθεία $\{z \,|\, \text{Re}(\overline{w}z) = c\}$ και τα ημιεπίπεδα $\{z \,|\, \text{Re}(\overline{w}z) \geq c\}$ και $\{z \,|\, \text{Re}(\overline{w}z) \leq c\}$ δεν είναι φραγμένα σύνολα.

Για κάθε σύνολο A, με A^c συμβολίζουμε το συμπλήρωμα $\mathbb{C} \setminus A$ του A σε σχέση με το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

Ορισμός. *(i) Το z χαρακτηρίζεται* **εσωτερικό σημείο** *του συνόλου A αν κάποια περιοχή του z (δηλαδή κάποιος ανοικτός δίσκος με κέντρο z) περιέχεται ολόκληρη στο A.*

(ii) Το z χαρακτηρίζεται **εξωτερικό σημείο** *του συνόλου A αν κάποια περιοχή του z περιέχεται ολόκληρη στο A^c.*

(iii) Το z χαρακτηρίζεται **συνοριακό σημείο** *του συνόλου A αν κάθε περιοχή του z περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A και τουλάχιστον ένα σημείο του A^c.*

(iv) Το z χαρακτηρίζεται **οριακό σημείο** *του συνόλου A αν κάθε περιοχή του z περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A.*

Από τον ορισμό, τα (i-v) που ακολουθούν πρέπει να είναι απολύτως σαφή. Φροντίστε να τα κατανοήσετε (και να τα εξηγήσετε) καθαρά διανοητικά, και όλα τα επόμενα θα σας φανούν πολύ απλά.

(i) *Τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c.*

(ii) *Τα συνοριακά σημεία του A δεν είναι ούτε εσωτερικά ούτε εξωτερικά σημεία του A και, επίσης, κάθε σημείο ανήκει σε μια από τις τρεις κατηγορίες σημείων: εσωτερικό σημείο, εξωτερικό σημείο, συνοριακό σημείο του A. Άρα το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ χωρίζεται σε τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα: τα σύνολα των εσωτερικών, των εξωτερικών και των συνοριακών σημείων του A.*

(iii) *Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εσωτερικά σημεία του A^c. Τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εξωτερικά σημεία του A^c. Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.*

(iv) *Αφού τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c, τότε πού ανήκουν άραγε τα συνοριακά σημεία του A; Αυτό εξαρτάται από το ποιό κάθε φορά είναι το σύνολο A: κάποια από τα συνοριακά σημεία (μπορεί όλα, μπορεί κανένα) ανήκουν στο A και τα υπόλοιπα (μπορεί κανένα, μπορεί όλα) ανήκουν στο A^c.*

(v) *Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά και τα συνοριακά σημεία του A. Επίσης, κανένα εξωτερικό σημείο του A δεν είναι οριακό σημείο του A.*

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω A ο ανοικτός δίσκος $D(z_0; r_0)$ μαζί με κάποια (μπορεί όλα, μπορεί κανένα) σημεία του κύκλου $C(z_0; r_0)$, για παράδειγμα μαζί με τα σημεία ενός οποιουδήποτε τόξου του κύκλου.
Τότε τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του ανοικτού δίσκου $D(z_0; r_0)$, τα συνοριακά σημεία του A είναι τα σημεία του κύκλου $C(z_0; r_0)$, και τα οριακά σημεία του A είναι τα σημεία του ανοικτού δίσκου και τα σημεία του κύκλου, δηλαδή τα σημεία του κλειστού δίσκου $\overline{D}(z_0; r_0)$. Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του $\{z \,|\, |z - z_0| > r_0\}$.

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω A το ανοικτό ημιεπίπεδο $\{z \,|\, \text{Re}(\overline{w}z) > c\}$ μαζί με κάποια (μπορεί όλα, μπορεί κανένα) από τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $\text{Re}(\overline{w}z) = c$.
Τότε τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του ανοικτού ημιεπιπέδου $\{z \,|\, \text{Re}(\overline{w}z) > c\}$, τα συνοριακά σημεία του A είναι τα σημεία της ευθείας $\{z \,|\, \text{Re}(\overline{w}z) = c\}$, και τα οριακά σημεία του A είναι τα σημεία του κλειστού ημιεπιπέδου $\{z \,|\, \text{Re}(\overline{w}z) \geq c\}$. Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του ανοικτού ημιεπιπέδου $\{z \,|\, \text{Re}(\overline{w}z) < c\}$.

Παράδειγμα 2.1.4. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως A το σύνολο των σημείων που βρίσκονται από τη μία μεριά μιας απλής καμπύλης ή το σύνολο των σημείων που βρίσκονται ανάμεσα σε κάποιες

απλές καμπύλες. Για παράδειγμα, το A μπορεί να είναι ένας ανοικτός δίσκος ή ένα ανοικτό ημιεπίπεδο (όπως στα προηγούμενα δύο παραδείγματα) ή ένα ανοικτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\{x+iy \,|\, a < x < b, c < y < d\}$ ή ένας ανοικτός δακτύλιος $\{z \,|\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Μπορούμε, επίσης, να συμπεριλάβουμε στο A κάποια (μπορεί όλα, μπορεί κανένα) από τα σημεία των συνοριακών καμπυλών που καθορίζουν το A.
Τότε τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του A που δεν ανήκουν στις συνοριακές καμπύλες του, τα συνοριακά σημεία του είναι τα σημεία των συνοριακών καμπυλών του, και τα οριακά σημεία του A είναι τα σημεία του A και τα σημεία των συνοριακών καμπυλών του. Τα εξωτερικά σημεία του A είναι όλα τα υπόλοιπα σημεία, δηλαδή εκείνα που είναι εκτός του A και δεν ανήκουν σε καμία από τις συνοριακές καμπύλες του.

Ορισμός. *(i) Το σύνολο A χαρακτηρίζεται* **ανοικτό** *αν αποτελείται μόνο από τα εσωτερικά του σημεία.*
(ii) Το σύνολο A χαρακτηρίζεται **κλειστό** *αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.*

Πρόταση 2.1. *(i) Το σύνολο A είναι ανοικτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.*
(ii) Το σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.

Απόδειξη. (i) Κάθε σύνολο A περιέχει τα εσωτερικά του σημεία και πιθανόν κάποια από τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.
(ii) Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά του σημεία, τα οποία ούτως ή άλλως περιέχονται στο A, και τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία. □

Βλέπουμε λοιπόν ότι τα αν ένα σύνολο είναι ανοικτό ή κλειστό καθορίζεται από το αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο ή περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία. Επομένως, αν ένα σύνολο περιέχει κάποια αλλά όχι όλα τα συνοριακά του σημεία, τότε το σύνολο δεν είναι ανοικτό ούτε κλειστό.

Παράδειγμα 2.1.5. Ένας ανοικτός δίσκος $D(z_0; r_0)$ είναι ανοικτό σύνολο, και ένας κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0; r_0)$ είναι κλειστό σύνολο.
Ένα ανοικτό ημιεπίπεδο $\{z \,|\, \mathrm{Re}(\overline{w}z) > c\}$ είναι ανοικτό σύνολο, και ένα κλειστό ημιεπίπεδο $\{z \,|\, \mathrm{Re}(\overline{w}z) \geq c\}$ είναι κλειστό σύνολο.
Ένα ανοικτό ορθ. παραλληλόγραμμο $\{x + iy \,|a < x < b, c < y < d\}$ είναι ανοικτό σύνολο, και ένα κλειστό ορθ. παραλληλόγραμμο $\{x + iy \,|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ είναι κλειστό σύνολο. Ένα ορθ. παραλληλόγραμμο $\{x + iy \,|a < x \leq b, c < y \leq d\}$ δεν είναι ανοικτό ούτε κλειστό σύνολο.
Ένας ανοικτός δακτύλιος $\{z \,|\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ είναι ανοικτό σύνολο, και ένας κλειστός δακτύλιος $\{z \,|\, r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$ είναι κλειστό σύνολο. Ένας δακτύλιος $\{z \,|\, r_1 \leq |z - z_0| < r_2\}$ δεν είναι ανοικτό ούτε κλειστό σύνολο.

Πρόταση 2.2. *Ένα σύνολο είναι κλειστό αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Το A είναι κλειστό *αν και μόνο αν* το A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του A *αν και μόνο αν* το A^c δεν περιέχει κανένα οριακό σημείο του A *αν και μόνο αν* το A^c περιέχει μόνο εξωτερικά σημεία του A *αν και μόνο αν* το A^c περιέχει μόνο εσωτερικά σημεία του A^c *αν και μόνο αν* το A^c είναι ανοικτό. □

Ασκήσεις.

2.1.1. Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε γεωμετρικά τα παρακάτω:
(i) Το $\mathbb{C}$ και το $\emptyset$ είναι ανοικτά και κλειστά σύνολα.

(ii) Οι ανοικτοί δίσκοι, τα ανοικτά τρίγωνα, τα ανοικτά παραλληλόγραμμα, οι ανοικτοί δακτύλιοι και τα ανοικτά ημιεπίπεδα είναι ανοικτά σύνολα.
(iii) Τα πεπερασμένα σύνολα $\{z_1, \dots, z_n\}$, οι ευθείες, τα ευθύγραμμα τμήματα (με τα άκρα τους), οι πολυγωνικές γραμμές (με τα άκρα τους), οι κλειστοί δίσκοι, οι κύκλοι, τα κλειστά τρίγωνα, τα κλειστά παραλληλόγραμμα, οι κλειστοί δακτύλιοι και τα κλειστά ημιεπίπεδα είναι κλειστά σύνολα.
Μπορείτε να τα αποδείξετε με αναλυτικό τρόπο;

2.1.2. (i) Είναι το ανοικτό διάστημα $(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < z < 1\}$ ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$; Βρείτε τα εσωτερικά σημεία, τα συνοριακά σημεία, τα εξωτερικά σημεία, και τα οριακά σημεία του $(0,1)$.
(ii) Ομοίως για το κλειστό διάστημα $[0,1] = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \le z \le 1\}$.
(iii) Ομοίως για το σύνολο $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.
(iv) Ομοίως για το σύνολο $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.
(v) Ομοίως για το σύνολο $\{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$.
(vi) Ομοίως για το σύνολο $\left\{\frac{1}{n} + iy \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, 0 \le y \le 1\right\}$.
(vii) Ομοίως για το σύνολο $\left\{\frac{1}{n} + iy \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, 0 \le y \le 1\right\} \cup \{iy \,|\, 0 \le y \le 1\}$.

2.1.3. Ορίζουμε την **διάμετρο** ενός μη-κενού συνόλου A, και την συμβολίζουμε $\operatorname{diam} A$, με τον τύπο

$$\operatorname{diam} A := \sup\{|z_1 - z_2| \,|\, z_1, z_2 \in A\}.$$

(i) Ποιά είναι η διάμετρος ενός κλειστού δίσκου $\overline{D}(z_0; r_0)$; Ποιά είναι η διάμετρος ενός ανοικτού δίσκου $D(z_0; r_0)$; Ποιά είναι η διάμετρος ενός τριγώνου $\Delta(a, b, c)$ (με κορυφές τα σημεία a, b, c);
(ii) Αν $A \subseteq B$, αποδείξτε ότι $\operatorname{diam} A \le \operatorname{diam} B$.
(iii) Αποδείξτε ότι το σύνολο A είναι φραγμένο αν και μόνο αν $\operatorname{diam} A < +\infty$.

2.1.4. (i) Αποδείξτε ότι η ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο, και ότι η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.
(ii) Αποδείξτε ότι η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, και ότι η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

2.1.5. Έστω σύνολο A και έστω $\overline{A} = A \cup \{z \,|\, z$ είναι συνοριακό σημείο του $A\}$. Αποδείξτε ότι το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το A. Αποδείξτε ότι, αν το A είναι φραγμένο, τότε και το $\overline{A}$ είναι φραγμένο.

2.2 Το σημείο ∞.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ επισυνάπτουμε ένα ακόμη στοιχείο, όχι μιγαδικό αριθμό, το οποίο ονομάζουμε **άπειρο**, και το συμβολίζουμε

$$\boxed{\infty.}$$

Έτσι σχηματίζουμε το σύνολο

$$\boxed{\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.}$$

Το $\widehat{\mathbb{C}}$ ονομάζεται **επεκτεταμένο** $\mathbb{C}$.

Μπορούμε να πούμε ότι το ∞ συμβολίζει το νοητό σημείο προς το οποίο κινείται ένα μεταβλητό σημείο z επί του μιγαδικού επιπέδου που απομακρύνεται απεριόριστα από οποιοδήποτε σταθερό σημείο (το 0, για παράδειγμα) του επιπέδου. *Προσέξτε τη διαφορά με τα $\pm\infty$ που επισυνάπτουμε στο* $\mathbb{R}$. Ένα μεταβλητό σημείο x επί της πραγματικής ευθείας απομακρύνεται απεριόριστα από το 0 προς ακριβώς δυο συγκεκριμένες κατευθύνσεις: είτε προς τα δεξιά, οπότε λέμε ότι κινείται *προς το* $+\infty$, είτε προς τα αριστερά, οπότε λέμε ότι κινείται *προς το* $-\infty$. Όμως, στο επίπεδο δεν υπάρχουν δυο συγκεκριμένες κατευθύνσεις. Ένα σημείο μπορεί να απομακρύνεται είτε πάνω σε ημιευθείες (δηλαδή, προς άπειρες κατευθύνσεις) είτε κάνοντας οποιαδήποτε "σπειροειδή κίνηση" είτε με οποιονδήποτε άλλο αυθαίρετο τρόπο. Γι αυτό λέμε απλά ότι το σημείο κινείται *προς το άπειρο*.

Θα ονομάζουμε **r-περιοχή** του ∞ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ το σύνολο

$$\boxed{D(\infty; r) := \{z \,|\, |z| > 1/r\} \cup \{\infty\},}$$

δηλαδή το εξωτερικό του δίσκου με κέντρο 0 και ακτίνα $\frac{1}{r}$ μαζί με το σημείο ∞.

Όταν το r μικραίνει (και είναι, φυσικά, θετικό) η r-περιοχή $D(\infty; r)$ του ∞ μικραίνει, όπως κάνουν και οι r-περιοχές $D(z; r)$ των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου. Όταν το r τείνει στο $0+$ η $D(\infty; r)$ τείνει να εκφυλιστεί στο μονοσύνολο $\{\infty\}$.

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο A το οποίο δεν είναι φραγμένο. Αν πάρουμε τυχόν $r > 0$, τότε υπάρχει $z \in A$ ώστε να είναι $|z| > \frac{1}{r}$, και επομένως το z περιέχεται στην r-περιοχή $D(\infty; r)$ του ∞. Δηλαδή, κάθε περιοχή του ∞ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A. Σ' αυτή την περίπτωση θα δεχτούμε ότι το ∞ είναι *οριακό σημείο* του A. Αντιθέτως, ας θεωρήσουμε ότι το A είναι φραγμένο, δηλαδή ότι για κάποιο $R > 0$ ισχύει $|z| \leq R$ για κάθε $z \in A$. Τότε, με $r = \frac{1}{R}$, βλέπουμε ότι η r-περιοχή $D(\infty; r)$ του ∞ δεν περιέχει κανένα σημείο του A. Σ' αυτήν την περίπτωση θα δεχτούμε ότι το ∞ δεν είναι οριακό σημείο του A. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής:

Το ∞ είναι οριακό σημείο του συνόλου A αν και μόνο αν το A δεν είναι φραγμένο.

2.3 Ακολουθίες.

Σ' αυτήν την ενότητα θα μιλήσουμε για όρια ακολουθιών μιγαδικών αριθμών (z_n).

Ορισμός. *(i) Λέμε ότι η (z_n)* **συγκλίνει** *στο z ή ότι έχει* **όριο** *z, και γράφουμε*

$$\boxed{z_n \to z \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = z,}$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|z_n - z| < \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $z_n \in D(z; \epsilon)$. Με άλλα λόγια, η (z_n) συγκλίνει στο z αν για κάθε περιοχή $D(z; \epsilon)$ του z οι όροι της (z_n) βρίσκονται τελικά μέσα σ' αυτήν.

(ii) Λέμε ότι η (z_n) **αποκλίνει** *στο ∞ ή ότι έχει* **όριο** *∞, και γράφουμε*

$$\boxed{z_n \to \infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = \infty,}$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|z_n| > \frac{1}{\epsilon}$ ή, ισοδύναμα, $z_n \in D(\infty; \epsilon)$. Με άλλα λόγια, η (z_n) αποκλίνει στο ∞ αν για κάθε περιοχή $D(\infty; \epsilon)$ του ∞ οι όροι της (z_n) βρίσκονται τελικά μέσα σ' αυτήν.

Αν προσέξουμε τον ορισμό της σύγκλισης $z_n \to z$ θα καταλάβουμε ότι είναι ισοδύναμος με το ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(|z_n - z|)$ συγκλίνει στο 0. Δηλαδή,

$$\boxed{z_n \to z \quad \Leftrightarrow \quad |z_n - z| \to 0.}$$

Ομοίως, ο ορισμός της απόκλισης $z_n \to \infty$ είναι ισοδύναμος με το ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(|z_n|)$ αποκλίνει στο $+\infty$. Δηλαδή,

$$\boxed{z_n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad |z_n| \to +\infty.}$$

Παράδειγμα 2.3.1. Ας δούμε την ακολουθία $((-2)^n)$, η οποία είναι ταυτόχρονα ακολουθία μιγαδικών αριθμών και ακολουθία πραγματικών αριθμών.
Η ακολουθία αυτή, ως ακολουθία στο $\mathbb{R}$, δεν έχει όριο αφού οι υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών έχουν διαφορετικά όρια: $(-2)^{2k} = 2^{2k} \to +\infty$, $(-2)^{2k-1} = -2^{2k-1} \to -\infty$.
Όμως, η ίδια ακολουθία, ως ακολουθία στο $\mathbb{C}$, έχει όριο ∞ διότι $|(-2)^n| = 2^n \to +\infty$.

Πρόταση 2.3. *Έστω $z_n = x_n + iy_n$ και $z = x + iy$ οι μιγαδικές μορφές των z_n και z. Τότε*

$$z_n \to z \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to x \text{ και } y_n \to y.$$

Απόδειξη. Και οι δυο κατευθύνσεις της ισοδυναμίας αποδεικνύονται εύκολα από τις ανισότητες

$$0 \leq |x_n - x| \leq |z_n - z|, \quad 0 \leq |y_n - y| \leq |z_n - z|, \quad 0 \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|,$$

καθώς και από τις γνωστές ιδιότητες ορίων για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$. Αυτό γίνεται ως εξής.
Αν $z_n \to z$, τότε $|z_n - z| \to 0$, οπότε από τις δύο πρώτες ανισότητες συνεπάγεται ότι $|x_n - x| \to 0$ και $|y_n - y| \to 0$ και, επομένως, $x_n \to x$ και $y_n \to y$.
Αντιστρόφως, αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε $|x_n - x| \to 0$ και $|y_n - y| \to 0$, οπότε από την τρίτη ανισότητα συνεπάγεται ότι $|z_n - z| \to 0$ και, επομένως, $z_n \to z$.
Αν δεν θέλουμε να θεωρήσουμε γνωστές τις ιδιότητες ορίων ακολουθιών στο $\mathbb{R}$, τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό του ορίου, ως εξής.
Έστω $z_n \to z$. Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$, και τότε ισχύει τελικά $|z_n - z| < \epsilon$. Από τις δύο πρώτες ανισότητες συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$ και $|y_n - y| < \epsilon$, και επομένως $x_n \to x$ και $y_n \to y$.
Αντιστρόφως, έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$, και τότε ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Από την τρίτη ανισότητα συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $|z_n - z| < \epsilon$, και άρα $z_n \to z$. $\square$

Πρόταση 2.4. *Αν η (z_n) συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι η (z_n) συγκλίνει, και έστω $z_n = x_n + iy_n$ η μιγαδική μορφή του z_n. Από την πρόταση 2.3 συνεπάγεται ότι οι (x_n) και (y_n), οι οποίες είναι ακολουθίες στο $\mathbb{R}$, συγκλίνουν. Βάσει της ανάλογης πρότασης για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$, αυτές οι ακολουθίες είναι φραγμένες, δηλαδή υπάρχει $R > 0$ ώστε να ισχύει $|x_n| \leq R$ και $|y_n| \leq R$ για κάθε n. Άρα ισχύει

$$|z_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq 2R$$

για κάθε n, οπότε η (z_n) είναι φραγμένη. $\square$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τους αλγεβρικούς κανόνες ορίων.

Πρόταση 2.5. *Αν $z_n \to z$ και $w_n \to w$, τότε*

$$z_n + w_n \to z + w, \quad z_n - w_n \to z - w, \quad z_n w_n \to zw, \quad \frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w},$$

(για το τέταρτο όριο πρέπει να υποθέσουμε ότι $w_n \neq 0$ για κάθε n και $w \neq 0$) και

$$\overline{z_n} \to \overline{z}, \quad |z_n| \to |z|.$$

Απόδειξη. Ένας τρόπος απόδειξης είναι να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 2.3 καθώς και τους ανάλογους κανόνες για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$, θεωρώντας τους γνωστούς. Ας αποδείξουμε για παράδειγμα τον κανόνα αθροίσματος. Γράφουμε τις μιγαδικές μορφές:

$$z_n = x_n + iy_n, \quad w_n = u_n + iv_n, \quad z = x + iy, \quad w = u + iv.$$

Τότε από $z_n \to z$ και $w_n \to w$ συνεπάγεται $x_n \to x$, $y_n \to y$, $u_n \to u$ και $v_n \to v$. Βάσει του κανόνα αθροίσματος για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι $x_n + u_n \to x + u$ και $y_n + v_n \to y + v$. Τέλος, επειδή

$$z_n + w_n = (x_n + u_n) + i(y_n + v_n), \quad z + w = (x + u) + i(y + v)$$

είναι οι μιγαδικές μορφές των $z_n + w_n$ και $z + w$, συμπεραίνουμε ότι $z_n + w_n \to z + w$.
Αν δεν θέλουμε να θεωρήσουμε γνωστό τον κανόνα αθροίσματος για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$, τότε μπορούμε να μιμηθούμε την *απόδειξη* του κανόνα αθροίσματος για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ ως εξής. Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$ και τότε ισχύει τελικά $|z_n - z| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|w_n - w| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα ισχύει τελικά

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| = |(z_n - z) + (w_n - w)| \le |z_n - z| + |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

και επομένως $z_n + w_n \to z + w$.
Με τον ίδιο "διπλό" τρόπο αποδεικνύονται όλοι οι υπόλοιποι κανόνες. $\square$

Οι κανόνες της πρότασης 2.5 ισχύουν και όταν κάποιο από τα z, w (ή και τα δύο) είναι ∞ αρκεί να μην προκύπτει απροσδιόριστη μορφή. Οι επιτρεπτές πράξεις με το ∞ είναι οι εξής:

1. Άθροισμα: $z + \infty = \infty$ και $\infty + z = \infty$.
2. Διαφορά: $z - \infty = \infty$ και $\infty - z = \infty$.
3. Γινόμενο: $z \cdot \infty = \infty$ και $\infty \cdot z = \infty$ αν $z \neq 0$. Επίσης: $\infty \cdot \infty = \infty$.
4. Λόγος: $\frac{z}{\infty} = 0$ και $\frac{\infty}{z} = \infty$. Επίσης: $\frac{z}{0} = \infty$ αν $z \neq 0$.
5. Συζυγές: $\overline{\infty} = \infty$.
6. Μέτρο: $|\infty| = +\infty$.

Οι μη-επιτρεπτές πράξεις είναι οι

απροσδιόριστες μορφές : $\infty + \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$

Σχόλιο. Προσέξτε ιδιαιτέρως την περίπτωση του $\frac{1}{0} = \infty$. Στο $\mathbb{R}$ η παράσταση $\frac{1}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή, διότι όταν το x είναι μικρό και > 0 τότε το $\frac{1}{x}$ είναι μεγάλο και > 0, οπότε το $\frac{1}{x}$ κινείται προς το $+\infty$, ενώ όταν το x είναι μικρό και < 0 τότε το $\frac{1}{x}$ είναι μεγάλο και < 0, οπότε το $\frac{1}{x}$ κινείται προς το $-\infty$. Όμως, στο $\mathbb{C}$ και σε σχέση με το όριο ∞, το πρόσημο δεν παίζει τον ίδιο ρόλο που παίζει στο $\mathbb{R}$. Στο $\mathbb{C}$ μόνο το μέτρο του αριθμού $\frac{1}{z}$ παίζει ρόλο, και βλέπουμε ότι όταν το z είναι πολύ μικρό, δηλαδή όταν το $|z|$ είναι πολύ μικρό (και αναγκαστικά > 0), τότε η απόσταση $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ του $\frac{1}{z}$ από το 0 είναι πολύ μεγάλη και θετική, και επομένως το $\frac{1}{z}$ πλησιάζει το ∞. Γι αυτό ορίζουμε $\frac{1}{0} = \infty$.

Μπορούμε λοιπόν να ξαναγράψουμε την Πρόταση 2.5 εμπλουτίζοντάς την με τις περιπτώσεις των άπειρων ορίων:

Πρόταση 2.5.

$$\lim_{n\to+\infty}(z_n+w_n)=\lim_{n\to+\infty}z_n+\lim_{n\to+\infty}w_n,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(z_n-w_n)=\lim_{n\to+\infty}z_n-\lim_{n\to+\infty}w_n,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(z_nw_n)=\lim_{n\to+\infty}z_n\lim_{n\to+\infty}w_n,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{z_n}{w_n}=\frac{\lim_{n\to+\infty}z_n}{\lim_{n\to+\infty}w_n},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\overline{z_n}=\overline{\lim_{n\to+\infty}z_n},$$
$$\lim_{n\to+\infty}|z_n|=\big|\lim_{n\to+\infty}z_n\big|.$$

Οι παραπάνω ισότητες ισχύουν αρκεί να υπάρχουν τα όρια που εμφανίζονται στην δεξιά μεριά τους και η δεξιά μεριά τους να μην είναι απροσδιόριστη μορφή.

Παράδειγμα 2.3.2. Θεωρούμε τη **γεωμετρική πρόοδο** (z^n).
Αν $|z|<1$, τότε $|z^n-0|=|z|^n\to 0$ (γνωστό όριο γεωμετρικής προόδου στο $\mathbb{R}$), οπότε $z^n\to 0$.
Αν $|z|>1$, τότε $|z^n|=|z|^n\to+\infty$ (γνωστό όριο γεωμετρικής προόδου στο $\mathbb{R}$), οπότε $z^n\to\infty$.
Αν $z=1$, τότε $z^n=1\to 1$.
Τέλος, έστω $|z|=1$ και $z\neq 1$, και ας υποθέσουμε ότι $z^n\to w$.
Επειδή $|z^n|=|z|^n=1\to 1$ και επειδή $|z^n|\to|w|$, συνεπάγεται $|w|=1$, οπότε το w δεν είναι 0 ούτε ∞. Επίσης, επειδή $z^n\to w$, συνεπάγεται $z^{n+1}\to w$, οπότε $\frac{z^{n+1}}{z^n}\to\frac{w}{w}=1$. Όμως, ισχύει $\frac{z^{n+1}}{z^n}=z\to z$. Επομένως $z=1$, και καταλήγουμε σε άτοπο.
Συνοψίζουμε:

$$z^n\begin{cases}\to 0, & \text{αν } |z|<1\\ \to 1, & \text{αν } z=1\\ \to\infty, & \text{αν } |z|>1\\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } |z|=1, z\neq 1\end{cases}$$

Έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των διαδοχικών όρων της (z^n).
Αν $z=0$ ή $z=1$, τότε η (z^n) είναι σταθερή.
Έστω $0<|z|<1$ και $\theta=\operatorname{Arg}z$, οπότε $-\pi<\theta\leq\pi$ και $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$. Τότε ισχύει

$$z^n=|z|^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)),\quad z^{n+1}=|z|^{n+1}(\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta))$$

για κάθε n. Επομένως, τα μέτρα των z^n φθίνουν γνησίως και συγκλίνουν στο 0, και τα z^n περιστρέφονται κάθε φορά κατά γωνία σταθερού μέτρου $|\theta|$ με τη θετική φορά περιστροφής, αν $\theta>0$, ή με την αρνητική φορά περιστροφής, αν $\theta<0$. Αν $\theta=0$, τότε δεν υφίσταται περιστροφή. Με άλλα λόγια, αν $\theta\neq 0$, τα z^n κάνουν μια “σπειροειδή κίνηση” γύρω από το 0 συγκλίνοντας στο 0, ενώ, αν $\theta=0$, τα z^n συγκλίνουν στο 0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[0,1]$.
Έστω $|z|>1$. Τότε ισχύουν ακριβώς τα ίδια με την προηγούμενη περίπτωση με τη διαφορά ότι τα μέτρα των z^n αυξάνονται γνησίως και αποκλίνουν στο $+\infty$. Δηλαδή, αν $\theta\neq 0$, τα z^n κάνουν μια “σπειροειδή κίνηση” γύρω από το 0 αποκλίνοντας στο ∞, ενώ, αν $\theta=0$, τα z^n αποκλίνουν στο ∞ πάνω στην ημιευθεία $[1,+\infty]$.
Τέλος, έστω $|z|=1$ και $z\neq 1$. Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι τα z^n βρίσκονται πάνω στον σταθερό κύκλο $C(0;1)$ (δηλαδή, ούτε πλησιάζουν το 0 ούτε απομακρύνονται από το 0) και περιστρέφονται κάθε φορά κατά γωνία σταθερού μέτρου $|\theta|$ με τη θετική φορά περιστροφής, αν $\theta>0$, ή με την αρνητική φορά περιστροφής, αν $\theta<0$.

Πρόταση 2.6. *Αν η (z_n) έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς έστω $z_n \to z$. Γράφουμε τις μιγαδικές μορφές $z_n = x_n + iy_n$ και $z = x + iy$, και τότε έχουμε ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Θεωρώντας γνωστή την αντίστοιχη ιδιότητα για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$, παίρνουμε ότι $x_{n_k} \to x$ και $y_{n_k} \to y$, και συμπεραίνουμε ότι $z_{n_k} \to z$.
Τώρα έστω $z_n \to \infty$. Τότε $|z_n| \to +\infty$. Θεωρώντας γνωστή την αντίστοιχη ιδιότητα για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$, παίρνουμε ότι $|z_{n_k}| \to +\infty$ και άρα $z_{n_k} \to \infty$. □

Θα μνημονεύσουμε και την **ιδιότητα πληρότητας** του $\mathbb{C}$.

Πρόταση 2.7. *Κάθε ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω (z_n) ακολουθία Cauchy, δηλαδή $|z_n - z_m| \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$. Έχουμε τις ανισότητες:

$$0 \le |x_n - x_m| \le |z_n - z_m|, \quad 0 \le |y_n - y_m| \le |z_n - z_m|.$$

Από τις ανισότητες αυτές προκύπτει ότι $|x_n - x_m| \to 0$ και $|y_n - y_m| \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$, οπότε οι (x_n) και (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy. Από την ιδιότητα πληρότητας του $\mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι οι (x_n) και (y_n) συγκλίνουν, οπότε από την Πρόταση 2.3 συνεπάγεται ότι η (z_n) συγκλίνει. □

Τέλος, έχουμε έναν χαρακτηρισμό του οριακού σημείου ενός συνόλου βάσει της έννοιας της σύγκλισης ακολουθίας.

Πρόταση 2.8. *Το z είναι οριακό σημείο του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (z_n) στο A με όριο z.*

Απόδειξη. Έστω ότι το z είναι οριακό σημείο του A. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο δίσκος $D(z; \frac{1}{n})$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A: ας συμβολίσουμε z_n ένα τέτοιο σημείο. Δηλαδή ισχύει $z_n \in A$ και $|z_n - z| < \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα η ακολουθία (z_n) είναι στο A, και $z_n \to z$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (z_n) στο A με όριο z. Τότε για κάθε περιοχή $D(z; \epsilon)$ του z οι όροι της (z_n) βρίσκονται τελικά μέσα σ' αυτήν, και άρα κάθε περιοχή του z περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A. Άρα το z είναι οριακό σημείο του A. □

Ασκήσεις.

2.3.1. Ποιό είναι το όριο της (n^2) αν την δούμε ως ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και ποιό είναι το όριό της αν την δούμε ως ακολουθία στο $\mathbb{C}$; Ομοίως για την $(-n^2)$.

2.3.2. Έστω $z_n \to z$ και $z_n \neq 0$ για κάθε n και $z \neq 0$.
(i) Αν $\operatorname{Arg} z \neq \pi$, δείτε γεωμετρικά ότι $\operatorname{Arg} z_n \to \operatorname{Arg} z$.
(ii) Μελετήστε τις ακολουθίες $\big(-1 + \frac{i}{n}\big)$, $\big(-1 - \frac{i}{n}\big)$ και $\big(-1 + (-1)^n \frac{i}{n}\big)$, εντοπίζοντας τις θέσεις των όρων τους στο μιγαδικό επίπεδο. Ποιό είναι το όριό τους; Διακρίνετε στο σχήμα που φτιάξατε τα πρωτεύοντα ορίσματα των όρων τους; Ποιά είναι η οριακή συμπεριφορά αυτών των πρωτευόντων ορισμάτων;
(iii) Αν $\operatorname{Arg} z = \pi$, αποδείξτε ότι είτε (i) $\operatorname{Arg} z_n \to \pi$, είτε (ii) $\operatorname{Arg} z_n \to -\pi$, είτε (iii) η (z_n) χωρίζεται σε ακριβώς δυο υπακολουθίες $(z_{n'_k})$ και $(z_{n''_k})$ ώστε $\operatorname{Arg} z_{n'_k} \to \pi$ και $\operatorname{Arg} z_{n''_k} \to -\pi$.

2.3.3. Αποδείξτε όλους τους κανόνες της πρότασης 2.5 (καθώς και τις περιπτώσεις με όρια ∞) με τον "διπλό" τρόπο που περιγράψαμε στην απόδειξη του κανόνα αθροίσματος.

2.4 Συμπαγή σύνολα.

Ιδού η επέκταση στο μιγαδικό επίπεδο του γνωστού Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass. *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει $|z_n| \leq M$ για κάθε n. Γράφουμε τη μιγαδική μορφή $z_n = x_n + iy_n$, και τότε ισχύει $|x_n| \leq M$ και $|y_n| \leq M$ για κάθε n.
Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$, υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω $x_{n_k} \to x$.
Τώρα θεωρούμε την αντίστοιχη υπακολουθία (y_{n_k}) της (y_n). Η (y_{n_k}) μπορεί να μη συγκλίνει, αλλά είναι φραγμένη διότι ισχύει $|y_{n_k}| \leq M$ για κάθε k. Και πάλι σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$, υπάρχει υπακολουθία $(y_{n_{k_l}})$ της (y_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω $y_{n_{k_l}} \to y$.
Επειδή $x_{n_k} \to x$, συνεπάγεται $x_{n_{k_l}} \to x$.
Ορίζουμε $z := x + iy$, και συμπεραίνουμε ότι $z_{n_{k_l}} \to z$. □

Και η επόμενη πρόταση έχει αντίστοιχη για μη-φραγμένες ακολουθίες στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.9. *Κάθε μη-φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία με όριο ∞.*

Απόδειξη. Το ότι η (z_n) δεν είναι φραγμένη είναι ισοδύναμο με το ότι η $(|z_n|)$ δεν είναι φραγμένη. Από την αντίστοιχη πρόταση για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(|z_{n_k}|)$ της $(|z_n|)$ ώστε $|z_{n_k}| \to +\infty$, και άρα $z_{n_k} \to \infty$. □

Πόρισμα από κοινού του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass και της Πρότασης 2.9 είναι ότι
Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία η οποία έχει όριο στο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Ορισμός. *Ένα σύνολο K χαρακτηρίζεται* **συμπαγές** *αν κάθε ακολουθία στο K έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία συγκλίνουσα σε σημείο του K. Δηλαδή, το K είναι συμπαγές αν για κάθε (z_n) στο K υπάρχει υπακολουθία (z_{n_k}) ώστε $z_{n_k} \to z$ για κάποιο $z \in K$.*

Σχόλιο. Υπάρχει ο εξής εναλλακτικός ορισμός της συμπάγειας.
Έστω μετρικός χώρος (X, d). Ένα υποσύνολο K του X χαρακτηρίζεται **συμπαγές** *αν για κάθε συλλογή $\mathcal{C}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ υπάρχουν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ ώστε $K \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$.*
Αποδεικνύεται ότι *το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία στο K έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία συγκλίνουσα σε σημείο του K.*
Με άλλα λόγια, ο ορισμός της συμπάγειας που δώσαμε είναι ισοδύναμος με τον εναλλακτικό ορισμό. Προτιμήσαμε τον ορισμό της συμπάγειας με τις ακολουθίες από τον ορισμό με τις καλύψεις διότι είναι κάπως απλούστερος και διότι είναι πιο άμεσα εφαρμόσιμος σε όσα θα χρειαστούμε σ' αυτό το μάθημα.

Το επόμενο αποτέλεσμα αποτελεί τον κυριότερο τρόπο αναγνώρισης συμπαγών συνόλων.

Θεώρημα 2.1. *Ένα σύνολο K είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το K είναι συμπαγές. Θα αποδείξουμε ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο.
Έστω τυχόν οριακό σημείο z του K. Από την πρόταση 2.8 συνεπάγεται ότι υπάρχει ακολουθία (z_n) στο K ώστε $z_n \to z$.
Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει σε σημείο του K. Δηλαδή $z_{n_k} \to w$ για κάποιο $w \in K$.
Επειδή $z_n \to z$, συνεπάγεται $z_{n_k} \to z$. Άρα $z = w$, και επομένως $z \in K$.
Αποδείξαμε ότι κάθε οριακό σημείο του K ανήκει στο K. Άρα το K είναι κλειστό σύνολο.
Έστω ότι το K δεν είναι φραγμένο. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in K$ ώστε $|z_n| > n$. Δηλαδή υπάρχει ακολουθία (z_n) στο K ώστε $z_n \to \infty$. Τότε κάθε υπακολουθία της (z_n) αποκλίνει, επίσης, στο ∞, οπότε η (z_n) δεν έχει καμιά υπακολουθία η οποία να συγκλίνει σε σημείο του K. Αυτό αντιφάσκει με το ότι το K είναι συμπαγές, και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα το K είναι φραγμένο.
Αντιστρόφως, έστω ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο. Θα αποδείξουμε ότι το K είναι συμπαγές, δηλαδή ότι κάθε ακολουθία στο K έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του K.

Έστω οποιαδήποτε (z_n) στο K. Επειδή το K είναι φραγμένο, συνεπάγεται ότι η (z_n) είναι φραγμένη. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει: έστω $z_{n_k} \to z$.
Επειδή η (z_{n_k}) είναι στο K, από την πρόταση 2.8 συνεπάγεται ότι το z είναι οριακό σημείο του K. Επειδη το K είναι κλειστό, συνεπάγεται $z \in K$.
Άρα υπάρχει υπακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει σε σημείο του K. □

Παράδειγμα 2.4.1. Κάθε κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0; r_0)$ είναι συμπαγές σύνολο.
Κάθε κλειστός δακτύλιος $\{z \,|\, r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$ είναι συμπαγές σύνολο.
Κάθε κλειστό ορθ. παραλληλόγραμμο $\{x + iy \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ είναι συμπαγές σύνολο.

Παράδειγμα 2.4.2. Ο κλειστός δακτύλιος (με άπειρη εξωτερική ακτίνα) $\{z \,|\, r_1 \leq |z - z_0|\}$ είναι σύνολο κλειστό αλλά όχι φραγμένο, οπότε δεν είναι συμπαγές.
Ο ανοικτός δίσκος $D(z_0; r_0)$ είναι σύνολο φραγμένο αλλά όχι κλειστό, οπότε δεν είναι συμπαγές.

Παράδειγμα 2.4.3. Το $\mathbb{C}$ είναι ανοικτό σύνολο διότι κάθε σημείο z είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{C}$, αφού όποια περιοχή του z κι αν πάρουμε αυτή περιέχεται ολόκληρη στο $\mathbb{C}$.
Το $\mathbb{C}$ είναι *και* κλειστό σύνολο διότι κάθε οριακό σημείο του είναι μιγαδικός αριθμός και αυτομάτως περιέχεται στο $\mathbb{C}$.
Το $\emptyset$, ως συμπλήρωμα του $\mathbb{C}$, είναι αυτομάτως κλειστό και ανοικτό.
Τώρα, το $\mathbb{C}$ είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο και, επομένως, δεν είναι συμπαγές. Ενώ το $\emptyset$ είναι κλειστό *και* φραγμένο (αφού περιέχεται σε οποιονδήποτε δίσκο), οπότε είναι συμπαγές.
Βέβαια, το ότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι συμπαγές μπορούμε να το δούμε και κατευθείαν από τον ορισμό της συμπάγειας. Μπορούμε να σκεφτούμε μια συγκεκριμένη ακολουθία στο $\mathbb{C}$, για παράδειγμα την (z_n) με $z_n = n$ για κάθε n, η οποία έχει όριο ∞ και η οποία, γι αυτόν τον λόγο, δεν έχει *καμία* υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του $\mathbb{C}$ (αφού κάθε υπακολουθία έχει όριο ∞).

Παράδειγμα 2.4.4. Το σύνολο $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ δεν είναι κλειστό διότι δεν περιέχει το 0, το οποίο είναι οριακό σημείο του. Άρα το σύνολο δεν είναι συμπαγές.
Αντιθέτως, το σύνολο $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι κλειστό (γιατί; δείτε και την άσκηση 2.1.2) και φραγμένο, οπότε είναι συμπαγές.

Πρόταση 2.10. *Έστω (K_n) μια ακολουθία εγκιβωτισμένων μη-κενών συμπαγών συνόλων, δηλαδή $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα z το οποίο ανήκει σε κάθε K_n. Με άλλα λόγια η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ είναι μη-κενή.*

Απόδειξη. Επειδή κάθε K_n είναι μη-κενό, επιλέγουμε για κάθε n ένα οποιοδήποτε $z_n \in K_n$, οπότε σχηματίζουμε μια ακολουθία (z_n) η οποία περιέχεται στο K_1, δηλαδή στο μεγαλύτερο από τα K_n.
Επειδή το K_1 είναι φραγμένο, υπάρχει, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, κάποια υποακολουθία (z_{n_k}) η οποία συγκλίνει: έστω $z_{n_k} \to z$.
Σταθεροποιούμε ένα *οποιοδήποτε* n.
Επειδή $n_k \to +\infty$, θα ισχύει $n_k \geq n$ από κάποιο k και πέρα, οπότε θα ισχύει $z_{n_k} \in K_{n_k} \subseteq K_n$ από κάποιο k και πέρα.
Άρα η υποακολουθία (z_{n_k}) είναι τελικά μέσα στο K_n, οπότε το z είναι οριακό σημείο του K_n, και, επειδή το K_n είναι κλειστό, το z ανήκει στο K_n.
Άρα το z ανήκει σε κάθε K_n. □

Ασκήσεις.

2.4.1. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{z_1, \ldots, z_n\}$ είναι συμπαγές.

2.4.2. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε πολυγωνική γραμμή, δηλαδή ένωση διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n]$, είναι συμπαγές σύνολο.

2.4.3. Έστω συμπαγές σύνολο K και κλειστό σύνολο F ώστε $F \subseteq K$. Αποδείξτε ότι το F είναι συμπαγές σύνολο.

2.4.4. (i) Έστω ακολουθία (z_n) ώστε $z_n \to z$ και $z_n \neq z$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το $\{z_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι συμπαγές.
(ii) Έστω ακολουθία (z_n) ώστε $z_n \to z$. Αποδείξτε ότι το $\{z\} \cup \{z_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

2.4.5. Αποδείξτε ότι η τομή συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο, και ότι η ένωση πεπερασμένου πλήθους συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο.
Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 2.1.4.

2.4.6. (i) Δείτε την άσκηση 2.1.3 και αποδείξτε ότι, αν το μη-κενό σύνολο K είναι συμπαγές, τότε υπάρχουν $z_0, w_0 \in K$ ώστε $|z_0 - w_0| = \operatorname{diam} K$.
(ii) Αποδείξτε ότι, αν το μη-κενό σύνολο F είναι κλειστό, τότε υπάρχει $w_0 \in F$ ώστε να ισχύει $|z - w_0| \leq |z - w|$ για κάθε $w \in F$.
(iii) Αν το μη-κενό σύνολο K είναι συμπαγές και το μη-κενό σύνολο F είναι κλειστό, αποδείξτε ότι υπάρχουν $z_0 \in K$ και $w_0 \in F$ ώστε να ισχύει $|z_0 - w_0| \leq |z - w|$ για κάθε $z \in K$, $w \in F$.

2.4.7. Έστω σύνολο A και έστω $\overline{A} = A \cup \{z \,|\, z$ είναι συνοριακό σημείο του $A\}$ το οποίο ορίστηκε στην άσκηση 2.1.5. Αποδείξτε ότι, αν το A είναι φραγμένο, τότε το $\overline{A}$ είναι συμπαγές.

2.5 Συνεκτικά σύνολα.

Το ευθ. τμήμα στο μιγαδικό επίπεδο με άκρα τα σημεία z_1, z_2 θα το συμβολίζουμε

$$[z_1, z_2].$$

Πολυγωνική γραμμή είναι μια ένωση διαδοχικών ευθ. τμημάτων:

$$[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n].$$

Ορισμός. *Ένα ανοικτό σύνολο A χαρακτηρίζεται* **συνεκτικό** *αν για κάθε δυο σημεία του A υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A η οποία συνδέει τα δυο αυτά σημεία. Ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο θα το ονομάζουμε και* **χωρίο** *ή* **τόπο**.

Παράδειγμα 2.5.1. Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **κυρτό** αν για κάθε $z_1, z_2 \in A$ το ευθ. τμήμα $[z_1, z_2]$ περιέχεται ολόκληρο στο A.
Τότε κάθε ανοικτό σύνολο A το οποίο είναι κυρτό, είναι συνεκτικό. Πράγματι, αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε σημεία του A, το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει αποτελεί πολυγωνική γραμμή η οποία περιέχεται ολόκληρη στο A.
Για παράδειγμα, οι ανοικτοί δίσκοι και τα ανοικτά ημιεπίπεδα είναι συνεκτικά σύνολα.

Παράδειγμα 2.5.2. Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **αστρόμορφο** αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο σημείο $z_0 \in A$ ώστε για κάθε $z \in A$ το ευθ. τμήμα $[z_0, z]$ να περιέχεται ολόκληρο στο A. Ένα τέτοιο z_0 χαρακτηρίζεται *κέντρο* του αστρόμορφου A. Το κέντρο μπορεί να μην είναι μοναδικό, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε σημείο του αστρόμορφου A είναι κέντρο του.
Τότε κάθε ανοικτό σύνολο A το οποίο είναι αστρόμορφο, είναι συνεκτικό. Πράγματι, δυο οποιαδήποτε σημεία του A μπορούν να συνδεθούν με μια πολυγωνική γραμμή στο A η οποία αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα: ένα ευθ. τμήμα από το ένα σημείο στο z_0 και ένα ευθ. τμήμα από το z_0 στο άλλο σημείο.
Για παράδειγμα το σύνολο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ είναι ανοικτό και αστρόμορφο (με κέντρο το σημείο 1), και άρα είναι συνεκτικό.

Παράδειγμα 2.5.3. Κάθε ανοικτός δακτύλιος $\{z \,|\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Παράδειγμα 2.5.4. Η ένωση δύο ανοικτών δίσκων οι οποίοι δεν τέμνονται, αν και είναι ανοικτό σύνολο, δεν είναι συνεκτικό.

Ασκήσεις.

2.5.1. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι χωρία;
(i) $\mathbb{C} \setminus C(i;2)$.
(ii) $\{z \mid |z-i| > |z|\}$.
(iii) $\{z \mid \operatorname{Re} z < 1\} \cup D(2+i;1)$.
(iv) $\{z \mid \operatorname{Re} z < 1\} \cup D(2+i;3/2)$.
(v) $\mathbb{C} \setminus \big([1, 1+i] \cup [1+i, 2i]\big)$.
(vi) $\mathbb{C} \setminus \big([1, 1+i] \cup [1+i, 2i] \cup [2i, 1]\big)$.

2.5.2. Έστω χωρίο A και $a_1, \dots, a_n \in A$. Αποδείξτε ότι το $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ είναι χωρίο.

2.5.3. Αποδείξτε ότι η ένωση χωρίων τα οποία έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο είναι χωρίο.
Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 2.1.4.

2.5.4. Βρείτε απλό παράδειγμα δυο χωρίων των οποίων η τομή *δεν* είναι χωρίο.

2.5.5. Έστω χωρίο A. Αποδείξτε ότι για κάθε δυο σημεία του A υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A η οποία συνδέει τα δυο αυτά σημεία και η οποία αποτελείται μόνο από οριζόντια και κατακόρυφα ευθ. τμήματα.

Κεφάλαιο 3

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων.

3.1 Όρια συναρτήσεων.

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ και
$$f : A \to \mathbb{C}.$$
Η f χαρακτηρίζεται **μιγαδική συνάρτηση (μίας) μιγαδικής μεταβλητής**. Αν είναι $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, αν ισχύει $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in A$, τότε η f χαρακτηρίζεται **πραγματική συνάρτηση (μίας) μιγαδικής μεταβλητής**.

Κάθε μιγαδική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ καθορίζει δύο πραγματικές συναρτήσεις ως εξής. Για κάθε $z \in A$ το $f(z)$ είναι μιγαδικός αριθμός οπότε έχει μιγαδική μορφή $f(z) = u + iv$, όπου u, v είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $f(z)$. Φυσικά, οι πραγματικοί αριθμοί u, v εξαρτώνται (όπως και το $f(z)$) από το $z \in A$ και τους γράφουμε $u(z), v(z)$. Δηλαδή, ορίζονται οι συναρτήσεις
$$u : A \to \mathbb{R}, \quad v : A \to \mathbb{R}$$
και ισχύει
$$f(z) = u(z) + iv(z) \quad \text{για κάθε } z \in A.$$
Οι συναρτήσεις u, v ονομάζονται **πραγματικό μέρος** και **φανταστικό μέρος** της f.

Επίσης, από μια μιγαδική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ ορίζεται η λεγόμενη **συζυγής** της f:
$$\overline{f} : A \to \mathbb{C}$$
με τύπο
$$\overline{f}(z) = \overline{f(z)} \quad \text{για κάθε } z \in A.$$

Τέλος, από μια μιγαδική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ ορίζεται η συνάρτηση **μέτρο** ή **απόλυτη τιμή** της f:
$$|f| : A \to \mathbb{R}$$
με τύπο
$$|f|(z) = |f(z)| \quad \text{για κάθε } z \in A.$$

Θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τους διπλούς συμβολισμούς
$$z = x + iy = (x, y), \quad f = u + iv = (u, v)$$
και, φυσικά, τους πιο λεπτομερείς συμβολισμούς
$$f(z) = u(z)+iv(z) = (u(z), v(z)), \quad f(x+iy) = u(x+iy)+iv(x+iy) = (u(x+iy), v(x+iy)),$$
$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Παράδειγμα 3.1.1. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = z^2$ γράφουμε

$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Άρα το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της f είναι οι συναρτήσεις $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$u(z) = u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(z) = v(x, y) = 2xy.$$

Φυσικά, μπορούμε να γράψουμε και

$$u(z) = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2, \quad v(z) = 2 \operatorname{Re} z \, \operatorname{Im} z.$$

Η συζυγής συνάρτηση $\overline{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ έχει τύπο

$$\overline{f}(z) = \overline{f(z)} = \overline{z^2} = (\overline{z})^2 = (x - iy)^2 = (x^2 - y^2) - i2xy.$$

Τέλος, το μέτρο της f είναι η συνάρτηση $|f| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$|f|(z) = |f(z)| = |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Παράδειγμα 3.1.2. Για την συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = \frac{1}{z}$ γράφουμε

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Άρα το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της f είναι οι συναρτήσεις $u, v : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$u(z) = u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(z) = v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Παράδειγμα 3.1.3. Για την **εκθετική συνάρτηση** $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = e^z$ γράφουμε

$$f(z) = f(x + iy) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Άρα το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της f είναι οι συναρτήσεις $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$u(z) = u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(z) = v(x, y) = e^x \sin y.$$

Ορισμός. *Το z χαρακτηρίζεται* **σημείο συσσώρευσης** *του συνόλου A αν κάθε περιοχή του z περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A διαφορετικό από το ίδιο το z.*

Συγκρίνοντας τους ορισμούς του οριακού σημείου και του σημείου συσσώρευσης, βλέπουμε ότι η έννοια του σημείου συσσώρευσης είναι *ισχυρότερη* από την έννοια του οριακού σημείου:
Αν το z είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε είναι οριακό σημείο του A.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι το z είναι οριακό σημείο του A, και διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν το z *δεν ανήκει* στο A. Τότε κάθε περιοχή του z περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A, και αυτό το σημείο είναι αναγκαστικά διαφορετικό από το ίδιο το z (αφού το z δεν ανήκει στο A). Επομένως το z είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δηλαδή,
Αν $z \notin A$ είναι οριακό σημείο του A, τότε είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν το z *ανήκει* στο A, οπότε είναι αυτομάτως οριακό σημείο του A. Ας υποθέσουμε ότι το z *δεν* είναι σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει κάποια περιοχή του z η οποία δεν περιέχει κανένα σημείο του A διαφορετικό από το ίδιο το z, οπότε μέσα σ' αυτήν την περιοχή του z το μοναδικό σημείο του A είναι το ίδιο το z. Για μια τέτοια περίπτωση έχουμε ένα ορισμό.

Ορισμός. *Το z χαρακτηρίζεται* **μεμονωμένο σημείο** *του A αν $z \in A$ και σε κάποια περιοχή του z το μοναδικό σημείο του A είναι το ίδιο το z.*

Άρα είδαμε ότι:

Αν $z \in A$ (οπότε το z είναι οριακό σημείο του A), τότε το z είτε είναι σημείο συσσώρευσης του A είτε είναι μεμονωμένο σημείο του A.

Είναι, φυσικά, προφανές ότι οι έννοιες "σημείο συσσώρευσης" και "μεμονωμένο σημείο" αλληλοαποκλείονται.

Συνοψίζουμε:

Ένα z είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν είναι οριακό σημείο του A, εκτός από την ειδική περίπτωση που το z ανήκει στο A και είναι μεμονωμένο σημείο του A (οπότε είναι οριακό σημείο αλλά όχι σημείο συσσώρευσης του A).

Παράδειγμα 3.1.4. Έστω $A = D(0;1) \cup \{2\}$, δηλαδή ένας δίσκος μαζί με ένα σημείο μακρυά από τον δίσκο. Τότε το σημείο 2 είναι μεμονωμένο σημείο και όχι σημείο συσσώρευσης του A.

Ας πούμε δυο λόγια και για την περίπτωση του σημείου ∞. Έχουμε ήδη πει (στην ενότητα 2.2) ότι αν το σύνολο A είναι φραγμένο, τότε το ∞ δεν είναι οριακό σημείο του A, διότι κάποια περιοχή του ∞ δεν περιέχει κανένα σημείο του A. Άρα σ' αυτήν την περίπτωση το ∞ δεν είναι ούτε σημείο συσσώρευσης του A. Έχουμε πει επίσης ότι αν το A δεν είναι φραγμένο, τότε το ∞ είναι οριακό σημείο του A, διότι κάθε περιοχή του ∞ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A: όμως κάθε τέτοιο σημείο του A είναι διαφορετικό από το ∞ (διότι το A είναι υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$). Άρα σ' αυτήν την περίπτωση το ∞ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δηλαδή,

Το ∞ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν το A δεν είναι φραγμένο.

Χρειαζόμαστε την έννοια του σημείου συσσώρευσης για τον ορισμό της έννοιας του ορίου. Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή z μιας συνάρτησης f τείνει στο σημείο z_0 θέλουμε να παίρνει τιμές μέσα από το πεδίο ορισμού A της f που να έρχονται όσο θέλουμε κοντά στο z_0 αλλά να είναι και διαφορετικές από το ίδιο το z_0. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του z_0 να υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ίδιο το z_0, και επομένως θέλουμε το z_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Παράδειγμα 3.1.5. Το ∞ δεν είναι σημείο συσσώρευσης (ούτε οριακό σημείο) οποιουδήποτε δίσκου ή ευθ. τμήματος ή ορθ. παραλληλογράμμου.

Το ∞ είναι σημείο συσσώρευσης (και οριακό σημείο) κάθε ημιεπιπέδου ή ευθείας ή ημιευθείας.

Παράδειγμα 3.1.6. Το σύνολο $\mathbb{N}$ έχει μοναδικό σημείο συσσώρευσης (και οριακό σημείο) το ∞. Κάθε άλλο σημείο του $\mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο σημείο του.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι το $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ είναι* **όριο** *της f στο z_0 ή ότι η f έχει όριο w_0 στο z_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(z) \in D(w_0;\epsilon)$ για κάθε $z \in A \cap (D(z_0;\delta) \setminus \{z_0\})$. Σ' αυτήν την περίπτωση γράφουμε*

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \text{ή} \quad f(z) \to w_0 \ \text{όταν} \ z \to z_0.}$$

Εξειδικεύουμε τον ορισμό στις εξής τέσσερις συνολικά περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$.

Το $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - w_0| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο z_0.

Περίπτωση 2. $z_0 \in \mathbb{C}$, $w_0 = \infty$.

Το $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ σημαίνει ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| > M$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο z_0.

Περίπτωση 3. $z_0 = \infty$, $w_0 \in \mathbb{C}$.

Το $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)-w_0| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z| > N$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο ∞.

Περίπτωση 4. $z_0 = w_0 = \infty$.

Το $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ σημαίνει ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| > M$ για κάθε $z \in A$ με $|z| > N$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο ∞.

Έστω $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$. Αν $w_0 \in \mathbb{C}$, τότε λέμε ότι η f **συγκλίνει** στο w_0. Αν $w_0 = \infty$, τότε λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο ∞. Σε κάθε περίπτωση λέμε ότι η f **έχει όριο** w_0 και ότι το w_0 **είναι όριο** της f. Αν η f δεν έχει κανένα όριο, τότε λέμε ότι η f **αποκλίνει**.

Από τις περιπτώσεις 1 και 3 του ορισμού του ορίου βλέπουμε ότι όταν $w_0 \in \mathbb{C}$ τότε

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} |f(z) - w_0| = 0.$$

Ομοίως, από τις περιπτώσεις 2 και 4 του ορισμού του ορίου βλέπουμε ότι όταν $w_0 = \infty$ τότε

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Πρόταση 3.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $f = u + iv$, όπου $u, v : A \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f, και έστω $w_0 = u_0 + iv_0$ η μιγαδική μορφή του $w_0 \in \mathbb{C}$. Τότε*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} u(z) = u_0 \ \text{ και } \ \lim_{z\to z_0} v(z) = v_0.$$

Απόδειξη. Και οι δυο κατευθύνσεις της ισοδυναμίας αποδεικνύονται από τις ανισότητες

$$0 \le |u(z) - u_0| \le |f(z) - w_0|, \quad 0 \le |v(z) - v_0| \le |f(z) - w_0|,$$

$$0 \le |f(z) - w_0| \le |u(z) - u_0| + |v(z) - v_0|.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε γνωστές ιδιότητες ορίων *πραγματικών* συναρτήσεων, τότε σκεφτόμαστε ως εξής.

Αν $f(z) \to w_0$, τότε $|f(z) - w_0| \to 0$, οπότε από τις δύο πρώτες ανισότητες συνεπάγεται ότι $|u(z) - u_0| \to 0$ και $|v(z) - v_0| \to 0$ και, επομένως, $u(z) \to u_0$ και $v(z) \to v_0$.

Αντιστρόφως, αν $u(z) \to u_0$ και $v(z) \to v_0$, τότε $|u(z) - u_0| \to 0$ και $|v(z) - v_0| \to 0$, οπότε από την τρίτη ανισότητα συνεπάγεται ότι $|f(z) - w_0| \to 0$ και, επομένως, $f(z) \to w_0$.

Αν δεν χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες ορίων πραγματικών συναρτήσεων, τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό του ορίου, ως εξής.

Έστω $f(z) \to w_0$. Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$, και τότε ισχύει $|f(z)-w_0| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο z_0. Από τις δύο πρώτες ανισότητες συνεπάγεται ότι ισχύει $|u(z) - u_0| < \epsilon$ και $|v(z) - v_0| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο z_0, και επομένως $u(z) \to u_0$ και $v(z) \to v_0$.

Αντιστρόφως, έστω $u(z) \to u_0$ και $v(z) \to v_0$. Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$, και τότε ισχύει $|u(z) - u_0| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|v(z) - v_0| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο z_0. Από την τρίτη ανισότητα συνεπάγεται ότι ισχύει $|f(z) - w_0| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο z_0, και άρα $f(z) \to w_0$. $\square$

Πρόταση 3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ και $w_0 \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι φραγμένη κοντά στο z_0.*

Απόδειξη. Έστω $f = u + iv$ η μιγαδική μορφή της f και $w_0 = u_0 + iv_0$ η μιγαδική μορφή του w_0. Από την πρόταση 3.1 συνεπάγεται ότι $\lim_{z\to z_0} u(z) = u_0$ και $\lim_{z\to z_0} v(z) = v_0$. Βάσει της ανάλογης πρότασης για πραγματικές συναρτήσεις, οι u, v είναι φραγμένες κοντά στο z_0, δηλαδή υπάρχει $R > 0$ ώστε να ισχύει $|u(z)| \leq R$ και $|v(z)| \leq R$ για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο z_0. Άρα ισχύει

$$|f(z)| \leq |u(z)| + |v(z)| \leq 2R$$

για κάθε $z \in A$ το οποίο είναι αρκετά κοντά στο z_0, οπότε η f είναι φραγμένη κοντά στο z_0. $\square$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τους αλγεβρικούς κανόνες ορίων.

Πρόταση 3.3. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε*

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} (f(z) + g(z)) &= \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z),\\
\lim_{z\to z_0} (f(z) - g(z)) &= \lim_{z\to z_0} f(z) - \lim_{z\to z_0} g(z),\\
\lim_{z\to z_0} (f(z)g(z)) &= \lim_{z\to z_0} f(z) \lim_{z\to z_0} g(z),\\
\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)},\\
\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} &= \overline{\lim_{z\to z_0} f(z)},\\
\lim_{z\to z_0} |f(z)| &= \big|\lim_{z\to z_0} f(z)\big|.
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω ισότητες ισχύουν αρκεί να υπάρχουν τα όρια που εμφανίζονται στην δεξιά μεριά τους και η δεξιά μεριά τους να μην είναι απροσδιόριστη μορφή.

Μπορούμε να αποδείξουμε την πρόταση 3.3 με δύο τρόπους, όπως κάναμε με την ανάλογη πρόταση 2.5 για όρια ακολουθιών. Ο πρώτος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 3.1 και τους ανάλογους κανόνες για πραγματικές συναρτήσεις, θεωρώντας τους γνωστούς, και γράφοντας τις μιγαδικές μορφές των συναρτήσεων και των ορίων. Ο δεύτερος τρόπος είναι να μιμηθούμε τις αποδείξεις των ανάλογων κανόνων για πραγματικές συναρτήσεις. Αφήνουμε το καθήκον της απόδειξης στον αναγνώστη, και θα συνεχίσουμε με παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.1.7. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

όπου $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ και $a_n \neq 0$. Το πεδίο ορισμού της p είναι το $\mathbb{C}$.
Για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} p(z) = p(z_0).}$$

Αυτό αποδεικνύεται με πολλαπλή εφαρμογή των κανόνων αθροίσματος και γινομένου στα στοιχειώδη όρια $\lim_{z\to z_0} c = c$ και $\lim_{z\to z_0} z = z_0$.
Αν η πολυωνυμική συνάρτηση είναι βαθμού ≥ 1, δηλαδή αν $n \geq 1$ και $a_n \neq 0$, τότε

$$\boxed{\lim_{z\to \infty} p(z) = \infty.}$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$p(z) = z^n \Big(a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n} \Big) \to \infty \cdot a_n = \infty$$

Το όριο a_n της παρένθεσης προκύπτει με εφαρμογή των κανόνων αθροίσματος και γινομένου και από το ότι $\frac{1}{z} \to 0$ όταν $z \to \infty$. Το όριο του z^n προκύπτει από το ότι $|z^n| = |z|^n \to +\infty$ όταν $z \to \infty$ (επειδή $|z| \to +\infty$) ή από τον κανόνα γινομένου: $z^n \to \infty^n = \infty$.

Παράδειγμα 3.1.8. Έστω ρητή συνάρτηση

$$r(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0}{b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0},$$

όπου $a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_m\in\mathbb{C}$ και $a_n\neq 0$ και $b_m\neq 0$. Το πεδίο ορισμού της r είναι το $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\ldots,z_s\}$, όπου $z_1,\ldots,z_s$ είναι οι ρίζες της πολυωνυμικής συνάρτησης q. Είναι γνωστό ότι $0\leq s\leq m$. Τότε, κατ' αρχάς:

$$\boxed{\lim_{z\to\infty}r(z)=\begin{cases}\infty, & \text{αν } n>m\\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{αν } n=m\\ 0, & \text{αν } n<m\end{cases}}$$

Όλα αποδεικνύονται γράφοντας

$$r(z)=z^{n-m}\Big(a_n+a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots+a_0\frac{1}{z^n}\Big)\Big/\Big(b_m+b_{m-1}\frac{1}{z}+\cdots+b_0\frac{1}{z^m}\Big).$$

Αν $z_0\in\mathbb{C}$ και $q(z_0)\neq 0$, τότε με εφαρμογή του κανόνα λόγου:

$$\boxed{\lim_{z\to z_0}r(z)=r(z_0).}$$

Τέλος, έστω $z_0\in\mathbb{C}$ και $q(z_0)=0$. Δηλαδή το z_0 είναι μια οποιαδήποτε από τις ρίζες $z_1,\ldots,z_s$ της πολυωνυμικής συνάρτησης q. Τότε το πολυώνυμο $z-z_0$ διαιρεί το πολυώνυμο $q(z)$, οπότε υπάρχει ακέραιος $k\geq 1$ και πολυώνυμο $q_1(z)$ ώστε για κάθε z να είναι

$$q(z)=(z-z_0)^kq_1(z)\quad\text{και}\quad q_1(z_0)\neq 0.$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι η **πολλαπλότητα** της ρίζας z_0 του $q(z)$ είναι k. Επίσης, είτε $p(z_0)=0$ είτε $p(z_0)\neq 0$, υπάρχει ακέραιος $l\geq 0$ και πολυώνυμο $p_1(z)$ ώστε για κάθε z να είναι

$$p(z)=(z-z_0)^lp_1(z)\quad\text{και}\quad p_1(z_0)\neq 0.$$

Πράγματι, αν $p(z_0)=0$, τότε το $l\geq 1$ είναι η πολλαπλότητα του z_0 ως ρίζα του $p(z)$ και, αν $p(z_0)\neq 0$, τότε θεωρούμε $l=0$ (και λέμε ότι η πολλαπλότητα του z_0 ως ρίζα του $p(z)$ είναι μηδέν) και $p_1(z)=p(z)$. Άρα για κάθε z διαφορετικό από τις ρίζες του $q(z)$ ισχύει

$$r(z)=(z-z_0)^{l-k}\frac{p_1(z)}{q_1(z)}\quad\text{και}\quad p_1(z_0)\neq 0,\ q_1(z_0)\neq 0.$$

Το $\frac{p_1(z_0)}{q_1(z_0)}$ δεν είναι ούτε ∞ ούτε 0, οπότε

$$\boxed{\lim_{z\to z_0}r(z)=\begin{cases}\infty, & \text{αν } k>l\\ \frac{p_1(z_0)}{q_1(z_0)}, & \text{αν } k=l\\ 0, & \text{αν } k<l\end{cases}}$$

Παράδειγμα 3.1.9. Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y),$$

όπου $z=x+iy$ είναι η μιγαδική μορφή του z.
Έστω $z_0=x_0+iy_0$ η μιγαδική μορφή οποιουδήποτε z_0.
Όταν $z\to z_0$ συνεπάγεται $x\to x_0$ και $y\to y_0$, οπότε από τη συνέχεια των συναρτήσεων e^x, $\cos y$ και $\sin y$ συνεπάγεται $e^x\to e^{x_0}$, $\cos y\to\cos y_0$ και $\sin y\to\sin y_0$. Τέλος, από τους αλγεβρικούς κανόνες έχουμε ότι

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)\to e^{x_0}(\cos y_0+i\sin y_0)=e^{z_0}.$$

Δηλαδή,

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} e^z = e^{z_0}.}$$

Έχουμε, επίσης, τον κανόνα σύνθεσης για τον υπολογισμό ορίων.

Πρόταση 3.4. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A, $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του B, $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ και έστω ότι υπάρχει το $\lim_{w\to w_0} g(w)$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι ισχύει $f(z) \neq w_0$ για κάθε $z \in A$ κοντά στο z_0. Τότε*

$$\lim_{z\to z_0} g(f(z)) = \lim_{w\to w_0} g(w).$$

Τέλος, έχουμε την ισοδύναμη διατύπωση του ορίου συνάρτησης μέσω της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

Πρόταση 3.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε είναι $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (z_n) στο A για την οποία ισχύει $z_n \to z_0$ και $z_n \neq z_0$ για κάθε n συνεπάγεται $f(z_n) \to w_0$.*

Οι δύο τελευταίες προτάσεις αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο που αποδεικνύονται οι ανάλογες προτάσεις για πραγματικές συναρτήσεις και πραγματικές ακολουθίες. Ας αναλάβει ο αναγνώστης το καθήκον των δύο αποδείξεων.

Ασκήσεις.

3.1.1. Βρείτε τα $\lim_{z\to z_0} \frac{z^3-1}{z^2-1}$ και $\lim_{z\to z_0} \frac{z^2-1}{z^3-1}$ για κάθε $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

3.1.2. Ποιά από τα $\lim_{z\to 0} \operatorname{Re} z$, $\lim_{z\to\infty} \operatorname{Re} z$, $\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$, $\lim_{z\to\infty} \frac{z}{|z|}$ υπάρχουν;

3.1.3. Υπάρχει το $\lim_{z\to\infty} e^z$;

3.1.4. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{z\to 0} f(z) = w_0$ και ότι ισχύει $f\big(\frac{i}{n}\big) = \frac{(-1)^n}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε το w_0.

3.1.5. Έστω $f, g : D(0;1) \to \mathbb{C}$ και $g(z) = f(-iz)$ για κάθε $z \in D(0;1)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{z\to 0} f(z) = w_0$ αν και μόνο αν $\lim_{z\to 0} g(z) = w_0$.

3.1.6. Αποδείξτε με κάθε λεπτομέρεια ότι $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ αν και μόνο αν $\lim_{z\to 0} f\big(\frac{1}{z}\big) = w_0$.

3.2 Συνέχεια συναρτήσεων.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$ (οπότε $z_0 \in \mathbb{C}$). Η f χαρακτηρίζεται* ***συνεχής*** *στο z_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(z) \in D(f(z_0);\epsilon)$ για κάθε $z \in A \cap D(z_0;\delta)$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$.*

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Έστω ότι το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, δηλαδή ότι υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε $A \cap D(z_0; r_0) = \{z_0\}$.

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = r_0 > 0$, και τότε για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta = r_0$, *δηλαδή για* $z = z_0$, ισχύει $|f(z) - f(z_0)| = |f(z_0) - f(z_0)| = 0 < \epsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στο z_0. Συνοψίζουμε:

Αν το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι αυτομάτως συνεχής στο z_0.

Περίπτωση 2. Έστω ότι το z_0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του A ή, ισοδύναμα, ότι είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο z_0. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$. Προφανώς, συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$. Άρα $\lim_{z\to z_0} f(z) =$

$f(z_0)$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$. Παρατηρούμε ότι για $z = z_0$ έτσι κι αλλιώς ισχύει $|f(z) - f(z_0)| = |f(z_0) - f(z_0)| = 0 < \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$. Άρα η f είναι συνεχής στο z_0.
Συνοψίζουμε:
Αν το z_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Στην πράξη, η περίπτωση μεμονωμένου σημείου του πεδίου ορισμού συνάρτησης είναι αρκετά σπάνια, οπότε θα αντιμετωπίζουμε περιπτώσεις όπου η συνέχεια μιας συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της ισοδυναμεί με το ότι το όριό της στο σημείο αυτό είναι ίσο με την τιμή της στο ίδιο σημείο.

Ορισμός. *Η $f : A \to \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται **συνεχής στο πεδίο ορισμού της** ή, απλώς, **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.*

Παράδειγμα 3.2.1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση p είναι συνεχής (δηλαδή, συνεχής στο $\mathbb{C}$). Πράγματι, ισχύει $\lim_{z\to z_0} p(z) = p(z_0)$ για κάθε z_0.

Παράδειγμα 3.2.2. Κάθε ρητή συνάρτηση r είναι συνεχής, διότι ισχύει $\lim_{z\to z_0} r(z) = r(z_0)$ για κάθε z_0 στο πεδίο ορισμού της r, δηλαδή για κάθε z_0 που δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου στον παρονομαστή της r.

Παράδειγμα 3.2.3. Η εκθετική συνάρτηση e^z είναι συνεχής, διότι $\lim_{z\to z_0} e^z = e^{z_0}$ για κάθε z_0.

Οι επόμενες προτάσεις αποδεικνύονται εύκολα. Ας αναλάβει ο αναγνώστης τις αποδείξεις.

Πρόταση 3.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Έστω $f = u + iv$, όπου $u, v : A \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν οι u, v είναι και οι δυο συνεχείς στο z_0.*

Πρόταση 3.7. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο z_0, τότε και οι $f + g, f - g, fg, |f|, \overline{f} : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχείς στο z_0. Αν, επιπλέον, ισχύει $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο z_0.*

Πρόταση 3.8. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ και $w_0 = f(z_0) \in B$. Αν η f είναι συνεχής στο z_0 και η g είναι συνεχής στο w_0, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο z_0.*

Πρόταση 3.9. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A, $w_0 \in B$, $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ και έστω ότι η g είναι συνεχής στο w_0. Τότε*

$$\lim_{z\to z_0} g(f(z)) = g(w_0).$$

Πρόταση 3.10. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (z_n) στο A για την οποία ισχύει $z_n \to z_0$ συνεπάγεται $f(z_n) \to f(z_0)$.*

Ασκήσεις.

3.2.1. Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο 0;

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0 \end{cases}$$

3.2.2. Βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων. Ποιές από αυτές είναι συνεχείς; Βρείτε τα όριά τους στα σημεία στα οποία δεν ορίζονται.

$$\frac{z^3-1}{z^2-1}, \quad e^{z^2-3z+1}, \quad \frac{e^z+1}{e^z-1}, \quad e^{1/z}.$$

3.2.3. Υπάρχει $f : \overline{D}(0;1) \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\overline{D}(0;1)$ ώστε να ισχύει $f(1-\frac{1}{n}) = 1-\frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \overline{D}(0;1)$;

3.2.4. Θεωρήστε τη συνάρτηση $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \to (-\pi, \pi]$ και την ημιευθεία $l = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \leq 0\} = (-\infty, 0]$. Δείτε την άσκηση 2.3.2, και αποδείξτε ότι η Arg είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus l$, και ότι για κάθε $z_0 \in l$ δεν υπάρχει το $\lim_{z\to z_0} \mathrm{Arg}\, z$. Υπάρχει το $\lim_{z\to\infty} \mathrm{Arg}\, z$;

3.2.5. (i) Έστω ανοικτό A και $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το $U \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό, αποδείξτε ότι το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό.
(ii) Έστω κλειστό A και $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το $F \subseteq \mathbb{C}$ είναι κλειστό, αποδείξτε ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

3.3 Συνεχείς συναρτήσεις και συμπαγή σύνολα.

Θεώρημα 3.1. *Έστω $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο συμπαγές K. Τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (w_n) στο $f(K)$.
Για κάθε n υπάρχει $z_n \in K$ ώστε $f(z_n) = w_n$. Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (z_{n_k}) ώστε $z_{n_k} \to z$ για κάποιο $z \in K$. Επειδή η f είναι συνεχής στο z, συνεπάγεται $w_{n_k} = f(z_{n_k}) \to f(z) \in f(K)$.
Άρα κάθε ακολουθία στο $f(K)$ έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $f(K)$, και επομένως το $f(K)$ είναι συμπαγές. ☐

Ένα πρώτο πόρισμα του Θεωρήματος 3.1 είναι το εξής.

Πρόταση 3.11. *Έστω $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο συμπαγές K. Τότε η f είναι φραγμένη στο K.*

Απόδειξη. Το σύνολο τιμών $f(K)$ είναι συμπαγές, οπότε είναι φραγμένο. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη στο K. ☐

Λήμμα 3.1. *Κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Το K είναι κλειστό και φραγμένο. Επειδή το K είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι το supremum του και το infimum του είναι (πραγματικοί) αριθμοί.
Έστω $u = \sup K$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $u - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του K, οπότε υπάρχει $u_n \in K$ ώστε $u - \frac{1}{n} < u_n \leq u$. Τότε η ακολουθία (u_n) είναι στο K και $u_n \to u$. Άρα το u είναι οριακό σημείο του K και, επειδή το K είναι κλειστό σύνολο, συνεπάγεται $u \in K$. Άρα το u είναι το supremum του K και ανήκει στο K, οπότε είναι το μέγιστο στοιχείο του K.
Με τον ίδιο τρόπο, με το infimum του K, αποδεικνύεται ότι το K έχει ελάχιστο στοιχείο. ☐

Μετά από το Λήμμα 3.1 έχουμε ένα ακόμη πόρισμα του Θεωρήματος 3.1.

Πρόταση 3.12. *Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής στο συμπαγές K. Τότε η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K.*

Απόδειξη. Επειδή το K είναι συμπαγές, το $f(K)$ είναι, επίσης, συμπαγές. Επειδή το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο, τα οποία είναι, φυσικά, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο K. ☐

Πόρισμα 3.1. *Έστω $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο συμπαγές K. Αν οι $u, v, |f| : K \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος, και το μέτρο της f, τότε καθεμία από τις $u, v, |f|$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K.*

Απόδειξη. Απλά παρατηρούμε ότι οι $u, v, |f|$ είναι συνεχείς στο συμπαγές K. □

Ορισμός. *Η $f : A \to \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z') - f(z'')| < \epsilon$ για κάθε $z', z'' \in A$ με $|z' - z''| < \delta$.*

Μια ακόμη γενίκευση γνωστού αποτελέσματος από τα βασικά μαθήματα Ανάλυσης (όπου $K = [a, b]$) είναι το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.13. *Έστω $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο συμπαγές K. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $z', z'' \in K$ με $|z' - z''| < \delta$ και $|f(z') - f(z'')| \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $z'_n, z''_n \in K$ με $|z'_n - z''_n| < \frac{1}{n}$ και $|f(z'_n) - f(z''_n)| \geq \epsilon$.
Το K είναι συμπαγές, οπότε υπάρχει (z'_{n_k}) ώστε $z'_{n_k} \to z$ για κάποιο $z \in K$. Τότε

$$|z''_{n_k} - z| \leq |z''_{n_k} - z'_{n_k}| + |z'_{n_k} - z| < \frac{1}{n_k} + |z'_{n_k} - z| \to 0,$$

οπότε $z''_{n_k} \to z$.
Η f είναι συνεχής στο z, οπότε $f(z'_{n_k}) \to f(z)$ και $f(z''_{n_k}) \to f(z)$. Άρα $f(z'_{n_k}) - f(z''_{n_k}) \to 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ισχύει $|f(z'_{n_k}) - f(z''_{n_k})| \geq \epsilon$ για κάθε k. □

Ασκήσεις.

3.3.1. Έστω $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο συμπαγές K, και έστω ότι ισχύει $f(z) \neq w_0$ για κάθε $z \in K$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - w_0| \geq \epsilon$ για κάθε $z \in K$.

3.3.2. Έστω $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο συμπαγές K, και έστω ότι ισχύει $|f(z)| < M$ για κάθε $z \in K$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M' < M$ ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq M'$ για κάθε $z \in K$.

3.3.3. (i) Αν η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο A.
(ii) Είναι η $f : D(0; 1) \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = \frac{1}{1-z}$ συνεχής ή ομοιόμορφα συνεχής στο $D(0; 1)$;

3.3.4. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\mathbb{C}$ ώστε $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ με $w_0 \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{C}$.

3.3.5. Η $f : A \to \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται **συνάρτηση Lipschitz** στο A αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(z') - f(z'')| \leq M|z' - z''|$ για κάθε $z', z'' \in A$. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνάρτηση Lipschitz στο A, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

3.4 Συνεχείς συναρτήσεις και συνεκτικά σύνολα.

Πρόταση 3.14. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο χωρίο A. Τότε η f έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο A.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι (πραγματικοί) αριθμοί u', u'' είναι τιμές της f στο A. Δηλαδή υπάρχουν $z', z'' \in A$ ώστε

$$f(z') = u', \quad f(z'') = u''.$$

Τώρα έστω (πραγματικός, εννοείται) αριθμός u με $u' < u < u''$. Θα αποδείξουμε ότι και το u είναι τιμή της f στο A.

Επειδή το A είναι συνεκτικό σύνολο και $z', z'' \in A$, υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A η οποία συνδέει τα z', z''.
Τώρα θα θεωρήσουμε πρώτα την ειδική περίπτωση που αυτή η πολυγωνική γραμμή αποτελείται από ένα μόνο ευθ. τμήμα, δηλαδή υποθέτουμε ότι το ευθ.τμήμα $[z', z'']$ περιέχεται στο A. Τα σημεία του $[z', z'']$ περιγράφονται ως $(1-t)z' + tz''$ με $t \in [0, 1]$. Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) := f((1-t)z' + tz'') \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1].$$

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $g(0) = f(z') = u'$, $g(1) = f(z'') = u''$. Από το γνωστό Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, συνεπάγεται ότι υπάρχει $t \in (0, 1)$ ώστε $g(t) = u$, δηλαδή $f((1-t)z' + tz'') = u$. Άρα υπάρχει σημείο του ευθ. τμήματος $[z', z'']$, και επομένως του A, στο οποίο η f έχει τιμή u.
Τώρα θεωρούμε την γενική περίπτωση που η πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα z', z'' είναι η $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n]$ με $z_1 = z'$ και $z_n = z''$.
Αν $f(z_k) = u$ για κάποιο $k = 1, \ldots, n$, τότε το u είναι αυτομάτως τιμή της f στο A.
Έστω $f(z_k) \neq u$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Επειδή

$$f(z_1) = f(z') = u' < u < u'' = f(z'') = f(z_n),$$

συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $k = 1, \ldots, n-1$ ώστε $f(z_k) < u < f(z_{k+1})$. Τότε εφαρμόζουμε αυτό που αποδείξαμε για την ειδική περίπτωση του ευθ. τμήματος $[z_k, z_{k+1}]$, και έχουμε ότι υπάρχει σημείο του ευθ. τμήματος $[z_k, z_{k+1}]$, και επομένως του A, στο οποίο η f έχει τιμή u. □

Πόρισμα 3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{Z}$ συνεχής στο χωρίο A. Τότε η f είναι σταθερή στο A.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο A, οπότε έχει δύο τουλάχιστον διαφορετικές τιμές u' και u''. Επειδή η f έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο A, πρέπει κάθε πραγματικός αριθμός ανάμεσα στα u', u'' να είναι τιμή της f. Αυτό είναι αδύνατο, αφού η f έχει μόνο ακέραιες τιμές. Άρα η f είναι σταθερή. □

Πρόταση 3.15. *Έστω χωρίο A. Το A δεν μπορεί να γραφτεί ως ένωση $A = B \cup C$ δύο ξένων μη-κενών ανοικτών συνόλων B, C.*

Απόδειξη. Έστω ότι $A = B \cup C$, όπου τα B, C είναι ξένα, μη-κενά και ανοικτά σύνολα. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Ορίζουμε την συνάρτηση $f : A \to \mathbb{Z}$ με τύπο

$$f(z) := \begin{cases} 1, & \text{αν } z \in B \\ 0, & \text{αν } z \in C \end{cases}$$

Αν $z \in B$, τότε, επειδή το B είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq B$. Τότε στον ανοικτό δίσκο $D(z; r)$ η f είναι σταθερή 1, και άρα είναι συνεχής στο κέντρο z του δίσκου. Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του B. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του C. Άρα η f είναι συνεχής στο χωρίο A. Από το Πόρισμα 3.2 συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή, αλλά αυτό είναι άτοπο λόγω του τύπου της f. □

Ασκήσεις.

3.4.1. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο χωρίο A, και έστω $z', z'' \in A$ ώστε τα $f(z')$ και $f(z'')$ να είναι το ένα εσωτερικό σημείο και το άλλο εξωτερικό σημείο ενός δίσκου. Αποδείξτε ότι υπάρχει $z \in A$ ώστε το $f(z)$ να είναι συνοριακό σημείο του δίσκου.

3.4.2. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο χωρίο A, και έστω $z', z'' \in A$ ώστε τα $f(z')$ και $f(z'')$ να ανήκουν το ένα στο ένα και το άλλο στο άλλο από τα δύο ανοικτά ημιεπίπεδα που ορίζονται από μια ευθεία l. Αποδείξτε ότι υπάρχει $z \in A$ ώστε το $f(z)$ να ανήκει στην l.

3.5 Συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου.

Έχουμε αποδείξει ότι η εκθετική συνάρτηση $w = e^z$ είναι συνεχής, και τώρα θα μελετήσουμε το ζήτημα του αν αυτή είναι αντιστρέψιμη και αν έχει συνεχή αντίστροφη συνάρτηση.

Γνωρίζουμε, για κάθε $w \neq 0$, την ισοδυναμία

$$e^z = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \log w = \ln |w| + i \arg w.$$

Για κάθε $w \neq 0$ υπάρχουν άπειρα $\arg w$, τα οποία ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, οπότε υπάρχουν άπειρα $\log w$, τα οποία ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $i2\pi$. Επομένως η εκθετική συνάρτηση $w = e^z$ από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι επί αλλά όχι ένα-προς-ένα. Μάλιστα, είναι *άπειρο-προς-ένα* αφού σε κάθε w στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ αντιστοιχούν άπειρες τιμές του z, τα $\log w$, στο $\mathbb{C}$. Άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για αντίστροφη συνάρτηση, παρά μόνο μέσω του εξής μη συμβατικού ορισμού (πολύ συνηθισμένου σε ανάλογες περιπτώσεις στη Μιγαδική Ανάλυση).

Ορισμός. *Λέμε ότι η* **πλειότιμη λογαριθμική συνάρτηση**

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής.

Σύμφωνα με τον συμβατικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, η "συνάρτηση" που ορίσαμε δεν είναι συνάρτηση, διότι στο οποιοδήποτε w στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ δεν αντιστοιχεί ένα μόνο $z = \log w$ στο $\mathbb{C}$. Γι αυτό λέμε *πλειότιμη συνάρτηση*. Μία συνάρτηση, με τη συμβατική έννοια, είναι *μονότιμη συνάρτηση*.

Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της μη-αντιστρεψιμότητας της εκθετικής συνάρτησης $w = e^z$ είναι να αντιστοιχίσουμε σε κάθε w, το οποίο μεταβάλλεται σε κατάλληλο υποσύνολο A του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, *μόνο ένα* από τα $\log w$, και αυτό να το ονομάσουμε $f(w)$. Θα περιγράψουμε τώρα κάποιους συγκεκριμένους τρόπους επιλογής αφ' ενός κατάλληλου συνόλου A αφ' ετέρου για κάθε $w \in A$ ενός από τα $\log w$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις f οι οποίες προκύπτουν να είναι *συνεχείς*. Ο σχετικός ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f : A \to \mathbb{C}$. Αν για κάθε $w \in A$ το $f(w)$ είναι ένα από τα* $\log w$*, και αν η f είναι συνεχής στο A, τότε λέμε ότι η f είναι* **συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A**.

Πρέπει να θυμόμαστε ότι το να είναι το $f(w)$ ένα από τα $\log w$ σημαίνει ότι το $f(w)$ είναι μία από τις λύσεις της εξίσωσης $e^z = w$, δηλαδή

$$\text{το } f(w) \text{ είναι ένα από τα } \log w \quad \Leftrightarrow \quad e^{f(w)} = w.$$

Στο w-επίπεδο θεωρούμε μια οποιαδήποτε, αλλά συγκεκριμένη, ημιευθεία L με κορυφή το σημείο 0, και έστω ότι η L σχηματίζει γωνία Θ με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα του w-επιπέδου. Γνωρίζουμε ότι στην ίδια ημιευθεία L αντιστοιχούν άπειρες τέτοιες γωνίες Θ, αλλά εμείς επιλέγουμε μια οποιαδήποτε από αυτές τις γωνίες (και την κρατάμε σταθερή στα επόμενα). Αν αφαιρέσουμε την ημιευθεία L από το w-επίπεδο, τότε σχηματίζεται το σύνολο

$$A := \mathbb{C} \setminus L = \{w = re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty, \ \Theta < \theta < \Theta + 2\pi\}.$$

Κατόπιν, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θεωρούμε την αντίστοιχη οριζόντια ανοικτή ζώνη στο z-επίπεδο

$$Z_k := \{z = x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty, \ \Theta + 2k\pi < y < \Theta + 2(k+1)\pi\}.$$

Η οριζόντια ανοικτή ζώνη Z_k βρίσκεται ανάμεσα σε δύο οριζόντιες ευθείες: η κάτω ευθεία έχει εξίσωση $y = \Theta + 2k\pi$ και η πάνω ευθεία έχει εξίσωση $y = \Theta + 2(k+1)\pi$. Η ζώνη Z_k έχει κατακόρυφο πλάτος 2π και είναι ανοικτό σύνολο, αφού δεν περιέχει κανένα σημείο των συνοριακών ευθειών της. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ζώνες Z_k και Z_{k+1} είναι διαδοχικές: η Z_k είναι ακριβώς κάτω από την Z_{k+1} και έχουν κοινή μία από τις συνοριακές ευθείες τους. Τέλος, όλες μαζί οι ζώνες Z_k, με $k \in \mathbb{Z}$, καλύπτουν ολόκληρο το z-επίπεδο (εκτός από τις συνοριακές ευθείες τους).

Τώρα θα δούμε ότι *η εκθετική συνάρτηση $w = e^z$, περιορισμένη σε οποιοδήποτε Z_k, είναι ένα-προς-ένα στο Z_k και επί του A.*

Έστω $z \in Z_k$ με μιγαδική μορφή $z = x + iy$, οπότε $\Theta + 2k\pi < y < \Theta + 2(k+1)\pi$. Τότε $e^z = e^x e^{iy}$, και επομένως $e^z \in A$. Άρα η εκθετική συνάρτηση $w = e^z$ απεικονίζει το Z_k μέσα στο A.
Τώρα, έστω $w \in A$, οπότε $w = re^{i\theta}$ με $0 < r < +\infty$ και $\Theta < \theta < \Theta + 2\pi$. Τότε το $z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$ ανήκει στο Z_k (διότι $\Theta + 2k\pi < \theta + 2k\pi < \Theta + 2(k+1)\pi$), και ισχύει

$$e^z = e^{\ln r + i(\theta+2k\pi)} = re^{i\theta}e^{i2k\pi} = re^{i\theta} = w.$$

Άρα η εκθετική συνάρτηση $w = e^z$ από το Z_k στο A είναι επί του A.
Τέλος, έστω $z_1, z_2 \in Z_k$ με $z_1 \neq z_2$ και $e^{z_1} = e^{z_2}$. Τότε τα z_1, z_2 διαφέρουν κατά ακέραιο (μη-μηδενικό) πολλαπλάσιο του $i2\pi$, οπότε η κατακόρυφη απόστασή τους είναι ακέραιο (μη-μηδενικό) πολλαπλάσιο του 2π. Αυτό είναι αδύνατο αφού το κατακόρυφο πλάτος της ζώνης Z_k είναι 2π (και δεν περιέχει τις συνοριακές ευθείες της). Άρα η εκθετική συνάρτηση $w = e^z$ από το Z_k στο A είναι ένα-προς-ένα στο Z_k.

Αφού λοιπόν η $w = e^z$ είναι ένα-προς-ένα στο Z_k και επί του A, συνεπάγεται ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση από το A στο Z_k, την οποία θα συμβολίσουμε $f_k : A \to Z_k$. Αυτομάτως έχουμε την ισοδυναμία:

$$\text{για } w \in A,\ z \in Z_k : \qquad w = e^z \quad \Leftrightarrow \quad f_k(w) = z.$$

Δηλαδή, για κάθε $w \in A$ το $f_k(w)$ είναι στο Z_k και είναι λύση της εξίσωσης $e^z = w$. Με άλλα λόγια, το $f_k(w)$ είναι ένα από τα $\log w$, εκείνο το οποίο ανήκει στην ζώνη Z_k. Αφού το $f_k(w)$ είναι ένα από τα $\log w$, γράφεται $f_k(w) = \ln|w| + i\theta$ όπου θ είναι ένα από τα $\arg w$. Επειδή το $f_k(w)$ ανήκει στην ζώνη Z_k, το θ είναι το $\arg w$ που ανήκει στο διάστημα $(\Theta + 2k\pi, \Theta + 2(k+1)\pi)$.

Συνοψίζουμε:

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, έχουμε ορίσει συνάρτηση

$$f_k : A \to Z_k$$

με τύπο

$$f_k(w) \text{ είναι το μοναδικό } \log w \text{ στην ανοικτή ζώνη } Z_k$$

ή, πιο λεπτομερειακά,

$$f_k(w) = \ln|w| + i\theta, \quad \text{όπου } \theta \text{ είναι το μοναδικό } \arg w \text{ στο διάστημα } (\Theta + 2k\pi, \Theta + 2(k+1)\pi).$$

Πρόταση 3.16. *Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, η συνάρτηση $f_k : A \to Z_k$ που μόλις ορίσαμε είναι συνεχής, δηλαδή είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο χωρίο A.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ακολουθία (w_n) και σημείο w στο A ώστε $w_n \to w$, και θα αποδείξουμε ότι $f_k(w_n) \to f_k(w)$. Τότε, βάσει της Πρότασης 3.10, θα έχουμε αποδείξει ότι η f_k είναι συνεχής σε κάθε $w \in A$.
Έστω $f_k(w_n) = \ln|w_n| + i\theta_n$ και $f_k(w) = \ln|w| + i\theta$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\theta_n, \theta \in (\Theta + 2k\pi, \Theta + 2(k+1)\pi) \quad \text{και} \quad w_n = |w_n|e^{i\theta_n},\ w = |w|e^{i\theta}.$$

Από $w_n \to w$ συνεπάγεται $|w_n| \to |w|$, και άρα

$$\ln |w_n| \to \ln |w|.$$

Επίσης, από $w_n \to w$ συνεπάγεται $\frac{w_n}{|w_n|} \to \frac{w}{|w|}$, δηλαδή $e^{i\theta_n} \to e^{i\theta}$. Ορίζουμε $\phi_n := \theta_n - \theta$ και τότε $e^{i\phi_n} = \frac{e^{i\theta_n}}{e^{i\theta}} \to 1$ ή, ισοδύναμα, $\cos\phi_n + i\sin\phi_n \to 1$, δηλαδή

$$\cos\phi_n \to 1, \quad \sin\phi_n \to 0.$$

Από την $\Theta + 2k\pi < \theta_n < \Theta + 2(k+1)\pi$ συνεπάγεται $\Theta - \theta + 2k\pi < \theta_n - \theta < \Theta - \theta + 2(k+1)\pi$. Δηλαδή

$$-\psi < \phi_n < 2\pi - \psi$$

όπου το $\psi = \theta - \Theta - 2k\pi$ ικανοποιεί την $0 < \psi < 2\pi$ (διότι $\Theta + 2k\pi < \theta < \Theta + 2(k+1)\pi$).
Έστω ότι ισχύει $-\psi < \phi_n < -\frac{\pi}{2}$. Τότε εύκολα βλέπουμε (π.χ. με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου) ότι $\cos\phi_n < \max\{\cos\psi, 0\} < 1$. Επειδή $\cos\phi_n \to 1$, αυτή η ανισότητα μπορεί να ισχύει μόνο μέχρι κάποια τιμή του δείκτη n.
Έστω ότι ισχύει $\frac{\pi}{2} < \phi_n < 2\pi - \psi$. Τότε πάλι βλέπουμε εύκολα ότι $\cos\phi_n < \max\{\cos\psi, 0\} < 1$. Και πάλι, επειδή $\cos\phi_n \to 1$, αυτή η ανισότητα μπορεί να ισχύει μόνο μέχρι κάποια τιμή του δείκτη n.
Άρα ισχύει τελικά ότι $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_n \leq \frac{\pi}{2}$. Τότε, από μια γνωστή ανισότητα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε ότι ισχύει τελικά

$$\frac{2}{\pi}|\,\phi_n| \leq |\sin\phi_n|.$$

Επειδή $\sin\phi_n \to 0$, συνεπάγεται $\phi_n \to 0$, και άρα

$$\theta_n \to \theta.$$

Από $\ln |w_n| \to \ln |w|$ και $\theta_n \to \theta$ συνεπάγεται $f_k(w_n) \to f_k(w)$. □

Έτσι στο σύνολο A ορίζονται άπειροι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου, οι συναρτήσεις $f_k : A \to Z_k$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Θα δούμε τώρα πώς σχετίζονται δύο τέτοιοι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο σύνολο A. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_{k'} : A \to Z_{k'}$ και $f_{k''} : A \to Z_{k''}$ με $k', k'' \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $w \in A$ είναι

$$f_{k'}(w) = \ln |w| + i\theta', \quad f_{k''}(w) = \ln |w| + i\theta'',$$

όπου θ' είναι το μοναδικό $\arg w$ στο $(\Theta + 2k'\pi, \Theta + 2(k'+1)\pi)$ και θ'' είναι το μοναδικό $\arg w$ στο $(\Theta + 2k''\pi, \Theta + 2(k''+1)\pi)$. Επειδή τα θ', θ'' είναι δύο από τα $\arg w$, συνεπάγεται ότι $\theta'' - \theta' = 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Επίσης, από τις

$$\Theta + 2k'\pi < \theta' < \Theta + 2(k'+1)\pi), \quad \Theta + 2k''\pi < \theta'' < \Theta + 2(k''+1)\pi)$$

συνεπάγεται

$$2(k'' - k' - 1)\pi < \theta'' - \theta' < 2(k'' - k' + 1)\pi$$

και άρα $(k'' - k') - 1 < k < (k'' - k') + 1$. Επομένως $k = k'' - k'$, οπότε

$$f_{k''}(w) - f_{k'}(w) = i(\theta'' - \theta') = i2(k'' - k')\pi.$$

Ο ακέραιος $k'' - k'$ δεν εξαρτάται από το $w \in A$, και συμπεραίνουμε ότι οι $f_{k''}, f_{k'}$ διαφέρουν κατά *σταθερό* ακέραιο πολλαπλάσιο του $i2\pi$ στο σύνολο A. Ειδικώτερα, με $k'' = k$ και $k' = 0$ έχουμε ότι

$$f_k = f_0 + i2k\pi.$$

Δηλαδή κάθε συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A προκύπτει από έναν από αυτούς, π.χ. τον f_0, προσθέτοντας μια οποιαδήποτε σταθερά της μορφής $i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Και τώρα προκύπτει η εξής ερώτηση: υπάρχουν άλλοι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο ίδιο σύνολο A και ποιοί είναι αυτοί; Το ερώτημα θα το απαντήσουμε αφού δούμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.17. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $h, g : A \to \mathbb{C}$. Αν το σύνολο A είναι χωρίο (δηλαδή ανοικτό και συνεκτικό) και αν οι h, g είναι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A, τότε οι h, g διαφέρουν στο A κατά σταθερά της μορφής $i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.*
Ειδικώτερα, αν οι g, h έχουν την ίδια τιμή σε κάποιο $w_0 \in A$, τότε ταυτίζονται στο A.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $q : A \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$q(w) := \frac{1}{i2\pi}(h(w) - g(w)) \quad \text{για κάθε } w \in A.$$

Επειδή για κάθε $w \in A$ τα $h(w)$, $g(w)$ είναι δύο από τα $\log w$, συνεπάγεται ότι το $q(w)$ είναι ακέραιος. Άρα

$$q : A \to \mathbb{Z}.$$

Επίσης, επειδή οι g, h είναι συνεχείς στο A, η q είναι κι αυτή συνεχής στο A.
Επειδή το A είναι χωρίο, από το Πόρισμα 3.2 συνεπάγεται ότι η q είναι *σταθερή* στο A. Δηλαδή υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε να είναι $q(w) = k$ για κάθε w στο A, και άρα

$$h(w) - g(w) = i2k\pi \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{A}.$$

Το τελευταίο συμπέρασμα είναι προφανές: αν ισχύει $h(w_0) = g(w_0)$, τότε, επειδή η $h - g$ είναι σταθερή στο A, συνεπάγεται ότι ισχύει $h(w) - g(w) = h(w_0) - g(w_0) = 0$ για κάθε $w \in A$ οπότε $h(w) = g(w)$ για κάθε $w \in A$. □

Επειδή το σύνολο $A = \mathbb{C} \setminus L$ που εξετάζουμε είναι χωρίο, συμπεραίνουμε ότι οι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A είναι ακριβώς οι συναρτήσεις $f_k : A \to Z_k$ με $k \in \mathbb{Z}$ που έχουμε περιγράψει, και κανένας άλλος.

Ας συνοψίσουμε ακόμη μια φορά:

Αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0, τότε στο συμπληρωματικό ανοικτό σύνολο A ορίζονται άπειροι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το A επί μιας συγκεκριμένης οριζόντιας ανοικτής ζώνης Z του z-επιπέδου η οποία έχει κατακόρυφο πλάτος 2π. Οι διάφορες αυτές ζώνες, που αντιστοιχούν στους διάφορους κλάδους του λογαρίθμου (στο ίδιο σύνολο A), είναι ξένες ανά δύο, διαδοχικές και καλύπτουν το z-επίπεδο (εκτός από τις συνοριακές ευθείες τους).
Φυσικά, αν αλλάξουμε την αρχική ημιευθεία η οποία καθορίζει το σύνολο A, τότε αλλάζει το A καθώς και οι αντίστοιχες ζώνες και οι αντίστοιχοι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου.

Παράδειγμα 3.5.1. Έστω ότι η ημιευθεία L με κορυφή το 0 είναι ο αρνητικός πραγματικός ημιάξονας στο w-επίπεδο, ο οποίος σχηματίζει γωνία $\Theta = -\pi$ με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα. Τότε ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \{w = re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty,\ -\pi < \theta < \pi\}$$

με σύνολο τιμών την οριζόντια ανοικτή ζώνη

$$Z_0 = \{z = x + iy \,|\, -\infty < x < +\infty,\ -\pi < y < \pi\}.$$

Αυτός ο συνεχής κλάδος του λογαρίθμου είναι η συνάρτηση

$$f_0 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to Z_0$$

με τύπο

$$f_0(w) = \ln|w| + i\theta, \quad \text{όπου } \theta \text{ είναι το μοναδικό } \arg w \text{ στο } (-\pi, \pi).$$

Προφανώς, το $f_0(w)$ ταυτίζεται με τον *πρωτεύοντα λογάριθμο* του w που τον έχουμε συμβολίσει $\operatorname{Log} w$. Άρα

$$f_0(w) = \operatorname{Log} w \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Κάθε άλλος συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ διαφέρει από την συνάρτηση Log κατά σταθερό ακέραιο πολλαπλάσιο του $i2\pi$. Δηλαδή για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ με σύνολο τιμών το

$$Z_k = \{z = x + iy \mid -\infty < x < +\infty,\ -\pi + 2k\pi < y < -\pi + 2(k+1)\pi\}.$$

Αυτός ο συνεχής κλάδος του λογαρίθμου είναι η συνάρτηση

$$f_k : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to Z_k$$

με τύπο

$$f_k(w) = \operatorname{Log} w + i2k\pi.$$

(i) Τώρα ας βρούμε τον συνεχή κλάδο του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ με τιμή $z = 0$ για $w = 1$. Στην $f_k(w) = \operatorname{Log} w + i2k\pi$ θέτουμε $w = 1$ και $f_k(1) = 0$, και βρίσκουμε τον ακέραιο k. Επειδή $\operatorname{Log} 1 = 0$, προκύπτει $k = 0$. Άρα ο συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ με τιμή $z = 0$ για $w = 1$ είναι ο πρωτεύων κλάδος του λογαρίθμου, δηλαδή η συνάρτηση με τύπο $f_0(w) = \operatorname{Log} w$.
(ii) Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τον συνεχή κλάδο του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ με τιμή $z = i4\pi$ για $w = 1$.
Στην $f_k(w) = \operatorname{Log} w + i2k\pi$ θέτουμε $w = 1$ και $f_k(1) = i4\pi$, και βρίσκουμε τον ακέραιο k. Επειδή $\operatorname{Log} 1 = 0$, προκύπτει $k = 2$. Άρα ο συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ με τιμή $z = i4\pi$ για $w = 1$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f_2(w) = \operatorname{Log} w + i4\pi$. Το σύνολο τιμών αυτής της συνάρτησης είναι η οριζόντια ανοικτή ζώνη $Z_2 = \{x + iy \mid -\infty < x < +\infty, 3\pi < y < 5\pi\}$.

Παράδειγμα 3.5.2. Έστω ότι η ημιευθεία L με κορυφή το 0 είναι ο θετικός πραγματικός ημιάξονας στο w-επίπεδο, ο οποίος σχηματίζει γωνία $\Theta = 0$ με τον εαυτό του. Άρα όλοι οι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ περιγράφονται ως εξής. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ με σύνολο τιμών

$$Z_k = \{z = x + iy \mid -\infty < x < +\infty,\ 2k\pi < y < 2(k+1)\pi\}.$$

Αυτός ο συνεχής κλάδος του λογαρίθμου είναι η συνάρτηση

$$f_k : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \to Z_k$$

με τύπο

$$f_k(w) = \ln|w| + i\theta, \quad \text{όπου } \theta \text{ είναι το μοναδικό } \arg w \text{ στο } (2k\pi, 2(k+1)\pi).$$

Ας βρούμε τώρα τον συνεχή κλάδο του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ με τιμή $z = i(\frac{\pi}{2} + 4\pi)$ για $w = i$.
Στην $f_k(w) = \ln|w| + i\theta$ θέτουμε $w = i$ και $f_k(i) = i(\frac{\pi}{2} + 4\pi)$, και βρίσκουμε $\theta = \frac{\pi}{2} + 4\pi$. Το θ που βρήκαμε πρέπει να είναι το μοναδικό $\arg i$ στο διάστημα $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$. Η τιμή του ακέραιου k για την οποία ισχύει αυτό είναι η $k = 2$. Άρα ο συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ με τιμή $z = i(\frac{\pi}{2} + 4\pi)$ για $w = i$ είναι η συνάρτηση

$$f_2 : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \to Z_2$$

με τύπο

$$f_2(w) = \ln|w| + i\theta, \quad \text{όπου } \theta \text{ είναι το μοναδικό } \arg w \text{ στο } (4\pi, 6\pi).$$

Ορίσαμε συνεχείς κλάδους του λογαρίθμου σε σύνολα της μορφής A τα οποία προκύπτουν αφαιρώντας μία ημιευθεία L από το w-επίπεδο η οποία έχει κορυφή το 0. Δεν θα μπορούσε άραγε το σύνολο A να περιλαμβάνει και κάποια σημεία της ημιευθείας;

Πρόταση 3.18. *Δεν μπορεί να ορισθεί συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε σύνολο γνήσια μεγαλύτερο του A.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς η κορυφή της ημιευθείας L, το 0, δεν μπορεί να συμπεριληφθεί στο πεδίο ορισμού A ενός συνεχούς κλάδου του λογαρίθμου, διότι δεν ορίζεται το $\log 0$.
Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $w \in L$ με $w \neq 0$. Τότε είναι $w = re^{i\Theta}$ με $r = |w| > 0$. Ας θεωρήσουμε και τις ακολουθίες (w_n') και (w_n'') με τύπους

$$w_n' = re^{i(\Theta+\frac{\pi}{n})}, \quad w_n'' = re^{i(\Theta+2\pi-\frac{\pi}{n})}.$$

Και οι δυο ακολουθίες είναι στο σύνολο A (και μάλιστα πάνω στον κύκλο $C(0;r)$), συγκλίνουν στο σημείο $re^{i\Theta} = w$, και βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές της ημιευθείας L.
Ας θεωρήσουμε τώρα και τον συνεχή κλάδο f_0 του λογαρίθμου στο σύνολο A, όπως τον ορίσαμε προηγουμένως. Παρατηρούμε ότι

$$f_0(w_n') = \ln r + i\Big(\Theta + \frac{\pi}{n}\Big) \to \ln r + i\Theta$$

και

$$f_0(w_n'') = \ln r + i\Big(\Theta + 2\pi - \frac{\pi}{n}\Big) \to \ln r + i(\Theta + 2\pi).$$

Έστω ότι η f_0 μπορεί να ορισθεί και στο w ώστε να είναι συνεχής και στο w.
Τότε, επειδή $w_n' \to w$ και $w_n'' \to w$, συνεπάγεται $f_0(w_n') \to f_0(w)$ και $f_0(w_n'') \to f_0(w)$. Όμως είδαμε ότι οι ακολουθίες $(f_0(w_n'))$ και $(f_0(w_n'))$ έχουν διαφορετικά όρια, και καταλήγουμε σε άτοπο.
Το ίδιο ισχύει για κάθε συνεχή κλάδο του λογαρίθμου $f_k = f_0 + i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, με τις ίδιες ακολουθίες (w_n') και (w_n'') βρίσκουμε

$$f_k(w_n') = f_0(w_n') + i2k\pi \to \ln r + i\Theta + i2k\pi,$$

$$f_k(w_n'') = f_0(w_n') + i2k\pi \to \ln r + i(\Theta + 2\pi) + i2k\pi,$$

οπότε πάλι οι ακολουθίες $(f_k(w_n'))$ και $(f_k(w_n'))$ έχουν διαφορετικά όρια. □

Σχόλιο. Στους συνεχείς κλάδους του λογαρίθμου $f_k : A \to Z_k$ που έχουμε εξετάσει έχουμε συμβολίσει w την ανεξάρτητη μεταβλητή στο πεδίο ορισμού A και z την εξαρτημένη μεταβλητή στο σύνολο τιμών Z_k, δηλαδή $z = f_k(w)$. Αυτό έγινε διότι η f_k προέκυψε ως αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής με τύπο $w = e^z$ με πεδίο ορισμού το Z_k και σύνολο τιμών το A.
Όμως, αργότερα, πολλές φορές θα κάνουμε την συνηθισμένη αλλαγή συμβόλων: θα γράφουμε $w = f_k(z)$, όπου το z διατρέχει το A και το w διατρέχει το Z_k.

Ασκήσεις.

3.5.1. Θεωρήστε τους συνεχείς κλάδους $f_k : A \to Z_k$ του λογαρίθμου με $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι ο θετικός φανταστικός ημιάξονας του w-επιπέδου: $L = \{iv \,|\, v \geq 0\}$ (όπου $w = u + iv$).
Περιγράψτε αναλυτικά και σχεδιάστε τις διάφορες ζώνες Z_k με $k \in \mathbb{Z}$, και γράψτε τους αντίστοιχους τύπους $z = f_k(w)$ για $w \in A$.
Ποιός από τους κλάδους έχει τιμή $z = -i\frac{\pi}{2}$ για $w = -i$, δηλαδή για ποιό k είναι $f_k(-i) = -i\frac{\pi}{2}$;
Ομοίως, ποιός κλάδος έχει τιμή $z = 4\pi i$ για $w = 1$;

3.5.2. Θεωρήστε τους συνεχείς κλάδους $f_k : A \to Z_k$ του λογαρίθμου με $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι ο αρνητικός φανταστικός ημιάξονας του w-επιπέδου: $L = \{iv \mid v \leq 0\}$ (όπου $w = u + iv$). Περιγράψτε αναλυτικά και σχεδιάστε τις διάφορες ζώνες Z_k με $k \in \mathbb{Z}$, και γράψτε τους αντίστοιχους τύπους $z = f_k(w)$ για $w \in A$.
Ποιός από τους κλάδους έχει τιμή $z = i\frac{\pi}{2}$ για $w = i$, δηλαδή για ποιό k είναι $f_k(i) = i\frac{\pi}{2}$;
Ομοίως, ποιός κλάδος έχει τιμή $z = 4\pi i$ για $w = 1$;

3.5.3. Θεωρήστε τον γενικό συνεχή κλάδο $f_k : A \to Z_k$ του λογαρίθμου με $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι οποιαδήποτε ημιευθεία του w-επιπέδου με κορυφή το 0. Επίσης έστω σημείο $w_0 \neq 0$ της L. Σχεδιάστε την ημιευθεία L και το σημείο w_0. Κατόπιν θεωρήστε το όριο του $f_k(w)$ όταν το w τείνει στο w_0 μέσα από το A και από την μία μεριά της L. Επίσης θεωρήστε το όριο του $f_k(w)$ όταν το w τείνει στο w_0 μέσα από το A και από την άλλη μεριά της L. Αποδείξτε ότι τα δύο αυτά όρια του $f_k(w)$ είναι διαφορετικά: η διαφορά τους είναι ίση με $i2\pi$. Δικαιολογήστε αυτό το φαινόμενο, εξετάζοντας (γεωμετρικά) την κίνηση του σημείου $f_k(w)$ μέσα στην ζώνη Z_k, και στις δύο περιπτώσεις κίνησης του w προς το w_0 μέσα στο σύνολο A.

3.6 Συνεχείς κλάδοι των ριζών.

Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Η συνάρτηση $w = z^n$ είναι προφανώς συνεχής, αλλά, όπως και με την εκθετική συνάρτηση, έχουμε πρόβλημα με την αντιστρεψιμότητά της.

Γνωρίζουμε, για κάθε $w \neq 0$, την ισοδυναμία

$$z^n = w \quad \Leftrightarrow \quad z = w^{1/n}.$$

Αν $w = 0$, τότε $0^{1/n} = 0$. Αλλά για κάθε $w \neq 0$ υπάρχουν ακριβώς n διαφορετικά $w^{1/n}$. Επομένως η συνάρτηση $w = z^n$ από το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ επί του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ δεν είναι ένα-προς-ένα, αλλά *n-προς-ένα* αφού σε κάθε $w \neq 0$ αντιστοιχούν n τιμές του z. Άρα αν θέλουμε να μιλήσουμε για αντίστροφη συνάρτηση της δύναμης $w = z^n$, δηλαδή για την n-οστή ρίζα $z = w^{1/n}$ ως συνάρτηση από το $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, μπορούμε να το κάνουμε μόνο αν την θεωρήσουμε *πλειότιμη συνάρτηση*.

Όπως με την εκθετική συνάρτηση, ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της μη-αντιστρεψιμότητας της δύναμης $w = z^n$ είναι να αντιστοιχίσουμε σε κάθε w, το οποίο μεταβάλλεται σε κατάλληλο υποσύνολο A του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, *μόνο ένα* από τα $w^{1/n}$, και αυτό να το ονομάσουμε $g(w)$. Θα περιγράψουμε συγκεκριμένους τρόπους επιλογής αφ' ενός κατάλληλου συνόλου A αφ' ετέρου για κάθε $w \in A$ ενός από τα $w^{1/n}$ έτσι ώστε οι συναρτήσεις g οι οποίες προκύπτουν να είναι *συνεχείς*. Ο σχετικός ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $g : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αν για κάθε $w \in A$ το $g(w)$ είναι ένα από τα $w^{1/n}$, και αν η g είναι συνεχής στο A, τότε λέμε ότι η g είναι* **συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A**.

Το να είναι το $g(w)$ ένα από τα $w^{1/n}$ σημαίνει ότι το $g(w)$ είναι μία από τις λύσεις της εξίσωσης $z^n = w$, δηλαδή

$$\text{το } g(w) \text{ είναι ένα από τα } w^{1/n} \quad \Leftrightarrow \quad g(w)^n = w.$$

Θυμόμαστε ότι οι n-οστές ρίζες του $w \neq 0$ δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{w^{1/n} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})} \quad \text{με } k = 0, 1, \ldots, n-1} \tag{3.1}$$

όπου θ είναι οποιοδήποτε $\arg w$, δηλαδή $w = |w|e^{i\theta}$.

Όπως στην περίπτωση της λογαριθμικής συνάρτησης, στο w-επίπεδο θεωρούμε μια οποιαδήποτε, αλλά συγκεκριμένη, ημιευθεία L με κορυφή το σημείο 0, και έστω ότι η L σχηματίζει γωνία

Θ με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα του w-επιπέδου. Αν αφαιρέσουμε την ημιευθεία L από το w-επίπεδο, τότε σχηματίζεται το σύνολο

$$A = \mathbb{C} \setminus L = \{w = re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty,\ \Theta < \theta < \Theta + 2\pi\}.$$

Θεωρούμε τώρα στο z-επίπεδο τις n ανοικτές γωνίες

$$B_k := \Big\{z = se^{i\phi} \,\Big|\, 0 < s < +\infty,\ \frac{\Theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} < \phi < \frac{\Theta}{n} + (k+1)\frac{2\pi}{n}\Big\} \quad \text{με } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Καθεμία από αυτές τις ανοικτές γωνίες έχει κορυφή το 0 και γωνιακό άνοιγμα $\frac{2\pi}{n}$. Επίσης, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-2$ η γωνία B_{k+1} προκύπτει από την B_k με στροφή κατά $\frac{2\pi}{n}$, αλλά και η B_0 προκύπτει από την B_{n-1} με στροφή κατά $\frac{2\pi}{n}$. Δηλαδή, οι n αυτές ανοικτές γωνίες είναι διαδοχικές και καλύπτουν ολόκληρο το z-επίπεδο (εκτός από τις ενδιάμεσες συνοριακές ημιευθείες τους).

Τώρα θα δούμε ότι *η συνάρτηση $w = z^n$, περιορισμένη σε οποιοδήποτε B_k, είναι ένα-προς-ένα στο B_k και επί του A.*

Έστω $z \in B_k$, οπότε $z = se^{i\phi}$ με $0 < s < +\infty$ και $\frac{\Theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} < \phi < \frac{\Theta}{n} + (k+1)\frac{2\pi}{n}$. Τότε

$$z^n = s^n e^{in\phi} = s^n e^{in\phi} e^{-i2k\pi} = s^n e^{i(n\phi - 2k\pi)},$$

όπου $\Theta < n\phi - 2k\pi < \Theta + 2\pi$, και επομένως $z^n \in A$. Άρα η συνάρτηση $w = z^n$ απεικονίζει το B_k μέσα στο A.
Τώρα, έστω $w \in A$, οπότε $w = re^{i\theta}$ με $0 < r < +\infty$ και $\Theta < \theta < \Theta + 2\pi$. Τότε το $z = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})}$ ανήκει στο B_k (διότι $\frac{\Theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} < \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} < \frac{\Theta}{n} + (k+1)\frac{2\pi}{n}$), και ισχύει

$$z^n = re^{i(\theta + 2k\pi)} = re^{i\theta}e^{i2k\pi} = re^{i\theta} = w.$$

Άρα η συνάρτηση $w = z^n$ από το B_k στο A είναι επί του A.
Τέλος, έστω $z_1, z_2 \in B_k$ με $z_1 \neq z_2$ και $z_1^n = z_2^n$. Τότε $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n = 1$, οπότε το $\frac{z_2}{z_1}$ είναι ένα από τα $e^{im\frac{2\pi}{n}}$ με $m = 1, \ldots, n-1$. Επομένως, το z_2 προκύπτει από το z_1 με στροφή κατά μία από τις γωνίες $m\frac{2\pi}{n}$ με $m = 1, \ldots, n-1$. Αυτό είναι αδύνατο αφού το γωνιακό άνοιγμα της γωνίας B_k είναι $\frac{2\pi}{n}$ (και δεν περιέχει τις συνοριακές ημιευθείες της). Άρα η συνάρτηση $w = z^n$ από το B_k στο A είναι ένα-προς-ένα στο B_k.

Αφού η $w = z^n$ είναι ένα-προς-ένα στο B_k και επί του A, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση από το A στο B_k, την οποία θα συμβολίσουμε $g_k : A \to B_k$. Αυτομάτως έχουμε την ισοδυναμία:

$$\text{για } w \in A,\ z \in B_k : \qquad w = z^n \quad \Leftrightarrow \quad g_k(w) = z.$$

Δηλαδή, για κάθε $w \in A$ το $g_k(w)$ είναι στο B_k και είναι λύση της εξίσωσης $z^n = w$. Με άλλα λόγια, το $g_k(w)$ είναι ένα από τα $w^{1/n}$, εκείνο το οποίο ανήκει στην γωνία B_k. Μάλιστα, είδαμε προηγουμένως (στην απόδειξη του επί) ποιό από τα $w^{1/n}$ είναι εκείνο που ανήκει στο B_k: είναι το $z = \sqrt[n]{|w|}e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})}$, όπου $w = |w|e^{i\theta}$ με $\Theta < \theta < \Theta + 2\pi$.

Συνοψίζουμε:

Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, έχουμε ορίσει συνάρτηση

$$g_k : A \to B_k$$

με τύπο

$$g_k(w) \text{ είναι το μοναδικό } w^{1/n} \text{ στην ανοικτή γωνία } B_k$$

ή, πιο λεπτομερειακά,

$$g_k(w) = \sqrt[n]{|w|}e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})}, \quad \text{όπου } w = |w|e^{i\theta} \text{ με } \Theta < \theta < \Theta + 2\pi.$$

Πρόταση 3.19. *Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, η συνάρτηση $g_k : A \to B_k$ που μόλις ορίσαμε είναι συνεχής, δηλαδή είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο χωρίο A.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ουσιαστικά ίδια με την απόδειξη της ανάλογης Πρότασης 3.16 για τους συνεχείς κλάδους του λογαρίθμου.
Θεωρούμε ακολουθία (w_m) και σημείο w στο A ώστε $w_m \to w$. Κατόπιν γράφουμε

$$w_m = |w_m|e^{i\theta_m},\ w = |w|e^{i\theta} \quad \text{όπου} \quad \theta_m, \theta \in (\Theta, \Theta + 2\pi).$$

Στην απόδειξη της Πρότασης 3.16 είδαμε ότι $|w_m| \to |w|$ και $\theta_m \to \theta$. Από αυτά συνεπάγεται αμέσως ότι $g_k(w_m) \to g_k(w)$, οπότε η g_k είναι συνεχής σε κάθε w στο A. □

Μπορεί κανείς να αποδείξει σχετικά εύκολα ότι δεν υπάρχει άλλος συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A.

Συνοψίζουμε:

Αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0, τότε στο συμπληρωματικό ανοικτό σύνολο A ορίζονται n συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το A επί μιας συγκεκριμένης ανοικτής γωνίας B του z-επιπέδου με κορυφή το 0 και γωνιακό άνοιγμα $\frac{2\pi}{n}$. Οι διάφορες αυτές γωνίες, που αντιστοιχούν στους διάφορους κλάδους της n-οστής ρίζας (στο ίδιο σύνολο A), είναι ξένες ανά δύο, διαδοχικές και καλύπτουν το z-επίπεδο (εκτός από τις συνοριακές ημιευθείες τους).
Φυσικά, αν αλλάξουμε την αρχική ημιευθεία η οποία καθορίζει το σύνολο A, τότε αλλάζει το A καθώς και οι αντίστοιχες γωνίες και οι αντίστοιχοι συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας.

Όπως στην περίπτωση των συνεχών κλάδων του λογαρίθμου:

Δεν μπορεί να ορισθεί συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας σε σύνολο γνήσια μεγαλύτερο του A, παρά μόνο στο $A \cup \{0\}$.

Πράγματι, κάθε συνεχής κλάδος $g_k : A \to B_k$ της n-οστής ρίζας στο A δεν μπορεί να οριστεί σε σημείο $w \in L$, $w \neq 0$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 3.18. Από την άλλη μεριά, στο σημείο 0 ισχύει $0^{1/n} = 0$, και εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση g_k έχει όριο 0 στο σημείο 0, αφού $|g_k(w)| = \sqrt[n]{|w|} \to 0$ όταν $w \to 0$. Άρα μπορούμε να ορίσουμε την $g_k : A \cup \{0\} \to B_k \cup \{0\}$ με τιμή $g_k(0) = 0$, και αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο $A \cup \{0\}$.

Παράδειγμα 3.6.1. Έστω $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα. Στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ορίζονται δύο συνεχείς κλάδοι της τετραγωνικής ρίζας.
Ο πρώτος (με $k = 0$) είναι η συνάρτηση

$$g_0 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to B_0 = \left\{ se^{i\phi} \,\middle|\, 0 < s < +\infty,\ -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

με τύπο

$$g_0(w) = \sqrt{|w|}e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad \text{όπου } w = |w|e^{i\theta} \text{ με } -\pi < \theta < \pi.$$

Ο δεύτερος (με $k = 1$) είναι η συνάρτηση

$$g_1 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to B_1 = \left\{ se^{i\phi} \,\middle|\, 0 < s < +\infty,\ \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

με τύπο

$$g_1(w) = \sqrt{|w|}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}, \quad \text{όπου } w = |w|e^{i\theta} \text{ με } -\pi < \theta < \pi.$$

Ο πρώτος κλάδος της τετραγωνικής ρίζας απεικονίζει το $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ στο δεξιό ανοικτό ημιεπίπεδο του z-επιπέδου, ενώ ο δεύτερος κλάδος της τετραγωνικής ρίζας απεικονίζει το $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ στο αριστερό ανοικτό ημιεπίπεδο του z-επιπέδου. Για παράδειγμα, ο συνεχής κλάδος με τιμή $z = 1$ για $w = 1$ είναι ο πρώτος κλάδος g_0, ενώ ο συνεχής κλάδος με τιμή $z = -1$ για $w = 1$ είναι ο δεύτερος κλάδος g_1.

Παράδειγμα 3.6.2. Έστω $A = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ το w-επίπεδο εκτός του θετικού πραγματικού ημιάξονα. Στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ ορίζονται τρεις συνεχείς κλάδοι της κυβικής ρίζας.
Ο πρώτος (με $k = 0$) είναι η συνάρτηση

$$g_0 : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \to B_0 = \left\{ se^{i\phi} \,\middle|\, 0 < s < +\infty,\ 0 < \phi < \frac{2\pi}{3} \right\}$$

με τύπο

$$g_0(w) = \sqrt[3]{|w|} e^{i\frac{\theta}{3}}, \quad \text{όπου } w = |w|e^{i\theta} \text{ με } 0 < \theta < 2\pi.$$

Ο δεύτερος (με $k = 1$) είναι η συνάρτηση

$$g_1 : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \to B_1 = \left\{ se^{i\phi} \,\middle|\, 0 < s < +\infty,\ \frac{2\pi}{3} < \phi < \frac{4\pi}{3} \right\}$$

με τύπο

$$g_1(w) = \sqrt[3]{|w|} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})}, \quad \text{όπου } w = |w|e^{i\theta} \text{ με } 0 < \theta < 2\pi.$$

Και ο τρίτος (με $k = 2$) είναι η συνάρτηση

$$g_2 : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \to B_1 = \left\{ se^{i\phi} \,\middle|\, 0 < s < +\infty,\ \frac{4\pi}{3} < \phi < 2\pi \right\}$$

με τύπο

$$g_2(w) = \sqrt[3]{|w|} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})}, \quad \text{όπου } w = |w|e^{i\theta} \text{ με } 0 < \theta < 2\pi.$$

Για παράδειγμα, ο συνεχής κλάδος με τιμή $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ για $w = -1$ είναι ο πρώτος κλάδος g_0, ο συνεχής κλάδος με τιμή $z = -1$ για $w = -1$ είναι ο δεύτερος κλάδος g_1, και ο συνεχής κλάδος με τιμή $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ για $w = -1$ είναι ο τρίτος κλάδος g_2.

Σχόλιο. Το σχόλιο αυτό είναι παρόμοιο με ανάλογο σχόλιο για συνεχείς κλάδους λογαρίθμου. Στους συνεχείς κλάδους της n-οστής ρίζας $g_k : A \to B_k$ έχουμε συμβολίσει w την ανεξάρτητη μεταβλητή στο πεδίο ορισμού A και z την εξαρτημένη μεταβλητή στο σύνολο τιμών B_k, δηλαδή $z = g_k(w)$. Αυτό έγινε διότι η g_k προέκυψε ως αντίστροφη συνάρτηση της n-οστής δύναμης με τύπο $w = z^n$ με πεδίο ορισμού το B_k και σύνολο τιμών το A.
Όμως, πολλές φορές θα κάνουμε την συνηθισμένη αλλαγή συμβόλων: θα γράφουμε $w = g_k(z)$, όπου το z διατρέχει το A και το w διατρέχει το B_k.

Ασκήσεις.

3.6.1. Θεωρήστε τους συνεχείς κλάδους $g_k : A \to B_k$ της τετραγωνικής ρίζας με $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι ο θετικός πραγματικός ημιάξονας του w-επιπέδου: $L = \{u \,|\, u \geq 0\}$ (όπου $w = u + iv$).
Περιγράψτε αναλυτικά και σχεδιάστε τις διάφορες γωνίες B_k με $k = 0, 1$, και γράψτε τους αντίστοιχους τύπους $z = g_k(w)$ για $w \in A$.
Ποιός από τους κλάδους έχει τιμή $z = i$ για $w = -1$, δηλαδή για ποιό k είναι $g_k(-1) = i$;
Ομοίως, ποιός κλάδος έχει τιμή $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ για $w = i$;

3.6.2. Θεωρήστε τους συνεχείς κλάδους $g_k : A \to B_k$ της κυβικής ρίζας με $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι ο αρνητικός πραγματικός ημιάξονας του w-επιπέδου: $L = \{u \,|\, u \leq 0\}$ (όπου $w = u + iv$).
Περιγράψτε αναλυτικά και σχεδιάστε τις διάφορες γωνίες B_k με $k = 0, 1, 2$, και γράψτε τους αντίστοιχους τύπους $z = g_k(w)$ για $w \in A$.
Ποιός από τους κλάδους έχει τιμή $z = 1$ για $w = 1$, δηλαδή για ποιό k είναι $g_k(1) = 1$;
Ομοίως, ποιός κλάδος έχει τιμή $z = -i$ για $w = i$;

3.6.3. Θεωρήστε τον γενικό συνεχή κλάδο $g_k : A \to B_k$ της n-οστής ρίζας με $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι οποιαδήποτε ημιευθεία του w-επιπέδου με κορυφή το 0. Επίσης έστω σημείο $w_0 \neq 0$ της L. Σχεδιάστε την ημιευθεία L και το σημείο w_0. Κατόπιν θεωρήστε το όριο του $g_k(w)$ όταν το w τείνει στο w_0 μέσα από το A και από την μία μεριά της L. Επίσης θεωρήστε το όριο του $g_k(w)$ όταν το w τείνει στο w_0 μέσα από το A και από την άλλη μεριά της L. Αποδείξτε ότι τα δύο αυτά όρια του $g_k(w)$ είναι διαφορετικά: ο λόγος τους είναι ίσος με $e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Δικαιολογήστε αυτό το φαινόμενο, εξετάζοντας (γεωμετρικά) την κίνηση του σημείου $g_k(w)$ μέσα στην γωνία B_k, και στις δύο περιπτώσεις κίνησης του w προς το w_0 μέσα στο σύνολο A.

Κεφάλαιο 4

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

4.1 Παράγωγοι μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής.

Στα μαθήματα του Απειροστικού Λογισμού και της Ανάλυσης μαθαίνουμε για την παράγωγο συνάρτησης ορισμένης σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τιμές, επίσης, στο $\mathbb{R}$. Τώρα θα μιλήσουμε για παράγωγο συνάρτησης ορισμένης σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τιμές, όμως, γενικότερα στο $\mathbb{C}$.

Ορισμός. *Έστω $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η γ είναι* **παραγωγίσιμη** *στο t_0 αν υπάρχει το όριο $\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ και είναι μιγαδικός αριθμός (δηλαδή, όχι ∞). Την τιμή του ορίου ονομάζουμε* **παράγωγο** *της γ στο t_0 και συμβολίζουμε $\gamma'(t_0)$ ή $\frac{d\gamma}{dt}(t_0)$. Δηλαδή*

$$\boxed{\gamma'(t_0) = \frac{d\gamma}{dt}(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}}$$

Συνήθως, το A είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και το t_0 είναι εσωτερικό σημείο ή άκρο του διαστήματος. Στην περίπτωση άκρου, το όριο που ορίζει την παράγωγο είναι, φυσικά, πλευρικό "μέσα από" το διάστημα.

Η σύνδεση με την ήδη γνωστή έννοια παραγώγου γίνεται μέσω του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της συνάρτησης, τα οποία είναι συναρτήσεις με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 4.1. *Έστω $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Επίσης, έστω $\gamma = x + iy$, όπου x και y είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της γ. Δηλαδή, είναι $x, y : A \to \mathbb{R}$ και*

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{για κάθε } t \in A.$$

Η γ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in A$ αν και μόνο αν οι x και y είναι και οι δυο παραγωγίσιμες στο t_0 και, σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \frac{(x(t)+iy(t))-(x(t_0)+iy(t_0))}{t-t_0} = \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + i\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \tag{4.1}$$

και παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ και $\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ είναι πραγματικές, οπότε είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντιστοίχως, της συνάρτησης $\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$.
Τώρα εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.1 και έχουμε ότι το $\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ υπάρχει και είναι μιγαδικός αν και μόνο αν τα όρια $\lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ και $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί. Η απόδειξη τελειώνει παίρνοντας όρια στην (4.1) όταν $t \to t_0$. □

Παράδειγμα 4.1.1. Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με τύπο $\gamma(t) = e^{3t^2+1} + it^3 \sin t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τότε $\gamma'(t) = 6te^{3t^2+1} + i(3t^2 \sin t + t^3 \cos t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.1.2. Θεωρούμε συνάρτηση $\gamma : I \to \mathbb{C}$ παραγωγίσιμη στο διάστημα I του $\mathbb{R}$, και την συνάρτηση $\sigma : I \to \mathbb{C}$ με τύπο $\sigma(t) := e^{\gamma(t)}$ για κάθε $t \in I$. Έστω $\gamma = x + iy$ η μιγαδική μορφή της γ, οπότε οι $x, y : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I. Τότε η μιγαδική μορφή της σ είναι

$$\sigma(t) = e^{x(t)+iy(t)} = e^{x(t)}(\cos y(t) + i \sin y(t)) = e^{x(t)} \cos y(t) + ie^{x(t)} \sin y(t).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\sigma'(t) &= \big(x'(t)e^{x(t)} \cos y(t) - y'(t)e^{x(t)} \sin y(t)\big) + i\big(x'(t)e^{x(t)} \sin y(t) + y'(t)e^{x(t)} \cos y(t)\big) \\ &= x'(t)e^{x(t)}(\cos y(t) + i \sin y(t)) + iy'(t)e^{x(t)}(\cos y(t) + i \sin y(t)) \\ &= (x'(t) + iy'(t))e^{x(t)}(\cos y(t) + i \sin y(t)) = (x'(t) + iy'(t))e^{x(t)+iy(t)} = \gamma'(t)e^{\gamma(t)}.\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\boxed{\frac{d\, e^{\gamma(t)}}{dt} = \gamma'(t)e^{\gamma(t)} \quad \text{για κάθε } t \in I}$$

Θα διατυπώσουμε τα επόμενα χωρίς τις αποδείξεις τους. Οι αποδείξεις γίνονται είτε με κατά γράμμα επανάληψη των αποδείξεων των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για πραγματικές συναρτήσεις είτε με αναγωγή στα ήδη γνωστά αντίστοιχα αποτελέσματα για πραγματικές συναρτήσεις μέσω της Πρότασης 4.1.

Πρόταση 4.2. *Έστω $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η γ είναι παραγωγίσιμη στο t_0, τότε είναι συνεχής στο t_0.*

Πρόταση 4.3. *Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι γ_1, γ_2 είναι παραγωγίσιμες στο t_0, τότε και οι $\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 - \gamma_2$, $\gamma_1\gamma_2$ είναι παραγωγίσιμες στο t_0. Επίσης, αν ισχύει επιπλέον ότι $\gamma_2(t) \neq 0$ για κάθε $t \in A$, τότε και η $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0. Τέλος, έχουμε τις ισότητες:*

$$(\gamma_1 + \gamma_2)'(t_0) = \gamma_1'(t_0) + \gamma_2'(t_0), \quad (\gamma_1 - \gamma_2)'(t_0) = \gamma_1'(t_0) - \gamma_2'(t_0),$$

$$(\gamma_1\gamma_2)'(t_0) = \gamma_1'(t_0)\gamma_2(t_0) + \gamma_1(t_0)\gamma_2'(t_0), \quad \Big(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Big)'(t_0) = \frac{\gamma_1'(t_0)\gamma_2(t_0) - \gamma_1(t_0)\gamma_2'(t_0)}{\gamma_2(t_0)^2}.$$

Έχουμε και τον αντίστοιχο κανόνα αλυσίδας.

Πρόταση 4.4. *Έστω $\sigma : B \to A$ και $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $s_0 \in B$ σημείο συσσώρευσης του B και $t_0 = \sigma(s_0) \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η σ είναι παραγωγίσιμη στο s_0 και η γ είναι παραγωγίσμη στο t_0, τότε και η $\gamma \circ \sigma : B \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο s_0 και*

$$(\gamma \circ \sigma)'(s_0) = \gamma'(\sigma(s_0))\sigma'(s_0) = \gamma'(t_0)\sigma'(s_0).$$

Ασκήσεις.

4.1.1. Βρείτε την παράγωγο της e^{zt^n} ως προς $t \in \mathbb{R}$, με $n \in \mathbb{N}$ και σταθερό $z \in \mathbb{C}$, εφαρμόζοντας το παράδειγμα 4.1.2.

4.1.2. Θεωρούμε συνάρτηση $\gamma : I \to \mathbb{C}$ παραγωγίσιμη στο διάστημα I του $\mathbb{R}$. Αν $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι

$$\boxed{\frac{d\, \gamma(t)^n}{dt} = n\gamma(t)^{n-1}\gamma'(t) \quad \text{για κάθε } t \in I}$$

Για τις περιπτώσεις $n = 2$ και $n = 3$ χρησιμοποιήστε την μιγαδική μορφή $\gamma = x + iy$ της συνάρτησης γ. Για την γενική περίπτωση, εργαστείτε με τον ορισμό της παραγώγου και χρησιμοποιήστε μια γνωστή αλγεβρική ταυτότητα. Μπορείτε, επίσης, να χρησιμοποιήσετε επαγωγή ως προς το n.

4.1.3. Ισχύει το γνωστό θεώρημα μέσης τιμής για παραγώγους μιγαδικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής; Δηλαδή, αν η $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) είναι σωστό ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $\gamma'(\xi) = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{b-a}$; Απαντήστε, αφού πρώτα κοιτάξετε το παράδειγμα της συνάρτησης $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $\gamma(t) = e^{it}$ για $t \in [0, 2\pi]$.

4.2 Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο.

Τώρα θα δούμε μια ειδική κατηγορία μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής: θα υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $[a, b]$.

Ορισμός. *Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, όπου $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ και η γ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η γ χαρακτηρίζεται* **καμπύλη** *στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.*

Αν $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε καμπύλη (τονίζουμε: αυτό σημαίνει ότι το $[a, b]$ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και η γ είναι συνεχής στο $[a, b]$), τότε το σύνολο τιμών, δηλαδή το

$$\boxed{\gamma^* = \{\gamma(t) \,|\, t \in [a, b]\},}$$

ονομάζεται **τροχιά** της καμπύλης γ και είναι υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Το σημείο $\gamma(a)$ ονομάζεται **αρχή** ή **αρχικό άκρο** της καμπύλης και το σημείο $\gamma(b)$ ονομάζεται **τέλος** ή **τελικό άκρο** της καμπύλης. Η μεταβλητή $t \in [a, b]$ ονομάζεται και **παράμετρος** της καμπύλης. Όταν η παράμετρος t διατρέχει αυξανόμενη το διάστημα $[a, b]$, το αντίστοιχο σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει το σύνολο γ^* με μια συγκεκριμένη φορά η οποία χαρακτηρίζεται **φορά διαγραφής** της καμπύλης. Όταν ζωγραφίζουμε την τροχιά μιας καμπύλης δηλώνουμε την φορά διαγραφής της με ένα βέλος. Τέλος, η έκφραση

$$\boxed{z = \gamma(t), \quad t \in [a, b].}$$

ονομάζεται **παραμετρική αναπαράσταση** ή **παραμετρική εξίσωση** της καμπύλης γ.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η τροχιά γ^* μιας καμπύλης $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι *συμπαγές* σύνολο, δηλαδή κλειστό και φραγμένο. Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα 3.1, αφού η γ είναι συνεχής, το ευθ. τμήμα $[a, b]$ είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο), και $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

Σχόλιο. Γενικότερα, το πεδίο ορισμού μιας καμπύλης μπορεί να είναι κάθε είδους διάστημα στο $\mathbb{R}$, π.χ. (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, όπου τα a, b μπορεί να είναι και $-\infty$ ή $+\infty$. Στο μάθημα αυτό δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες γενικότερες καμπύλες.

Η ονομασία "καμπύλη" για τη συνάρτηση γ δικαιολογείται διότι το σχήμα του συνόλου τιμών γ^* είναι, συνήθως, αυτό που στην καθημερινή γλώσσα ονομάζουμε "καμπύλη στο επίπεδο". Μάλιστα, πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε καταχρηστικά τον όρο "καμπύλη" για το σύνολο τιμών γ^* αν και κάτι τέτοιο *δεν είναι τυπικά σωστό*: το πρόβλημα είναι ότι μπορεί δυο διαφορετικές καμπύλες γ_1 και γ_2 να έχουν το ίδιο σύνολο τιμών, δηλαδή την ίδια τροχιά $\gamma_1^* = \gamma_2^*$.

Παράδειγμα 4.2.1. Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$. Η $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$\boxed{z = \gamma(t) = \frac{t-a}{b-a} z_1 + \frac{b-t}{b-a} z_0, \quad t \in [a, b]}$$

είναι καμπύλη, και η τροχιά γ^* είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$ με άκρα τα σημεία z_0, z_1. Η αρχή της καμπύλης είναι το σημείο z_0 και το τέλος της το σημείο z_1.

Παρατηρήστε ότι, αν αλλάξουμε το διάστημα και θεωρήσουμε την $\gamma : [c,d] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{t-c}{d-c} z_1 + \frac{d-t}{d-c} z_0, \quad t \in [c,d],$$

τότε η τροχιά γ^* είναι πάλι το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$ με άκρα τα σημεία z_0, z_1.
Το απλούστερο είναι να θεωρήσουμε ως διάστημα το $[0,1]$, οπότε η παραμετρική εξίσωση της $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ γίνεται

$$\boxed{z = \gamma(t) = t z_1 + (1-t) z_0, \quad t \in [0,1].}$$

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η φορά διαγραφής της καμπύλης είναι από το σημείο z_0 προς το σημείο z_1.
Αν $z_0 = z_1$, τότε όλες οι προηγούμενες καμπύλες είναι σταθερές συναρτήσεις: $\gamma(t) = z_0$ για κάθε t στο αντίστοιχο διάστημα. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η καμπύλη είναι *σταθερή*, και η τροχιά της είναι το μονοσύνολο $\{z_0\}$.

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $r_0 > 0$. Η $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$\boxed{z = \gamma(t) = z_0 + r_0(\cos t + i \sin t) = z_0 + r_0 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],}$$

είναι καμπύλη και η τροχιά γ^* είναι ο κύκλος $C(z_0; r_0)$. Η αρχή και το τέλος της καμπύλης είναι το ίδιο σημείο (αφού $\gamma(0) = z_0 + r_0$ και $\gamma(2\pi) = z_0 + r_0$). Η φορά διαγραφής της καμπύλης είναι η θετική φορά περιστροφής στον κύκλο γύρω από το κέντρο z_0, η λεγόμενη *αντι-ωρολογιακή*, δηλαδή η φορά περιστροφής που είναι αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού.
Αν θεωρήσουμε την $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ στο ίδιο διάστημα $[0, 2\pi]$ αλλά με διαφορετική παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r_0(\cos(2t) + i \sin(2t)) = z_0 + r_0 e^{i2t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

τότε έχουμε μια διαφορετική καμπύλη από την προηγούμενη (ίδιο πεδίο ορισμού αλλά διαφορετικός τύπος). Όμως, η τροχιά γ^* είναι ο ίδιος κύκλος $C(z_0; r_0)$, και η αρχή και το τέλος της καμπύλης είναι το ίδιο σημείο, όπως και της προηγούμενης καμπύλης. Η φορά διαγραφής της καμπύλης είναι πάλι η θετική φορά περιστροφής στον κύκλο γύρω από το κέντρο z_0.
Με τις δυο αυτές καμπύλες πειθόμαστε για την αναγκαιότητα να θεωρούμε μια καμπύλη ως συνάρτηση και όχι ως γεωμετρικό σχήμα (τροχιά): παρά το ότι και οι δυο καμπύλες έχουν την ίδια τροχιά, τα ίδια άκρα και την ίδια φορά διαγραφής, η δεύτερη καμπύλη διαγράφει την τροχιά της δυο φορές ενώ η πρώτη καμπύλη διαγράφει την (ίδια) τροχιά της μια φορά.

Αν, όπως στο τελευταίο παράδειγμα, μια καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ έχει το ίδιο σημείο ως αρχή και τέλος, δηλαδή αν $\gamma(a) = \gamma(b)$, τότε η καμπύλη χαρακτηρίζεται **κλειστή**.

Επίσης, αν $\gamma : [a,b] \to A$ είναι μια καμπύλη, όπου $A \subseteq \mathbb{C}$, τότε ισχύει $\gamma(t) \in A$ για κάθε $t \in [a,b]$ ή, ισοδύναμα, η τροχιά γ^* περιέχεται στο σύνολο A. Τότε θα μιλάμε για **καμπύλη στο** A ή θα λέμε **η καμπύλη είναι στο** A.

Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι η γ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και θεωρούμε την παράγωγο της γ στο t_0, δηλαδή το όριο

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{C}.$$

Αν $t_0 = a$, τότε το όριο αυτό είναι, φυσικά, δεξιό πλευρικό όριο και, αν $t_0 = b$, τότε το όριο αυτό είναι αριστερό πλευρικό όριο.

Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a,b]$ το οποίο είναι είτε εσωτερικό σημείο είτε αριστερό άκρο του διαστήματος I. Έστω ότι υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $\gamma'_+(t_0)$ και είναι μιγαδικός αριθμός $\neq 0$. Θεωρούμε και την ημιευθεία l_+ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \varepsilon_+(t) := \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'_+(t_0), \quad t \geq t_0,$$

με κορυφή το σημείο $\gamma(t_0)$ και κατεύθυνση που καθορίζεται από το διάνυσμα $\gamma'_+(t_0)$. Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{t\to t_0+}\frac{|\gamma(t)-\varepsilon_+(t)|}{|\varepsilon_+(t)-\gamma(t_0)|}=\lim_{t\to t_0+}\Big|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)-(t-t_0)\gamma'_+(t_0)}{(t-t_0)\gamma'_+(t_0)}\Big|$$
$$=\frac{1}{|\gamma'_+(t_0)|}\lim_{t\to t_0+}\Big|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}-\gamma'_+(t_0)\Big|=0.$$

Άρα, καθώς το t πλησιάζει το t_0 από τα δεξιά του, η απόσταση του σημείου $\gamma(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην τροχιά γ^*) από το σημείο $\varepsilon_+(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην ημιευθεία l_+) μικραίνει πιο γρήγορα από την απόσταση του σημείου $\varepsilon_+(t)$ από το κοινό σημείο $\gamma(t_0)$ της τροχιάς της καμπύλης και της ημιευθείας l_+. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά γ^* εφάπτεται με την ημιευθεία l_+ στο κοινό σημείο τους $\gamma(t_0)$. Γι αυτό λέμε ότι η l_+ είναι η **εφαπτόμενη ημιευθεία** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά διαγραφής* και ότι το $\gamma'_+(t_0)$ (που καθορίζει την κατεύθυνση της ημιευθείας) είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά διαγραφής* της καμπύλης.

Έστω τώρα ότι το $t_0\in[a,b]$ είναι είτε εσωτερικό σημείο είτε δεξιό άκρο του διαστήματος $[a,b]$, και έστω πάλι ότι υπάρχει η $\gamma'_-(t_0)$ και είναι μιγαδικός αριθμός $\neq 0$. Θεωρούμε την ημιευθεία l_- με παραμετρική εξίσωση

$$z=\varepsilon_-(t):=\gamma(t_0)+(t-t_0)\gamma'_-(t_0),\quad t\le t_0,$$

με κορυφή το σημείο $\gamma(t_0)$ και κατεύθυνση που καθορίζεται από το διάνυσμα $-\gamma'_-(t_0)$ (προσέξτε το πρόσημο). Τώρα είναι

$$\lim_{t\to t_0-}\frac{|\gamma(t)-\varepsilon_-(t)|}{|\varepsilon_-(t)-\gamma(t_0)|}=\lim_{t\to t_0-}\Big|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)-(t-t_0)\gamma'_-(t_0)}{(t-t_0)\gamma'_-(t_0)}\Big|$$
$$=\frac{1}{|\gamma'_-(t_0)|}\lim_{t\to t_0-}\Big|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}-\gamma'_-(t_0)\Big|=0.$$

Άρα, καθώς το t πλησιάζει το t_0 από τα αριστερά του, η απόσταση του σημείου $\gamma(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην τροχιά γ^*) από το σημείο $\varepsilon_-(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην ημιευθεία l_-) μικραίνει πιο γρήγορα από την απόσταση του σημείου $\varepsilon_-(t)$ από το κοινό σημείο $\gamma(t_0)$ της τροχιάς της καμπύλης και της ημιευθείας l_-. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά γ^* εφάπτεται με την ημιευθεία l_- στο κοινό σημείο τους $\gamma(t_0)$ και λέμε ότι η l_- είναι η **εφαπτόμενη ημιευθεία** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά την αντίθετη της φοράς διαγραφής* και ότι το $-\gamma'_-(t_0)$ (που καθορίζει την κατεύθυνση της ημιευθείας) είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά την αντίθετη της φοράς διαγραφής* της καμπύλης.

Αν το t_0 είναι εσωτερικό σημείο του I, τότε συνδυάζουμε τα προηγούμενα και βλέπουμε ότι η καμπύλη γ έχει δυο εφαπτόμενες ημιευθείες l_+ και l_- στο σημείο $\gamma(t_0)$, μια προς τη φορά διαγραφής της με κατεύθυνση που καθορίζεται από το $\gamma'_+(t_0)$ και μια προς την αντίθετη φορά με κατεύθυνση που καθορίζεται από το $-\gamma'_-(t_0)$. Στην περίπτωση που είναι $\gamma'_+(t_0)=\gamma'_-(t_0)=\gamma'(t_0)\neq 0$, οι δυο ημιευθείες είναι αντίθετες και η ένωσή τους σχηματίζει ευθεία l η οποία ονομάζεται **εφαπτόμενη ευθεία** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$. Το $\gamma'(t_0)$ είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά διαγραφής* της καμπύλης και το $-\gamma'(t_0)$ είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης *προς τη φορά την αντίθετη της φοράς διαγραφής* της καμπύλης. Η παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας l είναι η

$$\boxed{z=\varepsilon(t)=\gamma(t_0)+(t-t_0)\gamma'(t_0),\quad t\in\mathbb{R}.}$$

Προσέξτε τον ρόλο της παραδοχής $\gamma'(t_0)\neq 0$. Αν $\gamma'(t_0)=0$, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι μηδενικό και *δεν ορίζει εφαπτόμενη ευθεία*. Πράγματι, τότε η παραμετρική εξίσωση $z=\gamma(t_0)+(t-t_0)\gamma'(t_0)=\gamma(t_0)$ καταλήγει σε παραμετρική εξίσωση σημείου και όχι ευθείας.

Τέλος, αν $\gamma'_+(t_0) \neq \gamma'_-(t_0)$, τότε οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες l_+ και l_- δεν είναι αντίθετες και δεν σχηματίζουν εφαπτόμενη ευθεία. Τότε λέμε ότι η καμπύλη γ **σχηματίζει γωνία** στο σημείο $\gamma(t_0)$, εννοώντας ότι η κυρτή γωνία θ ανάμεσα στις δυο εφαπτόμενες ημιευθείες είναι μικρότερη των 180 μοιρών, δηλαδή $0 \leq \theta < \pi$.

Εκτός από το γεωμετρικό περιεχόμενο της παραγώγου, το οποίο αναλύσαμε προηγουμένως, υπάρχει και το φυσικό περιεχόμενό της. Αν θεωρήσουμε ότι η παράμετρος t εκφράζει *χρόνο*, τότε η $\gamma'(t_0)$ εκφράζει την *(διανυσματική) ταχύτητα* του σημείου $\gamma(t)$ στη θέση $\gamma(t_0)$. Φυσικά, το μέτρο $|\gamma'(t_0)|$ εκφράζει τη *βαθμωτή ταχύτητα* και η γωνία $\arg \gamma'(t_0)$ εκφράζει τη διεύθυνση της (διανυσματικής) ταχύτητας του σημείου $\gamma(t)$ στη θέση $\gamma(t_0)$.

Παράδειγμα 4.2.3. Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$. Η $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{t-a}{b-a} z_1 + \frac{b-t}{b-a} z_0, \quad t \in [a, b]$$

είναι καμπύλη με τροχιά γ^* το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο $\gamma(t)$ του ευθυγράμμου τμήματος είναι το

$$\gamma'(t) = \frac{z_1 - z_0}{b-a}$$

και είναι σταθερό.

Παράδειγμα 4.2.4. Έστω z_0 και $r_0 > 0$. Η $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r_0 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

είναι καμπύλη με τροχιά γ^* τον κύκλο $C(z_0; r_0)$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.1.1, το εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο $\gamma(t)$ της καμπύλης είναι το

$$\gamma'(t) = r_0 i e^{it}.$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\gamma(t) - z_0$ (το "ακτινικό" διάνυσμα) και $\gamma'(t)$ (το εφαπτόμενο διάνυσμα) είναι κάθετα, αφού έχουν εσωτερικό γινόμενο

$$(\gamma(t) - z_0) \cdot \gamma'(t) = (r_0 \cos t, r_0 \sin t) \cdot (-r_0 \sin t, r_0 \cos t) = -r_0^2 \cos t \sin t + r_0^2 \sin t \cos t = 0.$$

Επίσης, το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος είναι σταθερό

$$|\gamma'(t)| = r_0.$$

Δηλαδή, το σημείο $\gamma(t)$ κινείται με σταθερή βαθμωτή ταχύτητα r_0 πάνω στην τροχιά του.
Θα ξαναδούμε τη διαφορά με την άλλη καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική αναπαράσταση

$$\gamma(t) = z_0 + r_0 e^{i2t}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

η οποία έχει την ίδια τροχιά $C(z_0; r_0)$. Τώρα το εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο $\gamma(t)$ της καμπύλης είναι το

$$\gamma'(t) = 2 r_0 i e^{i2t}.$$

Το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος είναι πάλι σταθερό

$$|\gamma'(t)| = 2r_0.$$

Όμως, τώρα το σημείο $\gamma(t)$ κινείται με διπλάσια βαθμωτή ταχύτητα από την βαθμωτή ταχύτητα του σημείου $\gamma(t)$ της προηγούμενης καμπύλης. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στο *ίδιο χρονικό διάστημα* $[0, 2\pi]$ το $\gamma(t)$ της δεύτερης καμπύλης διαγράφει την ίδια τροχιά με το $\gamma(t)$ της πρώτης καμπύλης αλλά *δυο φορές* αντί μιας.

Έστω *συνεχώς παραγωγίσιμη* καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχει η $\gamma'(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$ και ότι η $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$. Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι το μήκος της γ είναι ίσο με

$$\boxed{\text{μήκος}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt} \tag{4.2}$$

Παράδειγμα 4.2.5. Έστω $z_0 \neq z_1$ και $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{b-t}{b-a} z_0 + \frac{t-a}{b-a} z_1, \quad t \in [a,b].$$

Τότε το μήκος της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \left|\frac{z_1 - z_0}{b-a}\right| dt = \left|\frac{z_1 - z_0}{b-a}\right| \int_a^b dt = |z_1 - z_0|,$$

δηλαδή ίσο με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $[z_0, z_1]$.

Παράδειγμα 4.2.6. Έστω z_0 και $r_0 > 0$ και $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r_0 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Το μήκος της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |r_0 i e^{it}|\, dt = \int_0^{2\pi} r_0\, dt = 2\pi r_0,$$

δηλαδή ίσο με το μήκος του κύκλου $C(z_0; r_0)$.
Πάλι, αν θεωρήσουμε την $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r_0 e^{i2t}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

τότε το μήκος αυτής της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |2r_0 i e^{i2t}|\, dt = \int_0^{2\pi} 2r_0\, dt = 4\pi r_0,$$

δηλαδή ίσο με το διπλάσιο του μήκους του κύκλου $C(z_0; r_0)$.

Ας δούμε μια σύντομη αιτιολόγηση (όχι απόδειξη) του τύπου (4.2) για το μήκος της καμπύλης. Θεωρούμε μια διαμέριση $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ του παραμετρικού διαστήματος $[a,b]$, δηλαδή $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Αυτή η διαμέριση ορίζει ένα αντίστοιχο σύνολο διαδοχικών σημείων

$$\{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)\}$$

της τροχιάς γ^* της καμπύλης $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ από το αρχικό άκρο $\gamma(t_0) = \gamma(a)$ μέχρι το τελικό άκρο $\gamma(t_n) = \gamma(b)$. Το μήκος της αντίστοιχης πολυγωνικής γραμμής που δημιουργείται είναι, φυσικά, ίσο με

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| + \cdots + |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|. \tag{4.3}$$

Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, τότε, επειδή η γ' είναι συνεχής, ο λόγος $\frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$ είναι περίπου ίσος με την παράγωγο $\gamma'(\xi_k)$, και όσο πιο *λεπτή* είναι η διαμέριση (δείτε το σχόλιο παρακάτω) τόσο πιο κοντά είναι το $\frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$ στο $\gamma'(\xi_k)$. Άρα όσο πιο λεπτή είναι η διαμέριση τόσο πιο κοντά είναι το μήκος της πολυγωνικής γραμμής στο άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}). \tag{4.4}$$

Δηλαδή, η διαφορά των αθροισμάτων (4.3) και (4.4) τείνει στο 0 όταν το *πλάτος* της Δ τείνει στο 0. Όμως το άθροισμα (4.4) είναι το άθροισμα Riemann της συνεχούς συνάρτησης $|\gamma'|$ στο $[a, b]$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ και στην επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Τώρα, όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0 το μεν μήκος (4.3) της αντίστοιχης πολυγωνικής γραμμής τείνει στο μήκος της καμπύλης το δε άθροισμα Riemann (4.4) τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$. Παίρνοντας, λοιπόν, διαμερίσεις με πλάτη που τείνουν στο 0, προκύπτει ο τύπος (4.2).

Σχόλιο. Στον Απειροστικό Λογισμό ορίζουμε το *πλάτος* της διαμέρισης $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ να είναι το μεγαλύτερο από τα μήκη των υποδιαστημάτων $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$ που αυτή ορίζει. Επίσης, όταν λέμε ότι η διαμέριση Δ είναι *λεπτή* εννοούμε ότι το πλάτος της είναι μικρό, δηλαδή ότι όλα τα υποδιαστήματα που αυτή ορίζει είναι μικρά.

Ορισμός. *Λέμε ότι η καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι* **ομαλή** *αν είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (δηλαδή η γ' είναι συνεχής στο $[a, b]$) και ισχύει $\gamma'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$.*

Αν η γ είναι ομαλή, τότε σε κάθε σημείο $\gamma(t)$ έχει μη-μηδενικό εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(t)$ (οπότε ορίζεται η αντίστοιχη εφαπτόμενη ευθεία) και το εφαπτόμενο διάνυσμα μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο όταν το t διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ (και το σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει με συνεχή τρόπο την τροχιά της γ).

Ορισμός. *Η καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι* **τμηματικά ομαλή** *αν υπάρχουν $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n$ ώστε $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ και ώστε σε καθένα από τα υποδιαστήματα στα οποία το $[a, b]$ χωρίζεται από τα $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n$ ο αντίστοιχος περιορισμός της γ είναι ομαλή καμπύλη.*

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε $t \in [a, b] \setminus \{t_0, \ldots, t_n\}$ υπάρχει η $\gamma'(t)$ και είναι $\neq 0$, ότι σε κάθε t_k υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $\gamma'_-(t_k)$, $\gamma'_+(t_k)$ και είναι $\neq 0$, και ότι σε κάθε υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ η γ' είναι συνεχής αν στα άκρα του υποδιαστήματος θεωρήσουμε ως τιμές της γ' τις αντίστοιχες πλευρικές παραγώγους "από μέσα" από το υποδιάστημα. Η καμπύλη γ πιθανόν να σχηματίζει γωνίες στα σημεία $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1})$.

Είναι φανερό ότι το μήκος μιας τμηματικά ομαλής καμπύλης $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ δίνεται και πάλι από τον τύπο (4.2), όπου το ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann της τμηματικά συνεχούς συνάρτησης $|\gamma'| : [a, b] \to \mathbb{C}$. Αυτό, φυσικά, προκύπτει αν θεωρήσουμε τους περιορισμούς $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{C}$ της $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Τότε κάθε γ_k είναι ομαλή καμπύλη και, επομένως, ισχύει ο τύπος (4.2) γι αυτήν, δηλαδή

$$\text{μήκος}(\gamma_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma_k'(t)|\, dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\, dt.$$

Τέλος, αθροίζουμε αυτές τις ισότητες ως προς $k = 1, \ldots, n$, και βρίσκουμε τον τύπο (4.2).

Από τώρα και στο εξής θα κάνουμε την εξής σύμβαση:

Όλες οι καμπύλες που θα μελετάμε θα είναι ομαλές ή στη χειρότερη περίπτωση τμηματικά ομαλές.

Έστω καμπύλη $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$. Θεωρούμε οποιαδήποτε συνάρτηση $\sigma : [c, d] \to [a, b]$ η οποία είναι ένα-προς-ένα στο $[c, d]$ και επί του $[a, b]$, έχει συνεχή παράγωγο στο $[c, d]$ και ισχύει $\sigma'(s) > 0$ για κάθε $s \in [c, d]$. Επομένως, η σ είναι γνησίως αύξουσα στο $[c, d]$, και $\sigma(c) = a$ και $\sigma(d) = b$. Κάθε τέτοια συνάρτηση σ χαρακτηρίζεται **αλλαγή παραμέτρου**. Τότε ορίζεται η $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ και είναι συνεχής στο $[c, d]$, οπότε αποτελεί καμπύλη. Η γ_2 χαρακτηρίζεται

αναπαραμετρικοποίηση της γ_1 : η παράμετρος της γ_1 είναι το $t \in [a,b]$ ενώ η παράμετρος της γ_2 είναι το $s \in [c,d]$. Παρατηρούμε ότι

$$\gamma_2^* = \{\gamma_2(s) \,|\, s \in [c,d]\} = \{\gamma_1(\sigma(s)) \,|\, s \in [c,d]\} = \{\gamma_1(t) \,|\, t \in [a,b]\} = \gamma_1^*.$$

Δηλαδή, οι τροχιές των δυο καμπυλών είναι το ίδιο υποσύνολο του επιπέδου. Επίσης, τα άκρα των δυο καμπυλών ταυτίζονται: αρχικό άκρο $= \gamma_2(c) = \gamma_1(\sigma(c)) = \gamma_1(a)$, και τελικό άκρο $= \gamma_2(d) = \gamma_1(\sigma(d)) = \gamma_1(b)$. Βλέπουμε, ακόμη, ότι η φορά διαγραφής των δυο καμπυλών είναι ίδια. Καθώς το s αυξάνεται διατρέχοντας το $[c,d]$, το $t = \sigma(s)$ αυξάνεται διατρέχοντας το $[a,b]$ και το σημείο $\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s)) = \gamma_1(t)$ διατρέχει την κοινή τροχιά των δυο καμπυλών από το κοινό αρχικό άκρο μέχρι το κοινό τελικό άκρο. Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι, αν η γ_1 είναι ομαλή, τότε και η γ_2 είναι ομαλή. Πράγματι, ισχύει

$$\gamma_2'(s) = (\gamma_1 \circ \sigma)'(s) = \gamma_1'(\sigma(s))\sigma'(s) = \gamma_1'(t)\sigma'(s)$$

για κάθε $s \in [c,d]$ με το αντίστοιχο $t = \sigma(s) \in [a,b]$. Επειδή υποθέτουμε ότι ισχύει $\sigma'(s) > 0$ για κάθε $s \in [c,d]$, το εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma_2'(s)$ στο σημείο $\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s)) = \gamma_1(t)$ είναι θετικό πολλαπλάσιο του εφαπτόμενου διανύσματος $\gamma_1'(t)$ στο ίδιο σημείο $\gamma_1(t)$. Επομένως, μια αναπαραμετρικοποίηση διατηρεί τις διευθύνσεις των εφαπτόμενων διανυσμάτων (οπότε διατηρεί και τις εφαπτόμενες ευθείες) και αλλάζει μόνο τα μέτρα τους σε κάθε σημείο της τροχιάς. Με άλλα λόγια, αλλάζει η βαθμωτή ταχύτητα διαγραφής της καμπύλης αλλά όχι η διεύθυνση της ταχύτητας: τα σημεία $\gamma_2(s)$ και $\gamma_1(t)$ διατρέχουν την ίδια τροχιά με διαφορετική βαθμωτή ταχύτητα. Αυτά, φυσικά, επεκτείνονται και στην περίπτωση τμηματικά ομαλών καμπυλών. Τότε διατηρούνται και οι γωνίες που τυχόν σχηματίζει η καμπύλη σε κάποια πεπερασμένου πλήθους σημεία.

Εκτός από την τροχιά, τα άκρα, τη φορά διαγραφής και την κατεύθυνση των εφαπτόμενων διανυσμάτων, υπάρχει κάτι ακόμη που μένει αμετάβλητο μετά από αλλαγή παραμέτρου μιας καμπύλης: το μήκος της.

$$\boxed{\text{μήκος}(\gamma_2) = \text{μήκος}(\gamma_1).}$$

Πράγματι, με την απλή αλλαγή μεταβλητής $t = \sigma(s)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{μήκος}(\gamma_2) &= \int_c^d |\gamma_2'(s)|\, ds = \int_c^d |\gamma_1'(\sigma(s))||\sigma'(s)|\, ds \\ &= \int_c^d |\gamma_1'(\sigma(s))|\sigma'(s)\, ds = \int_a^b |\gamma_1'(t)|\, dt = \text{μήκος}(\gamma_1). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.2.7. Θεωρούμε τις καμπύλες $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ με παραμετρικές εξισώσεις

$$z = \gamma_1(t) := \frac{b-t}{b-a}z_0 + \frac{t-a}{b-a}z_1, \quad t \in [a,b], \quad z = \gamma_2(s) := \frac{d-s}{d-c}z_0 + \frac{s-c}{d-c}z_1, \quad s \in [c,d].$$

Τότε η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ με τύπο

$$t = \sigma(s) = \frac{d-s}{d-c}a + \frac{s-c}{d-c}b, \quad s \in [c,d]$$

τότε η σ έχει τις κατάλληλες ιδιότητες ώστε να χαρακτηριστεί *αλλαγή παραμέτρου*, και ισχύει

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s)) \quad \text{για κάθε } s \in [c,d].$$

Αυτή η ισότητα αποδεικνύεται κάνοντας πράξεις στο $\gamma_1(\sigma(s))$ που καταλήγουν στο $\gamma_2(s)$.
Όπως έχουμε δει, και οι δυο καμπύλες έχουν τροχιά το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$. Το μήκος και των δυο καμπυλών είναι ίσο με το μήκος $|z_1 - z_0|$ του ευθ. τμήματος.

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η *σχέση αναπαραμετρικοποίησης* ανάμεσα στις καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου είναι *σχέση ισοδυναμίας*. (Δείτε την άσκηση 4.2.7.)

Τώρα, αν έχουμε οποιαδήποτε καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και ένα οποιοδήποτε διάστημα $[c,d]$ διαφορετικό από το $[a,b]$, τότε υπάρχει καμπύλη η οποία είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ και ορίζεται στο $[c,d]$ αντί του $[a,b]$. Αυτό επιτυγχάνεται αρκεί να βρούμε κατάλληλη αλλαγή παραμέτρου $\sigma : [c,d] \to [a,b]$. Υπάρχουν άπειρες τέτοιες σ. Μια απλή τέτοια αλλαγή παραμέτρου είναι αυτή που χρησιμοποιήθηκε στο τελευταίο παράδειγμα και έχει τύπο

$$t = \sigma(s) = \frac{d-s}{d-c}a + \frac{s-c}{d-c}b, \quad s \in [c,d].$$

Αυτό σημαίνει ότι *το διάστημα στο οποίο είναι ορισμένη μια καμπύλη δεν έχει ιδιαίτερη σημασία αφού υπάρχει αναπαραμετρικοποίηση της καμπύλης ορισμένη σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα μας βολεύει καλύτερα.*

Έστω καμπύλες $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι το τέλος της γ_1 ταυτίζεται με την αρχή της γ_2. Τότε λέμε ότι οι καμπύλες γ_1 και γ_2 (με αυτήν τη σειρά) είναι **διαδοχικές**, και τότε ορίζεται η καμπύλη $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$\boxed{(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{αν } a \le t \le b \\ \gamma_2(t), & \text{αν } b \le t \le c \end{cases}}$$

Η $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ είναι καμπύλη (διότι είναι συνεχής στο $[a,c]$) και ονομάζεται **άθροισμα** των γ_1 και γ_2. Επίσης, επειδή οι γ_1 και γ_2 είναι τμηματικά ομαλές, η $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ είναι κι αυτή τμηματικά ομαλή.

Παρατηρούμε ότι καθώς το t αυξάνεται από το a μέχρι το b το σημείο $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t)$ ταυτίζεται με το σημείο $\gamma_1(t)$ και διαγράφει την τροχιά γ_1^* από το $\gamma_1(a)$ μέχρι το $\gamma_1(b)$, και, κατόπιν, καθώς το t αυξάνεται από το b μέχρι το c το σημείο $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t)$ ταυτίζεται με το $\gamma_2(t)$ και διαγράφει την τροχιά γ_2^* από το $\gamma_2(b)$ μέχρι το $\gamma_2(c)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η τροχιά $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)^*$ είναι η ένωση των τροχιών γ_1^* και γ_2^*.

Φυσικά, το άθροισμα καμπυλών γενικεύεται και για περισσότερες από δύο καμπύλες αρκεί αυτές να είναι διαδοχικές.

Παράδειγμα 4.2.8. Μια οποιαδήποτε πολυγωνική γραμμή μπορεί, προφανώς, να θεωρηθεί άθροισμα διαδοχικών καμπυλών, καθεμιά από τις οποίες έχει ως τροχιά ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν την πολυγωνική γραμμή.

Μέσω της "πράξης" της άθροισης διαδοχικών καμπυλών μπορούμε να θεωρήσουμε διαδοχικές καμπύλες ως μία καμπύλη (*σύνθεση*) αλλά και να θεωρήσουμε μία καμπύλη ως άθροισμα διαδοχικών καμπυλών (*ανάλυση*).

Ας δούμε και μια απλή ιδιότητα του αθροίσματος καμπυλών σε σχέση με το μήκος τους:

$$\boxed{\text{μήκος}(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2) = \text{μήκος}(\gamma_1) + \text{μήκος}(\gamma_2).}$$

Η απόδειξη είναι απλή:

$$\begin{aligned} \text{μήκος}(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2) &= \int_a^c |(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)|\,dt = \int_a^b |(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)|\,dt + \int_b^c |(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)|\,dt \\ &= \int_a^b |\gamma_1'(t)|\,dt + \int_b^c |\gamma_2'(t)|\,dt = \text{μήκος}(\gamma_1) + \text{μήκος}(\gamma_2). \end{aligned}$$

Δηλαδή *το μήκος του αθροίσματος διαδοχικών καμπυλών είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των καμπυλών.*

Τέλος, έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε την καμπύλη $\neg\,\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$\boxed{(\neg\gamma)(t) := \gamma(a+b-t), \quad t \in [a,b].}$$

Η $\neg\gamma$ είναι καμπύλη (διότι είναι συνεχής στο $[a,b]$) και ονομάζεται **αντίθετη** της γ. Επίσης, επειδή η γ είναι τμηματικά ομαλή, η $\neg\gamma$ είναι κι αυτή τμηματικά ομαλή.

Παρατηρούμε ότι $(\neg\gamma)(a) = \gamma(b)$ και $(\neg\gamma)(b) = \gamma(a)$: οι δυο καμπύλες αλλάζουν τα άκρα τους. Πιο συγκεκριμένα, καθώς το t αυξάνεται στο $[a,b]$ το σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει την τροχιά γ^* από το $\gamma(a)$ προς το $\gamma(b)$ ενώ το σημείο $(\neg\gamma)(t)$ διατρέχει την ίδια τροχιά αλλά με την αντίθετη φορά. Δηλαδή, οι δυο αντίθετες καμπύλες έχουν την ίδια τροχιά αλλά αντίθετη φορά διαγραφής. Πάντως, το μήκος τους είναι το ίδιο:

$$\boxed{\text{μήκος}(\neg\gamma) = \text{μήκος}(\gamma)}$$

Η απόδειξη γίνεται με την απλή αλλαγή μεταβλητής $s = a+b-t$:

$$\begin{aligned}\text{μήκος}(\neg\gamma) &= \int_a^b |(\neg\gamma)'(t)|\,dt = \int_a^b |\gamma'(a+b-t)|\,dt \\ &= -\int_b^a |\gamma'(s)|\,ds = \int_a^b |\gamma'(s)|\,ds = \text{μήκος}(\gamma).\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.2.9. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) := (1-t)z_0 + tz_1, \quad t \in [0,1].$$

Το $\gamma(t)$ διατρέχει το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$ με φορά από το z_0 προς το z_1.
Τότε η $\neg\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ έχει παραμετρική εξίσωση

$$z = (\neg\gamma)(t) = \gamma(1-t) = tz_0 + (1-t)z_1 = (1-t)z_1 + tz_0, \quad t \in [0,1].$$

Το $(\neg\gamma)(t)$ διατρέχει το ίδιο ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$ αλλά με φορά από το z_1 προς το z_0.

Παράδειγμα 4.2.10. Έστω z_0 και $r_0 > 0$. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) := z_0 + r_0 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Το $\gamma(t)$ διατρέχει τον κύκλο $C(z_0; r_0)$ μία φορά με την θετική φορά περιστροφής (την αντιωρολογιακή) γύρω από το z_0.
Η $\neg\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ έχει παραμετρική εξίσωση

$$z = (\neg\gamma)(t) = \gamma(2\pi - t) = z_0 + r_0 e^{i(2\pi - t)} = z_0 + r_0 e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Το $(\neg\gamma)(t)$ διατρέχει τον κύκλο $C(z_0; r_0)$ μία φορά αλλά με την αρνητική φορά περιστροφής (την ωρολογιακή) γύρω από το z_0.

Ασκήσεις.

4.2.1. Γράψτε παραμετρικές εξισώσεις τριών καμπυλών με κοινή τροχιά το ευθ. τμήμα $[1+i, -2+3i]$, και με φορά από το $1+i$ προς το $-2+3i$, χρησιμοποιώντας ως παραμετρικά διαστήματα τα $[0,1]$, $[0,3]$ και $[-1,4]$, αντιστοίχως.

4.2.2. Γράψτε παραμετρική εξίσωση καμπύλης με τροχιά το ευθ. τμήμα $[2i, 3-i]$, και με φορά από το $2i$ προς το $3-i$, χρησιμοποιώντας ως παραμετρικό διάστημα το $[0,1]$. Βρείτε την παραμετρική εξίσωση της αντίθετης καμπύλης.

4.2.3. Γράψτε παραμετρικές εξισώσεις καμπυλών:
$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ με τροχιά το ευθ. τμήμα $[-1, 1+i]$, και με φορά από το -1 προς το $1+i$,
$\gamma_2 : [1,2] \to \mathbb{C}$ με τροχιά το ευθ. τμήμα $[1+i, 1-i]$, και με φορά από το $1+i$ προς το $1-i$,
$\gamma_3 : [2,3] \to \mathbb{C}$ με τροχιά το ευθ. τμήμα $[1-i, -1]$, και με φορά από το $1-i$ προς το -1.
Γράψτε την παραμετρική εξίσωση του αθροίσματος $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3$. Περιγράψτε γεωμετρικά την τροχιά της γ και την φορά διαγραφής της. Είναι η γ κλειστή; Βρείτε το μήκος της γ.

4.2.4. Έστω $n \in \mathbb{N}$, z_0 και $r_0 > 0$ και $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r_0 e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Είναι η καμπύλη γ κλειστή; Ποιά είναι η τροχιά της γ; Ποιά είναι η φορά διαγραφής της γ; Πόσες φορές διατρέχει η γ την τροχιά της; Ποιό είναι το μήκος της γ;
Κατόπιν, απαντήστε στα προηγούμενα και στην περίπτωση $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$.

4.2.5. Έστω τμηματικά ομαλή καμπύλη $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$, αλλαγή παραμέτρου $\sigma : [c, d] \to [a, b]$, και η αναπαραμετρικοποίηση $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \sigma : [c, d] \to \mathbb{C}$ της γ_1. Αποδείξτε ότι, αν η γ_1 σχηματίζει γωνία σε κάποιο σημείο $\gamma_1(t_0)$, τότε η γ_2 σχηματίζει ίδια γωνία στο ίδιο σημείο $\gamma_2(s_0)$, όπου $\sigma(s_0) = t_0$.

4.2.6. Έστω σημείο z_0 και καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Αν το z_0 δεν ανήκει στην τροχιά της γ (με άλλα λόγια, αν η γ δεν διέρχεται από το z_0), αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\gamma(t) - z_0| \geq \delta$ για κάθε $t \in [a, b]$.

4.2.7. Έστω κλειστό σύνολο F και καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Αν το F δεν τέμνει την τροχιά της γ (με άλλα λόγια, αν η γ δεν διέρχεται από κανένα σημείο του F), αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\gamma(t) - z| \geq \delta$ για κάθε $t \in [a, b]$ και κάθε $z \in F$.

4.2.8. Αποδείξτε ότι η σχέση αναπαραμετρικοποίησης ανάμεσα στις καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου είναι σχέση ισοδυναμίας, δηλαδή ότι:
(i) Κάθε καμπύλη γ είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ.
(ii) Αν η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1, τότε η γ_1 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_2.
(iii) Αν η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1 και η γ_3 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_2, τότε η γ_3 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1.

4.3 Ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής.

Θα δούμε την επέκταση της έννοιας του ολοκληρώματος από το ολοκλήρωμα *πραγματικής* συνάρτησης σε διάστημα του $\mathbb{R}$ στο ολοκλήρωμα *μιγαδικής* συνάρτησης σε διάστημα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, και $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f, αντιστοίχως, οπότε*

$$f = u + iv.$$

Η f χαρακτηρίζεται **(Riemann) ολοκληρώσιμη** *στο $[a, b]$ αν οι u, v είναι και οι δυο (Riemann) ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, και, σ' αυτήν την περίπτωση, το* **ολοκλήρωμα (Riemann)** *της f στο $[a, b]$ συμβολίζεται $\int_a^b f(t)\,dt$ και ορίζεται με τον τύπο*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.} \tag{4.5}$$

Επειδή οι αριθμοί $\int_a^b u(t)\,dt$ και $\int_a^b v(t)\,dt$ είναι πραγματικοί (ως ολοκληρώματα πραγματικών συναρτήσεων), συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(t)\,dt\Big) &= \int_a^b u(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt, \\ \mathrm{Im}\Big(\int_a^b f(t)\,dt\Big) &= \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt. \end{aligned}}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, αν θεωρήσουμε διαμερίσεις $\Delta = \{t_0, \dots, t_n\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχες επιλογές $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ και τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$ τότε όταν το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο 0 συνεπάγεται ότι το άθροισμα Riemann τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)\,dt$. Συμβολικά:

$$\lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Αυτό προκύπτει από την ισότητα

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) + i \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)(t_k - t_{k-1}),$$

από τα γνωστά για πραγματικές συναρτήσεις όρια

$$\lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b u(t)\,dt,$$

$$\lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b v(t)\,dt$$

και, τέλος, από την (4.5).

Παράδειγμα 4.3.1. Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$, τότε οι $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ (το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f) είναι τμηματικά συνεχείς στο $[a, b]$, οπότε είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και, επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Το ότι η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$ σημαίνει, φυσικά, ότι υπάρχουν $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$ ώστε $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ και ώστε σε καθένα από τα υποδιαστήματα στα οποία το $[a, b]$ χωρίζεται από τα $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$ ο αντίστοιχος περιορισμός της f είναι συνεχής. Δηλαδή σε κάθε $t \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$ η f είναι συνεχής, και σε κάθε t_k υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(t_k-)$, $f(t_k+)$, και σε κάθε υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ η f είναι συνεχής αν στα άκρα του υποδιαστήματος θεωρήσουμε ως τιμές της f τα αντίστοιχα πλευρικά όρια "από μέσα" από το υποδιάστημα. Τότε σε κάθε υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ ορίζεται το αντίστοιχο ολοκλήρωμα $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,dt$, και το $\int_a^b f(t)\,dt$ προκύπτει ως άθροισμα των επιμέρους ολοκληρωμάτων:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,dt.$$

Η επόμενη πρόταση είναι το γνωστό θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού αλλά τώρα για μιγαδικές συναρτήσεις.

Πρόταση 4.5. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ με συνεχή παράγωγο f' στο $[a, b]$. Τότε*

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

Απόδειξη. Γράφουμε την μιγαδική μορφή $f = u + iv$ της f, όπου $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$. Τότε η $f' = u' + iv'$ είναι η μιγαδική μορφή της f'. Επομένως οι u', v' είναι συνεχείς στο $[a, b]$. Από τον Απειροστικό Λογισμό έχουμε ότι

$$\int_a^b u'(t)\,dt = u(b) - u(a), \qquad \int_a^b v'(t)\,dt = v(b) - v(a).$$

Άρα
$$\int_a^b f'(t)\,dt = \int_a^b u'(t)\,dt + i\int_a^b v'(t)\,dt = (u(b)-u(a)) + i(v(b)-v(a)) = f(b)-f(a).$$
□

Η Πρόταση 4.5 είναι το χρησιμότερο εργαλείο για υπολογισμό ολοκληρωμάτων μιγαδικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 4.3.2.
$$\int_a^b e^{it}\,dt = \frac{1}{i}\int_a^b \frac{de^{it}}{dt}\,dt = -i(e^{ib}-e^{ia}).$$

Παράδειγμα 4.3.3. Βάσει του παραδείγματος 4.1.2, έχουμε ότι
$$\int_a^b e^{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{de^{\gamma(t)}}{dt}\,dt = e^{\gamma(b)} - e^{\gamma(a)}.$$

Θα δούμε τώρα διάφορες ιδιότητες του ολοκληρώματος μιγαδικών συναρτήσεων και θα τις αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες του ολοκληρώματος πραγματικών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.6. *Έστω $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Τότε η $f_1 + f_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*
$$\int_a^b (f_1(t)+f_2(t))\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + \int_a^b f_2(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις μιγαδικές μορφές $f_1 = u_1 + iv_1$ και $f_2 = u_2 + iv_2$, και την συνεπαγόμενη μιγαδική μορφή $f_1 + f_2 = (u_1+u_2) + i(v_1+v_2)$. Οι f_1, f_2 είναι ολοκληρώσιμες, οπότε οι u_1, v_1, u_2, v_2 είναι ολοκληρώσιμες. Συνεπάγεται ότι οι $u_1 + u_2$ και $v_1 + v_2$ είναι ολοκληρώσιμες, και άρα η $f_1 + f_2$ είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης
$$\begin{aligned}\int_a^b (f_1(t)+f_2(t))\,dt &= \int_a^b (u_1(t)+u_2(t))\,dt + i\int_a^b (v_1(t)+v_2(t))\,dt\\ &= \int_a^b u_1(t)\,dt + \int_a^b u_2(t)\,dt + i\int_a^b v_1(t)\,dt + i\int_a^b v_2(t)\,dt\\ &= \int_a^b f_1(t)\,dt + \int_a^b f_2(t)\,dt.\end{aligned}$$
□

Πρόταση 4.7. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε η $\lambda f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*
$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις μιγαδικές μορφές $f = u + iv$ και $\lambda = \mu + i\nu$, και την συνεπαγόμενη μιγαδική μορφή $\lambda f = (\mu u - \nu v) + i(\nu u + \mu v)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, οπότε οι u, v είναι ολοκληρώσιμες. Άρα οι $\mu u - \nu v$ και $\nu u + \mu v$ είναι ολοκληρώσιμες και επομένως η λf είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(t)\,dt &= \int_a^b (\mu u(t) - \nu v(t))\,dt + i\int_a^b (\nu u(t) + \mu v(t))\,dt \\ &= \mu\int_a^b u(t)\,dt - \nu\int_a^b v(t)\,dt + i\nu\int_a^b u(t)\,dt + i\mu\int_a^b v(t)\,dt \\ &= (\mu + i\nu)\Big(\int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt\Big) = \lambda\int_a^b f(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.8. *Έστω $f : [a, c] \to \mathbb{C}$ και $a < b < c$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και*

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την μιγαδική μορφή $f = u + iv$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$, οπότε οι u, v είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$. Άρα οι u, v είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, c]$, και

$$\begin{aligned}\int_a^c f(t)\,dt &= \int_a^c u(t)\,dt + i\int_a^c v(t)\,dt \\ &= \int_a^b u(t)\,dt + \int_b^c u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt + i\int_b^c v(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

Η απόδειξη της Πρότασης 4.9 *δεν* είναι απλή.

Πρόταση 4.9. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την μιγαδική μορφή $f = u + iv$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, οπότε οι u, v είναι ολοκληρώσιμες. Επομένως η $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ είναι ολοκληρώσιμη. Τώρα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(i) Αν $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, τότε η ανισότητα $|\int_a^b f(t)\,dt| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$ γίνεται $0 \le \int_a^b |f(t)|\,dt$ και είναι σωστή διότι ισχύει $|f(t)| \ge 0$ για κάθε $t \in [a, b]$.

(ii) Έστω $\int_a^b f(t)\,dt \ne 0$. Τότε θεωρούμε μια πολική αναπαράσταση του αριθμού $\int_a^b f(t)\,dt$, δηλαδή έστω

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| e^{i\theta},$$

όπου θ είναι ένα οποιοδήποτε όρισμα του αριθμού $\int_a^b f(t)\,dt$. Συνεπάγεται

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,dt.$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέρος της ισότητας αυτής είναι πραγματικός αριθμός. Άρα και το δεξιό μέλος της είναι πραγματικός αριθμός και, επομένως, είναι ίσος με το πραγματικό μέρος του! Άρα

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| &= \mathrm{Re}\Big(\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right) dt \le \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right| dt \\ &= \int_a^b |f(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Φυσικά, η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t)) \le |\,\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t))| \le |e^{-i\theta} f(t)|$ για κάθε $t \in [a, b]$. □

Ασκήσεις.

4.3.1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\pi/3} t e^{(2+i4)t^2}\,dt, \quad \int_0^1 (t^3 - it^2)\,dt, \quad \int_0^1 \frac{1+it}{1-it}\,dt, \quad \int_0^1 \frac{1}{(1-it)^2}\,dt.$$

4.3.2. Αποδείξτε ότι

$$\boxed{\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \end{cases}}$$

4.3.3. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_a^b e^{xt}\cos(yt)\,dt$ και $\int_a^b e^{xt}\sin(yt)\,dt$, χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\int_a^b e^{xt}\cos(yt)\,dt + i\int_a^b e^{xt}\sin(yt)\,dt = \int_a^b e^{xt}(\cos(yt) + i\sin(yt))\,dt = \int_a^b e^{(x+iy)t}\,dt$$

και το παράδειγμα 4.3.3.
(Αυτά τα δύο ολοκληρώματα υπολογίζονται στον Απειροστικό Λογισμό με διπλή ολοκλήρωση κατά μέρη. Τώρα ο υπολογισμός τους είναι πιο σύντομος και γίνεται ταυτόχρονα και για τα δύο.)

4.3.4. Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα $|\int_a^b f(t)\,dt| = \int_a^b |f(t)|\,dt$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ημιευθεία l με κορυφή το 0 ώστε να ισχύει $f(t) \in l$ για κάθε σημείο συνέχειας t της f.

4.4 Επικαμπύλια ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων.

Τέλος θα δούμε την επέκταση της έννοιας του ολοκληρώματος από το ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης σε *διάστημα* του $\mathbb{R}$ στο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης σε *καμπύλη* του $\mathbb{C}$.

Ορισμός. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Υπενθυμίζουμε ότι η γ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η γ είναι τμηματικά ομαλή στο $[a, b]$. Θεωρούμε, επίσης, $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχή στην τροχιά $\gamma^* = \{\gamma(t)\,|\,t \in [a, b]\}$. Τότε ορίζεται η $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και είναι συνεχής στο $[a, b]$. Άρα η μιγαδική συνάρτηση $(f \circ \gamma)\gamma'$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$ και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*
*Ορίζουμε το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f στην καμπύλη γ**, το οποίο συμβολίζουμε $\int_\gamma f(z)\,dz$, με τον τύπο*

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.}$$

Συνήθως θα γράφουμε

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)\,dz}$$

στη θέση του $\int_\gamma f(z)\,dz$ αν η γ είναι κλειστή καμπύλη.

Παράδειγμα 4.4.1. Έστω $z_0 \neq z_1$ και η $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ με τη συγκεκριμένη παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{b-t}{b-a}z_0 + \frac{t-a}{b-a}z_1, \quad t \in [a,b]$$

που την έχουμε δει αρκετές φορές μέχρι τώρα. Τότε $\gamma^* = [z_0, z_1]$ και, αν η $f : [z_0, z_1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[z_0, z_1]$, τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\,dz$, και το συμβολίζουμε $\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz$. Δηλαδή,

$$\boxed{\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz = \frac{z_1 - z_0}{b-a}\int_a^b f\Big(\frac{b-t}{b-a}z_0 + \frac{t-a}{b-a}z_1\Big)\,dt.}$$

Θα λέμε ότι αυτό είναι **το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του ευθ. τμήματος** $[z_0, z_1]$ **με φορά από το z_0 προς το z_1.**

Παράδειγμα 4.4.2. Έστω z_0 και $r_0 > 0$. Θεωρούμε τη γνωστή μας $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) := z_0 + r_0(\cos t + i\sin t) = z_0 + r_0 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

οπότε $\gamma^* = C(z_0; r_0)$. Αν η $f : C(z_0; r_0) \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στον κύκλο $C(z_0; r_0)$, τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma f(z)\,dz$, και το συμβολίζουμε $\oint_{C(z_0;r_0)} f(z)\,dz$. Δηλαδή,

$$\boxed{\oint_{C(z_0;r_0)} f(z)\,dz := \oint_\gamma f(z)\,dz = ir_0\int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{it})e^{it}\,dt.}$$

Θα λέμε ότι αυτό είναι **το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του κύκλου** $C(z_0; r_0)$ **με τη θετική φορά διαγραφής του.**

Παράδειγμα 4.4.3. Έστω z_0 και $r_0 > 0$, και έστω A, B δυο διαφορετικά σημεία του κύκλου $C(z_0; r_0)$. Τότε $A = z_0 + r_0 e^{it_1}$ για κάποιο $t_1 \in \mathbb{R}$ και $B = z_0 + r_0 e^{it_2}$ για ένα μοναδικό t_2 ώστε $t_1 < t_2 < t_1 + 2\pi$. Θεωρούμε την $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) := z_0 + r_0 e^{it}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Καθώς το t αυξάνεται στο διάστημα $[t_1, t_2]$ το σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει με τη θετική φορά περιστροφής γύρω από το κέντρο z_0 ένα συγκεκριμένο τόξο (από τα δύο) του $C(z_0; r_0)$ με αρχή το άκρο A και τέλος το άκρο B. Αν η f είναι συνεχής στο τόξο αυτό, τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\,dz$, και το συμβολίζουμε $\int_{\mathrm{arc}(A,B)} f(z)\,dz$. Δηλαδή,

$$\boxed{\int_{\mathrm{arc}(A,B)} f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz = ir_0\int_{t_1}^{t_2} f(z_0 + r_0 e^{it})e^{it}\,dt.}$$

Θα λέμε ότι αυτό είναι **το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του τόξου** $\mathrm{arc}(A, B)$ **με τη θετική φορά διαγραφής του.**

Θα δούμε τώρα πώς συμπεριφέρονται τα επικαμπύλια ολοκληρώματα σε σχέση με τις τρεις πράξεις καμπυλών: αναπαραμετρικοποίηση καμπύλης, άθροισμα καμπυλών, αντίθετη καμπύλη.

Πρόταση 4.10. *Έστω καμπύλες $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ και έστω ότι η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1. Έστω $f : \gamma_1^* = \gamma_2^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Έστω αλλαγή παραμέτρου $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ ώστε $\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s))$ για κάθε $s \in [c,d]$. Τότε, με την αλλαγή μεταβλητής $t = \sigma(s)$ στα ολοκληρώματα, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= \int_c^d f(\gamma_2(s)){\gamma_2}'(s)\,ds = \int_c^d f(\gamma_1(\sigma(s))){\gamma_1}'(\sigma(s))\sigma'(s)\,ds \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(t)){\gamma_1}'(t)\,dt = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.11. *Έστω $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ δυο καμπύλες ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ και $f : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στην τροχιά $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ της καμπύλης $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Άρα ορίζεται το $\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\,dz$, και είναι

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\,dz &= \int_a^c f\big((\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t)\big)(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt + \int_b^c f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,dt \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.8. □

Παράδειγμα 4.4.4. Έστω z_0, z_1, z_2 διαφορετικά ανά δύο ώστε το σημείο z_1 να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_2]$. Θεωρούμε την $\gamma : [a,c] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) := \frac{c-t}{c-a} z_0 + \frac{t-a}{c-a} z_2, \quad t \in [a,c].$$

Είναι σαφές ότι υπάρχει b στο $[a,c]$ ώστε $\gamma(b) = z_1$. Μάλιστα, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι $b = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_0} a + \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} c$. Τώρα, θεωρούμε τις $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ με παραμετρικές εξισώσεις

$$z = \gamma_1(t) := \frac{b-t}{b-a} z_0 + \frac{t-a}{b-a} z_1, \quad t \in [a,b] \qquad z = \gamma_2(t) := \frac{c-t}{c-b} z_1 + \frac{t-b}{c-b} z_2, \quad t \in [b,c].$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$, και $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ για κάθε $t \in [b,c]$. Δηλαδή,

$$\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2.$$

Άρα, αν η f είναι συνεχής στο ευθ. τμήμα $[z_0, z_2]$, τότε $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ και με το συμβολισμό του παραδείγματος 4.4.1 αυτό γράφεται

$$\boxed{\int_{[z_0,z_2]} f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz, \quad \text{αν } z_1 \in [z_0, z_2].}$$

Παράδειγμα 4.4.5. Έστω z_0, z_1, z_2 διαφορετικά ανά δύο. Αν

$$\Delta(z_0, z_1, z_2)$$

είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία z_0, z_1, z_2, τότε

$$\Delta(z_0, z_1, z_2) = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_0].$$

Αν θεωρήσουμε καμπύλη γ_1 η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$ με φορά από z_0 προς z_1, καμπύλη γ_2 η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_1, z_2]$ με φορά από z_1 προς z_2, και καμπύλη γ_3 η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_2, z_0]$ με φορά από z_2 προς z_0, και, αν η f είναι συνεχής στο $\Delta(z_0, z_1, z_2)$, τότε, με τα σύμβολα στο παράδειγμα 4.4.1, έχουμε ότι

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz, \quad \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz, \quad \int_{[z_2,z_0]} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz.$$

Τώρα, η κλειστή καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3$ διαγράφει το $\Delta(z_0, z_1, z_2)$ με φορά από το z_0 στο z_1, μετά από το z_1 στο z_2, και τέλος από το z_2 πίσω στο z_0. Άρα ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma f(z)\,dz$ και το συμβολίζουμε $\oint_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,dz$. Δηλαδή,

$$\oint_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,dz := \oint_\gamma f(z)\,dz.$$

Τώρα, λόγω της $\oint_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$, η τελευταία ισότητα που ορίζει το $\oint_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,dz$ γράφεται:

$$\boxed{\oint_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,dz := \int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,z_0]} f(z)\,dz.}$$

Παράδειγμα 4.4.6. Έστω z_0 και $r_0 > 0$ και τρία διαφορετικά σημεία A, B, C του $C(z_0; r_0)$. Υποθέτουμε ότι το B ανήκει στο τόξο $\mathrm{arc}(A, C)$ το οποίο διαγράφεται με τη θετική φορά περιστροφής γύρω από το κέντρο z_0 με αρχή το A και τέλος το C. Αν θεωρήσουμε καμπύλη γ_1 η οποία διαγράφει το τόξο $\mathrm{arc}(A, B)$ με τη θετική φορά από το A προς το B, και καμπύλη γ_2 η οποία διαγράφει το τόξο $\mathrm{arc}(B, C)$ με τη θετική φορά από το B προς το C, τότε η καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ διαγράφει το τόξο $\mathrm{arc}(A, C)$ με τη θετική φορά από το A προς το C. Άρα, αν η f είναι συνεχής στο τόξο $\mathrm{arc}(A, C)$, τότε $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ και, επομένως, βάσει του συμβολισμού στο παράδειγμα 4.4.3, έχουμε

$$\boxed{\int_{\mathrm{arc}(A,C)} f(z)\,dz = \int_{\mathrm{arc}(A,B)} f(z)\,dz + \int_{\mathrm{arc}(B,C)} f(z)\,dz, \quad \text{αν } B \in \mathrm{arc}(A, C).}$$

Πρόταση 4.12. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{\neg\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στην τροχιά $(\neg\gamma)^* = \gamma^*$. Άρα ορίζεται το $\int_{\neg\gamma} f(z)\,dz$ και, με μια απλή αλλαγή μεταβλητής, είναι

$$\int_{\neg\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f((\neg\gamma)(t))(\neg\gamma)'(t)\,dt = -\int_a^b f(\gamma(a + b - t))\gamma'(a + b - t)\,dt$$
$$= \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

□

Παράδειγμα 4.4.7. Έστω $z_0 \neq z_1$ και γ μια καμπύλη η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$ από το z_0 προς το z_1. Τοτε η καμπύλη $\neg\gamma$ διαγράφει το ίδιο ευθ. τμήμα από το z_1 προς το z_0. Βάσει του συμβολισμού του παραδείγματος 4.4.1, είναι

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz, \qquad \int_{[z_1,z_0]} f(z)\,dz = \int_{\neg\gamma} f(z)\,dz.$$

Άρα

$$\boxed{\int_{[z_1,z_0]} f(z)\,dz = -\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz.}$$

Πρόταση 4.13. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $f_1, f_2 : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς. Τότε*

$$\int_\gamma (f_1(z) + f_2(z))\,dz = \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_\gamma f_2(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή.

$$\begin{aligned}\int_\gamma (f_1(z) + f_2(z))\,dz &= \int_a^b (f_1(\gamma(t)) + f_2(\gamma(t)))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt + \int_a^b f_2(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_\gamma f_2(z)\,dz.\end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.6. □

Πρόταση 4.14. *Έστω αριθμός λ, καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_\gamma \lambda f(z)\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Απόδειξη.

$$\int_\gamma \lambda f(z)\,dz = \int_a^b \lambda f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.7. □

Πρόταση 4.15. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής, και έστω ότι ισχύει $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Τότε*

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leq M \text{ μήκος}(\gamma).$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| &= \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\Big| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \\ &= M \text{ μήκος}(\gamma).\end{aligned}$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.9. □

Ασκήσεις.

4.4.1. (i) Υπολογίστε τα $\oint_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} z\,dz$, $\oint_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} z^2\,dz$, $\oint_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} e^z\,dz$. Τί παρατηρείτε;
(ii) Υπολογίστε το $\oint_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} \overline{z}\,dz$.

4.4.2. Θεωρήστε πάνω στον κύκλο $C(0;1)$ τα σημεία $1, i$ και τα τόξα $\text{arc}(1,i)$ και $\text{arc}(i,1)$.
(i) Υπολογίστε τα $\int_{\text{arc}(1,i)} z\,dz$, $\int_{\neg\ \text{arc}(i,1)} z\,dz$. Τί παρατηρείτε;
(ii) Υπολογίστε τα $\int_{\text{arc}(1,i)} \overline{z}\,dz$, $\int_{\neg\ \text{arc}(i,1)} \overline{z}\,dz$. Ισχύει η ίδια παρατήρηση με του (i);

4.4.3. Υπολογίστε το $\int_\gamma |z|\,dz$ για καθεμία από τις παρακάτω τρεις καμπύλες γ με αρχικό άκρο το $-i$ και τελικό άκρο το i.
(i) $z = \gamma_1(t) = it$ για $t \in [-1,1]$.
(ii) $z = \gamma_2(t) = e^{it}$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(iii) $z = \gamma_3(t) = -e^{-it}$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Σχεδιάστε τις τροχιές των τριών καμπυλών και τις φορές διαγραφής τους.

4.4.4. Γράψτε παραμετρική εξίσωση καμπύλης γ η οποία διαγράφει το τόξο της παραβολής $y = x^2$ από το σημείο $-1+i$ (αρχικό σημείο) στο σημείο $1+i$ (τελικό σημείο). Κατόπιν, υπολογίστε το $\int_\gamma f(z)\,dz$, όπου f είναι η συνάρτηση με τύπο $f(z) = x^3 + iy^2$ για κάθε $z = x+iy$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

4.4.5. Θεωρήστε πάνω στον κύκλο $C(0;1)$ τα σημεία ± 1 και το τόξο $\text{arc}(1,-1)$. Αφού υπολογίσετε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\left|\frac{z}{2z^2+1}\right|$ στο άνω ημικύκλιο του $C(0;1)$, αποδείξτε ότι $\left|\int_{\text{arc}(1,-1)} \frac{z}{2z^2+1}\,dz\right| \leq \pi$, χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

4.4.6. Αποδείξτε ότι $\left|\int_{[1,i]} \frac{1}{z^4}\,dz\right| \leq 4\sqrt{2}$, χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

4.4.7. Έστω καμπύλη γ στο επίπεδο με αρχικό σημείο z_0 και τελικό σημείο z_1.
(i) Δείτε την άσκηση 4.1.2, και αποδείξτε ότι

$$\boxed{\int_\gamma z^n\,dz = \frac{z_1^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1.}$$

Αν $n \leq -2$, υποθέστε επιπλέον ότι το 0 δεν ανήκει στην τροχιά της γ.
(ii) Δείτε το παράδειγμα 4.1.2, και αποδείξτε ότι

$$\boxed{\int_\gamma e^z\,dz = e^{z_1} - e^{z_0}.}$$

(iii) Ποιές είναι οι τιμές των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στα (i) και (ii) όταν η καμπύλη γ είναι κλειστή;

4.4.8. Δείτε την άσκηση 4.3.2 και αποδείξτε ότι

$$\boxed{\oint_{C(z_0;r_0)} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{αν } n = -1 \end{cases}}$$

4.4.9. Έστω A, B διαφορετικά σημεία του κύκλου $C(z_0;r_0)$ και $f : C(z_0;r_0) \to \mathbb{C}$ συνεχής. Βρείτε κάποιες σχέσεις ανάμεσα στα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

$$\int_{\text{arc}(A,B)} f(z)\,dz, \quad \int_{\text{arc}(B,A)} f(z)\,dz, \quad \int_{\neg\ \text{arc}(A,B)} f(z)\,dz, \quad \oint_{C(z_0;r_0)} f(z)\,dz.$$

4.4.10. Έστω z_0, z_1, z_2 διαφορετικά ανά δύο και $f : \Delta(z_0, z_1, z_2) \to \mathbb{C}$ συνεχής. Θεωρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\, dz$ καθώς και τα υπόλοιπα πέντε που προκύπτουν από αυτό με τις διάφορες αναδιατάξεις των z_0, z_1, z_2. Πόσες είναι οι πιθανές διαφορετικές τιμές αυτών των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων;

4.4.11. (i) Έστω f συνεχής στο $\{z \,|\, 0 < |z| < r_0\}$. Ορίζουμε $M(r) := \max\{|f(z)| \,|\, |z| = r\}$ για $0 < r < r_0$, και υποθέτουμε ότι $\lim_{r\to 0+} rM(r) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{r\to 0+} \oint_{C(0;r)} f(z)\, dz = 0$.
(ii) Έστω f συνεχής στο $\{z \,|\, |z| > r_0\}$. Ορίζουμε $M(r) := \max\{|f(z)| \,|\, |z| = r\}$ για $r > r_0$, και υποθέτουμε ότι $\lim_{r\to +\infty} rM(r) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{r\to +\infty} \oint_{C(0;r)} f(z)\, dz = 0$.

Κεφάλαιο 5

Αναλυτικές συναρτήσεις.

5.1 Παράγωγος και αναλυτικές συναρτήσεις.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, και z_0 εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι* ***παραγωγίσιμη*** *στο z_0 αν υπάρχει το όριο $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ και είναι μιγαδικός αριθμός (δηλαδή όχι ∞). Το όριο αυτό, αν υπάρχει, το ονομάζουμε* ***παράγωγο*** *της f στο z_0, και το συμβολίζουμε $f'(z_0)$ ή $\frac{df}{dz}(z_0)$. Δηλαδή*

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.}$$

Θυμόμαστε ότι το να είναι το z_0 εσωτερικό σημείο του A σημαίνει ότι υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε $D(z_0; r_0) \subseteq A$.

Παράδειγμα 5.1.1. Έστω οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση c στο $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε z_0 είναι

$$\frac{dc}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} 0 = 0.$$

Άρα μια σταθερή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και η παράγωγός της είναι η σταθερή συνάρτηση 0 στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.2. Έστω η ταυτοτική συνάρτηση z στο $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε z_0 είναι

$$\frac{dz}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} 1 = 1.$$

Άρα η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και η παράγωγός της είναι η σταθερή συνάρτηση 1 στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.3. Έστω η συνάρτηση z^2 στο $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε z_0 είναι

$$\frac{dz^2}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - {z_0}^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

Άρα η z^2 είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και η παράγωγός της είναι η συνάρτηση $2z$ στο $\mathbb{C}$.

Βλέπουμε ότι, όχι μόνο ο ορισμός της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής είναι εντελώς όμοιος με τον ορισμό της παραγώγου πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής, αλλά το ίδιο όμοιος είναι και ο χειρισμός παραδειγμάτων. Θυμηθείτε από τον Απειροστικό Λογισμό ότι: $\frac{dc}{dx} = 0$, $\frac{dx}{dx} = 1$, $\frac{dx^2}{dx} = 2x$. Θα δούμε ότι αυτή η ομοιότητα υπάρχει σε πολλά αποτελέσματα.

Οι αποδείξεις των επόμενων πέντε προτάσεων είναι ταυτόσημες με τις αποδείξεις των ανάλογων προτάσεων για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

Πρόταση 5.1. *Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο z_0 του A. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0.*

Πρόταση 5.2. *Έστω ότι οι $f, g : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμες στο εσωτερικό σημείο z_0 του A. Τότε οι $f+g, f-g, fg : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμες στο z_0. Επίσης, αν $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Τέλος,*

$$\begin{aligned}(f+g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0),\\ (f-g)'(z_0) &= f'(z_0) - g'(z_0),\\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),\\ \Big(\frac{f}{g}\Big)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.\end{aligned}$$

Πρόταση 5.3. *Έστω ότι η $f : A \to B$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο z_0 του A, και ότι η $g : B \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $w_0 = f(z_0)$ του B. Τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Επίσης,*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0).$$

Πρόταση 5.4. *Έστω ότι η $\gamma : [a,b] \to A$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in [a,b]$, και ότι η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $z_0 = \gamma(t_0)$ του A. Τότε η $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0. Επίσης,*

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0).$$

Παράδειγμα 5.1.4. Βάσει της Πρότασης 5.2 και των παραδειγμάτων των σταθερών συναρτήσεων και της ταυτοτικής συνάρτησης, μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$, και ότι η παράγωγος είναι κι αυτή πολυωνυμική συνάρτηση: αν $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, τότε $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$.

Παράδειγμα 5.1.5. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, και η παράγωγός της είναι κι αυτή ρητή συνάρτηση.

Παράδειγμα 5.1.6. Αν $h(z) = (z^2 - 3z + 2)^{15} - 3(z^2 - 3z + 2)^2$, τότε, από τον κανόνα αλυσίδας, $h'(z) = \big(15(z^2 - 3z + 2)^{14} - 6(z^2 - 3z + 2)\big)(2z - 3)$.

Πρόταση 5.5. *Έστω ότι η $f : A \to B$ είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$. Έστω ότι το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του A, και ότι το $w_0 = f(z_0)$ είναι εσωτερικό σημείο του B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, και $f'(z_0) \neq 0$, και η f^{-1} είναι συνεχής στο w_0, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και*

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και z_0 εσωτερικό σημείο του A. Η f χαρακτηρίζεται* ***αναλυτική*** *στο z_0 αν υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z_0; r_0)$ (και, επομένως, $D(z_0; r_0) \subseteq A$).*

Παρατηρήστε ότι η έννοια της αναλυτικότητας είναι ισχυρότερη από την έννοια της παραγωγισιμότητας: για να είναι αναλυτική μια συνάρτηση σε ένα σημείο πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό αλλά και σε όλα τα γειτονικά του σημεία.

Παράδειγμα 5.1.7. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.8. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Πράγματι, έστω η ρητή συνάρτηση $r = \frac{p}{q}$ και έστω $z_1, \ldots, z_n$ οι ρίζες του πολυωνύμου q, οπότε το πεδίο ορισμού της r είναι το $A = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Γνωρίζουμε ότι η r είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A, και παρατηρούμε ότι το A είναι ανοικτό σύνολο. Τότε για κάθε $z_0 \in A$ υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε $D(z_0; r_0) \subseteq A$, οπότε η r είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z_0; r_0)$ και, επομένως, η r είναι αναλυτική στο z_0.

Παράδειγμα 5.1.9. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) := \overline{z}$. Θεωρούμε οποιοδήποτε z_0 και θα αποδείξουμε ότι το

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$$

δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Αν υπάρχει το όριο του $\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0, τότε θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το* z_0, και, επίσης, θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το* z_0. Αν $z = x + iy$ και $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι οι μιγαδικές μορφές των z, z_0, τότε το πρώτο από τα δυο αυτά όρια είναι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\overline{(x + iy_0)} - \overline{(x_0 + iy_0)}}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

και το δεύτερο όριο είναι

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\overline{(x_0 + iy)} - \overline{(x_0 + iy_0)}}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = \lim_{y \to y_0} (-1) = -1.$$

Επειδή τα δυο αυτά όρια δεν είναι ίσα, συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ και, επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο, οπότε δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

Παράδειγμα 5.1.10. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) := |z|^2$.
Είναι

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \to 0} \overline{z} = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, και $f'(0) = 0$.
Θεωρούμε οποιοδήποτε $z_0 \neq 0$ και θα αποδείξουμε ότι το

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0}$$

δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Αν υπάρχει το όριο του $\frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0, τότε θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το* z_0, και, επίσης, θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το* z_0. Αν $z = x + iy$ και $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι οι μιγαδικές μορφές των z, z_0, τότε το πρώτο από τα δυο αυτά όρια είναι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x + iy_0|^2 - |x_0 + iy_0|^2}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - {x_0}^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

και το δεύτερο όριο είναι

$$\lim_{y \to y_0} \frac{|x_0 + iy|^2 - |x_0 + iy_0|^2}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{y^2 - {y_0}^2}{iy - iy_0} = -i \lim_{y \to y_0} (y + y_0) = -2iy_0.$$

Επειδή $z_0 \neq 0$, τα δυο αυτά όρια δεν είναι ίσα. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{z \to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0}$ και, επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0, οπότε δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

Ορισμός. *Το σύνολο των σημείων στα οποία η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική ονομάζεται **σύνολο αναλυτικότητας** της f.*

Πρόταση 5.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, και έστω $U \subseteq A$ το σύνολο αναλυτικότητας της f. Τότε το U είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in U$, οπότε υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z_0; r_0)$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $z \in D(z_0; r_0)$. Επειδή ο δίσκος $D(z_0; r_0)$ είναι ανοικτός, υπάρχει $r > 0$ ώστε να είναι $D(z; r) \subseteq D(z_0; r_0)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$, και άρα το z είναι σημείο αναλυτικότητας της f, δηλαδή $z \in U$.
Βλέπουμε λοιπόν ότι $D(z_0; r_0) \subseteq U$.
Άρα κάθε $z_0 \in U$ είναι εσωτερικό σημείο του U, οπότε το U είναι ανοικτό σύνολο. □

Παράδειγμα 5.1.11. Το σύνολο αναλυτικότητας κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι το $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.12. Το σύνολο αναλυτικότητας κάθε ρητής συνάρτησης είναι το πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα 5.1.13. Όπως είδαμε στα παραδείγματα 5.1.9 και 5.1.10, το σύνολο αναλυτικότητας της $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = \overline{z}$ καθώς και της $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = |z|^2$ είναι το κενό σύνολο.

Ορισμός. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, και ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq A$. Η f χαρακτηρίζεται **αναλυτική στο** Ω αν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του Ω η, ισοδύναμα, αν το Ω περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.*

Προφανώς, το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο Ω στο οποίο η f είναι αναλυτική είναι το σύνολο αναλυτικότητας της f. Επίσης, είναι σαφές ότι, *αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός ανοικτού συνόλου Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω*. Πράγματι, για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq \Omega$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$, οπότε είναι αναλυτική στο z. Δηλαδή, η f είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του Ω, οπότε είναι αναλυτική στο Ω.

Θα δούμε τώρα ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα.

Πρόταση 5.7. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω. Αν $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η f είναι σταθερή στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ευθ. τμήμα $[z', z'']$ το οποίο περιέχεται στο Ω. Το $[z', z'']$ είναι η τροχιά της καμπύλης $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ με παραμετρική εξίσωση $z = \gamma(t) = (1 - t)z' + tz''$ για $t \in [0, 1]$. Από την Πρόταση 5.4 συνεπάγεται

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0\gamma'(t) = 0 \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1].$$

Άρα, αν οι $u, v : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, τότε ισχύει

$$u'(t) + iv'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = 0 \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1],$$

και άρα

$$u'(t) = 0, \quad v'(t) = 0 \qquad \text{για κάθε } t \in [0, 1].$$

Άρα οι πραγματικές συναρτήσεις u, v είναι σταθερές στο $[0, 1]$, οπότε η $f \circ \gamma = u + iv$ είναι κι αυτή σταθερή στο $[0, 1]$. Επομένως

$$f(z') = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(z'').$$

Τώρα θεωρούμε δυο οποιοδήποτε σημεία $z', z'' \in \Omega$. Επειδή το Ω είναι συνεκτικό, υπάρχει πολυγωνική γραμμή $[z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n]$ στο Ω ώστε $z_1 = z'$ και $z_n = z''$. Βάσει αυτού που αποδείξαμε για άκρα ευθ. τμημάτων στο Ω, έχουμε ότι

$$f(z') = f(z_1) = f(z_2) = \ldots = f(z_{n-1}) = f(z_n) = f(z'').$$

Άρα η f έχει ίδιες τιμές σε οποιαδήποτε δύο σημεία του Ω, οπότε είναι σταθερή στο Ω. □

Πρέπει να τονιστεί ότι το αποτέλεσμα της Πρότασης 5.7 δεν ισχύει αν το ανοικτό σύνολο Ω δεν είναι συνεκτικό.

Παράδειγμα 5.1.14. Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $\Omega := D(0;1) \cup D(3;1)$, το οποίο δεν είναι συνεκτικό. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $F : \Omega \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$F(z) := \begin{cases} c_1, & \text{αν } z \in D(0;1) \\ c_2, & \text{αν } z \in D(3;1) \end{cases}$$

όπου c_1, c_2 είναι δυο οποιεσδήποτε σταθερές.
Αν πάρουμε οποιοδήποτε $z \in D(0;1)$, τότε υπάρχει δίσκος $D(z;r)$ ο οποίος περιέχεται στον δίσκο $D(0;1)$. Άρα η F είναι σταθερή c_1 στον δίσκο $D(z;r)$, και άρα ισχύει $F'(z) = 0$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι για οποιοδήποτε $z \in D(3;1)$ ισχύει $F'(z) = 0$.
Άρα ισχύει $F'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$, αλλά η F δεν είναι σταθερή στο Ω αν $c_1 \neq c_2$.

Ασκήσεις.

5.1.1. Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα και την αναλυτικότητα των συναρτήσεων $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $(\operatorname{Re} z)^2$, και $(\operatorname{Im} z)^2$ σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$.

5.1.2. Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε το σύνολο $\Omega^* := \{z \,|\, \overline{z} \in \Omega\}$ και τη συνάρτηση $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ με τύπο $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ για κάθε $z \in \Omega^*$.
(i) Παρατηρήστε ότι τα σύνολα Ω και Ω^* είναι συμμετρικά στο μιγαδικό επίπεδο ως προς τον πραγματικό άξονα. Αποδείξτε λοιπόν ότι και το Ω^* είναι ανοικτό.
(ii) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $z_0 \in \Omega$, τότε η f^* είναι παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο $\overline{z_0} \in \Omega^*$.

5.1.3. Έστω ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq \mathbb{C}$ και συναρτήσεις $f : V \to U$, $g : U \to \mathbb{C}$, $h : V \to \mathbb{C}$ ώστε η h να είναι 1-1 στο V και $h = g \circ f$. Αν η h είναι παραγωγίσιμη στο $w_0 \in V$, αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = f(w_0)$, αν $g'(z_0) \neq 0$, και αν η f είναι συνεχής στο w_0, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και ότι $f'(w_0) = \frac{h'(w_0)}{g'(z_0)}$.

5.2 Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann.

Θεωρούμε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$, και γράφουμε την μιγαδική μορφή της $f = u + iv$, οπότε $u, v : A \to \mathbb{R}$. Θα συσχετίσουμε την παραγωγισιμότητα της μιγαδικής συνάρτησης f (ως συνάρτηση του z) σε κάποιο εσωτερικό σημείο z_0 του A με τις μερικές παραγώγους των πραγματικών συναρτήσεων u και v (ως συναρτήσεις του (x, y)) στο ίδιο σημείο (x_0, y_0). Όπως πάντα, θα ταυτίζουμε τα σημεία z, z_0 του $\mathbb{C}$, γραμμένα στις μιγαδικές μορφές τους $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, με τα αντίστοιχα σημεία $(x, y), (x_0, y_0)$ του $\mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 5.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, και $z_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A, και έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f στο A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, τότε οι u, v έχουν μερικές παραγώγους ως προς x και y στο (x_0, y_0), και ισχύει*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{5.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0) \tag{5.2}$$

και έστω

$$f'(z_0)=\mu+i\nu \tag{5.3}$$

η μιγαδική μορφή του $f'(z_0)$. Επειδή υπάρχει το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0, τότε θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το* z_0, και, επίσης, θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το* z_0. Άρα από την (5.2) έχουμε, αντιστοίχως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=f'(z_0),\quad \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{iy-iy_0}=f'(z_0). \tag{5.4}$$

Από το πρώτο όριο στην (5.4) και από την (5.3) βρίσκουμε αμέσως ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)+iv(x,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{x-x_0}=\mu+i\nu,$$

οπότε, χωρίζοντας τα όρια του πραγματικού μέρους και του φανταστικού μέρους, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}=\mu,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}=\nu,$$

δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\mu,\quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\nu. \tag{5.5}$$

Με τον ίδιο τρόπο, από το δεύτερο όριο στην (5.4) και από την (5.3) βρίσκουμε ότι

$$\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)+iv(x_0,y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{iy-iy_0}=\mu+i\nu,$$

οπότε, χωρίζοντας τα όρια του πραγματικού μέρους και του φανταστικού μέρους, έχουμε ότι

$$\lim_{y\to y_0}\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}=\mu,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}=-\nu,$$

δηλαδή

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=\mu,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\nu. \tag{5.6}$$

Συγκρίνοντας τις (5.5) και (5.6), παίρνουμε τις (5.1). □

Οι δυο ισότητες (5.1) ονομάζονται **εξισώσεις** ή **σύστημα εξισώσεων Cauchy-Riemann** στο σημείο (x_0,y_0). Συνοπτικά: **εξισώσεις** ή **σύστημα εξισώσεων (C-R)**.

Παρατηρήστε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, τότε από τις (5.3), (5.5) και (5.6) στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1 συνεπάγεται

$$\boxed{f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).}$$

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 5.1 ισχύει, *αλλά με επιπλέον υποθέσεις πέρα από τις εξισώσεις (C-R)*, και αποτελεί το Θεώρημα 5.2.

Θεώρημα 5.2. *Έστω $f:A\to\mathbb{C}$, και $z_0=(x_0,y_0)$ εσωτερικό σημείο του A, και έστω u,v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f στο A. Αν οι u,v έχουν μερικές παραγώγους ως προς x και y σε κάθε σημείο (x,y) κάποιου δίσκου με κέντρο (x_0,y_0), και αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο (x_0,y_0), και αν ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) στο (x_0,y_0), τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (C-R) της (5.1), ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς μ και ν ως εξής:

$$\mu := \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \nu := -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{5.7}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή οι $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του A, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \mu\Big| < \frac{\epsilon}{4}, \quad \Big|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \nu\Big| < \frac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in D((x_0, y_0); \delta). \tag{5.8}$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο $(x, y) \in D((x_0, y_0); \delta)$, και γράφουμε

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = u(x, y) - u(x_0, y) + u(x_0, y) - u(x_0, y_0). \tag{5.9}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, υπάρχει x' ανάμεσα στα x, x_0 ώστε

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x', y)(x - x_0) \tag{5.10}$$

και υπάρχει y' ανάμεσα στα y, y_0 ώστε

$$u(x_0, y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y')(y - y_0). \tag{5.11}$$

Προσέχουμε ότι τα x', y' εξαρτώνται από τα x, y. Παρατηρούμε, όμως, ότι τα σημεία (x', y), (x_0, y') ανήκουν στον δίσκο $D((x_0, y_0); \delta)$. Άρα, λόγω των (5.8), ισχύει

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial x}(x', y) - \mu\Big| < \frac{\epsilon}{4}, \quad \Big|\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y') + \nu\Big| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{5.12}$$

Συνδυάζοντας τις (5.9), (5.10) και (5.11), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} &u(x, y) - u(x_0, y_0) - \big(\mu(x - x_0) - \nu(y - y_0)\big) \\ &\qquad = \big(u(x, y) - u(x_0, y) - \mu(x - x_0)\big) + \big(u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + \nu(y - y_0)\big) \\ &\qquad = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x', y) - \mu\Big)(x - x_0) + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y') + \nu\Big)(y - y_0) \end{aligned}$$

οπότε, λόγω των (5.12),

$$\begin{aligned} &\big|u(x, y) - u(x_0, y_0) - \big(\mu(x - x_0) - \nu(y - y_0)\big)\big| \\ &\qquad \le \Big|\frac{\partial u}{\partial x}(x', y) - \mu\Big||x - x_0| + \Big|\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y') + \nu\Big||y - y_0| \\ &\qquad < \frac{\epsilon}{4}|x - x_0| + \frac{\epsilon}{4}|y - y_0| \\ &\qquad \le \frac{\epsilon}{2}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, εργαζόμενοι με τη συνάρτηση v, βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη της (5.13) σχέση είναι η

$$\big|v(x, y) - v(x_0, y_0) - \big(\nu(x - x_0) + \mu(y - y_0)\big)\big| < \frac{\epsilon}{2}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{5.14}$$

Οι σχέσεις (5.13) και (5.14) ισχύουν για κάθε $(x, y) \in D((x_0, y_0); \delta)$.
Τώρα παρατηρούμε ότι οι παραστάσεις μέσα στις απόλυτες τιμές των αριστερών μερών των (5.13) και (5.14) είναι, αντιστοίχως, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού

$$f(z) - f(z_0) - (\mu + i\nu)(z - z_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - (\mu + i\nu)\big((x - x_0) + i(y - y_0)\big).$$

Επομένως, από τις (5.13) και (5.14) έχουμε αμέσως ότι

$$\left|f(z) - f(z_0) - (\mu + i\nu)(z - z_0)\right| < \epsilon\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \epsilon|z - z_0|$$

για κάθε $z \in D(z_0; \delta)$ και, επομένως,

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (\mu + i\nu)\right| < \epsilon \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; \delta), z \neq z_0.$$

Άρα

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \mu + i\nu,$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και $f'(z_0) = \mu + i\nu$. □

Σε όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν θα χρησιμοποιούμε τις μιγαδικές μορφές μιγαδικών αριθμών και μιγαδικών συναρτήσεων: $z = x + iy$ και $f = u + iv$.

Παράδειγμα 5.2.1. Θα ξαναδούμε το παράδειγμα 5.1.3 στο πλαίσιο των εξισώσεων (C-R). Θεωρούμε την $f(z) := z^2$ και γράφουμε $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, οπότε

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Βρίσκουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 2x$$

και βλέπουμε ότι οι μερικές παράγωγοι ορίζονται και είναι συνεχείς σε ολόκληρο το επίπεδο, και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κάθε σημείο του επιπέδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2, η $f(z) = z^2$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του επιπέδου, και

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2x + i2y = 2z.$$

Παράδειγμα 5.2.2. Τώρα θα ξαναδούμε το παράδειγμα 5.1.9 στο νέο πλαίσιο.
Θεωρούμε την $f(z) := \overline{z}$. Γράφουμε $f(z) = \overline{x + iy} = x - iy$, οπότε

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y.$$

Οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -1$$

δεν ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κανένα σημείο (x, y). Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο, και επομένως δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

Παράδειγμα 5.2.3. Θα κάνουμε το ίδιο με το παράδειγμα 5.1.10.
Θεωρούμε την $f(z) := |z|^2$ και γράφουμε $f(z) = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$, οπότε

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0.$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0$$

και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) μόνο στο σημείο $(0, 0)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο εκτός, *ίσως*, του σημείου 0. Τώρα, επειδή οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) στο σημείο $(0, 0)$, από το Θεώρημα 5.2 συνεπάγεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, και

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0 + i0 = 0.$$

Το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι κενό.

Παράδειγμα 5.2.4. Θεωρούμε την $f(z) := (\operatorname{Re} z)^2$. Γράφουμε $f(z) = (\operatorname{Re}(x+iy))^2 = x^2$, οπότε

$$u(x,y) = x^2, \quad v(x,y) = 0.$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) μόνο στα σημεία $(0,y)$ με $y \in \mathbb{R}$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο εκτός, *ίσως*, στα σημεία $(0,y)$ του φανταστικού άξονα. Τώρα, επειδή οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κάθε σημείο $(0,y)$ με $y \in \mathbb{R}$, από το Θεώρημα 5.2 συνεπάγεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε τέτοιο σημείο.
Άρα το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη είναι η ευθεία των φανταστικών αριθμών, οπότε το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι κενό.

Παράδειγμα 5.2.5. Θα δούμε τώρα ότι η υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων στο σημείο (x_0, y_0) είναι απαραίτητη στο Θεώρημα 5.2.
Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Τότε είναι

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad v(x,y) = 0.$$

Είναι προφανές ότι

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0,$$

οπότε οι μερικές παράγωγοι της v υπάρχουν και είναι συνεχείς σε κάθε (x,y).
Για τις μερικές παραγώγους της u στο $(0,0)$ υπολογίζουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων της u στα άλλα σημεία είναι απλός και προκύπτει ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της u υπάρχουν σε κάθε (x,y), και είναι συνεχείς σε κάθε $(x,y) \neq (0,0)$, αλλά *δεν είναι συνεχείς* στο $(0,0)$. Πράγματι, αν η $\frac{\partial u}{\partial x}$ ήταν συνεχής στο $(0,0)$, θα ίσχυε $\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to 0$ καθώς το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ και, επομένως, και καθώς το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ *πάνω στην ευθεία με εξίσωση* $y = x$. Δηλαδή, θα ίσχυε $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(x^2+x^2)^{3/2}} = 0$ το οποίο είναι, φυσικά, λάθος!
Θα δούμε τώρα ότι η f *δεν είναι παραγωγίσιμη* στο 0. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο 0 θα υπήρχε το όριο

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)/\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy}.$$

Το όριο αυτό θα είχε την ίδια τιμή με το όριο του $\frac{(xy)/\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy}$ καθώς το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ *πάνω σε μια οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο* 0. Θεωρούμε μια τέτοια ευθεία με εξίσωση $y = ax$, και βλέπουμε ότι, αν $a \neq 0$, το αντίστοιχο όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{(xax)/\sqrt{x^2+(ax)^2}}{x+iax} = \frac{a}{(1+ia)\sqrt{1+a^2}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$$

δεν υπάρχει καν.

Τέλος, έχουμε ένα πόρισμα του Θεωρήματος 5.2 το οποίο ουσιαστικά δίνει στο Θεώρημα 5.2 τη μορφή με την οποία συνήθως εφαρμόζεται.

Πρόταση 5.8. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω, και $f : \Omega \to \mathbb{C}$, και έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f στο Ω. Αν οι u, v έχουν μερικές παραγώγους ως προς x, y οι οποίες είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κάθε σημείο του Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο z του Ω και κάποιον αντίστοιχο ανοικτό δίσκο με κέντρο το z και ο οποίος περιέχεται στο Ω (υπάρχει τέτοιος δίσκος, επειδή το Ω είναι ανοικτό σύνολο). Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2, η f είναι παραγωγίσιμη στο z. Δηλαδή, η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Ω, και, επειδή το Ω είναι ανοικτό, η f είναι αναλυτική στο Ω. □

Να τώρα ένα πολύ σημαντικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.2.6. Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ στο μιγαδικό επίπεδο. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της e^z είναι οι

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

Άρα οι u, v έχουν μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y,$$

οι οποίες είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) στο $\mathbb{C}$. Επομένως, η e^z είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, και

$$\frac{d\,e^z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z,$$

δηλαδή

$$\boxed{\frac{de^z}{dz} = e^z \quad \text{για κάθε } z.}$$

Παράδειγμα 5.2.7. Στην άσκηση 1.5.3 ορίσαμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\boxed{\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.}$$

Είναι οι συναρτήσεις **συνημίτονο**, **ημίτονο**, **εφαπτόμενη**, και **συνεφαπτόμενη**.
Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι αν το z είναι πραγματικός, δηλαδή $z = x \in \mathbb{R}$, τότε τα $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, όπως ορίστηκαν τώρα μόλις, ταυτίζονται με τα $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, όπως τα γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό. Δηλαδή οι νέες συναρτήσεις είναι επεκτάσεις των γνωστών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$.
Οι δύο πρώτες συναρτήσεις, $\cos z$ και $\sin z$, είναι σαφώς αναλυτικές στο $\mathbb{C}$, αφού η εκθετική συνάρτηση είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.
Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $\tan z$ πρέπει να βρούμε τα z για τα οποία ισχύει $\cos z = 0$ ή,

ισοδύναμα, $e^{iz} = -e^{-iz}$ ή, ισοδύναμα, $e^{2iz} = -1$. Βλέπουμε εύκολα ότι αυτά είναι τα $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Άρα το πεδίο ορισμού της $\tan z$ είναι το ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Ομοίως, βλέπουμε ότι το πεδίο ορισμού της $\cot z$ είναι το ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Επομένως, και οι συναρτήσεις $\tan z$ και $\cot z$ είναι αναλυτικές η καθεμία στο (ανοικτό) πεδίο ορισμού της, ως λόγοι αναλυτικών συναρτήσεων.
Τώρα, με λίγες πράξεις, βρίσκουμε ότι

$$\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z, \qquad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \qquad \frac{d \tan z}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z}, \qquad \frac{d \cot z}{dz} = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Ασκήσεις.

5.2.1. (i) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\cos z$ και $\sin z$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π, και ότι το σύνολο τιμών τους είναι το $\mathbb{C}$.
(ii) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\tan z$ και $\cot z$ είναι περιοδικές με περίοδο π, και ότι το σύνολο τιμών τους είναι το $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

5.2.2. Ξαναδείτε την άσκηση 5.1.1 στο πλαίσιο των εξισώσεων (C-R).

5.2.3. Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα και την αναλυτικότητα των παρακάτω συναρτήσεων στα διάφορα σημεία του μιγαδικού επιπέδου.
(i) $f(z) = x + ix^2y$, με $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
(ii) $f(z) = x^2 + iy^2$, με $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
(iii) $f(z) = e^{\overline{z}}$.
(iv) $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, με $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

5.2.4. (i) Αποδείξτε ότι η

$$F(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις (C-R) στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
(ii) Αποδείξτε ότι η

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις (C-R) στο 0, ότι το $\frac{G(z)-G(0)}{z-0}$ έχει όριο ίσο με 0 όταν $z \to 0$ πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία που περιέχει το 0, αλλά ότι η G δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5.2.5. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.
(i) Ισχύει $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in \Omega$.
(ii) Η $\overline{f}$ είναι αναλυτική στο Ω.
(iii) Η $|f|$ είναι σταθερή στο Ω.
(iv) Υπάρχει ευθεία l ώστε να ισχύει $f(z) \in l$ για κάθε $z \in \Omega$.
(v) Υπάρχει κύκλος C ώστε να ισχύει $f(z) \in C$ για κάθε $z \in \Omega$.

5.2.6. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω, και έστω ότι ισχύει $f'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $f(z) = ce^z$ για κάθε $z \in \Omega$.

5.2.7. (i) Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών, σε κάθε σημείο του χωρίου Ω. Αν $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$, αποδείξτε ότι η u είναι σταθερή στο Ω.
Υπόδειξη. Μιμηθείτε την απόδειξη της Πρότασης 5.7.
(ii) Βάσει του (i), αποδείξτε την Πρόταση 5.7, χρησιμοποιώντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f και τις εξισώσεις (C-R).

5.2.8. (i) Αποδείξτε ότι το σύστημα εξισώσεων (C-R), δηλαδή οι εξισώσεις $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, για τις πραγματικές συναρτήσεις u, v στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ γράφεται σε *πολική μορφή* ως εξής:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.}$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τους τύπους αλλαγής από πολικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές συντεταγμένες και αντίστροφα: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Χρησιμοποιήστε, επίσης, τον κανόνα αλυσίδας από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών για να γράψετε $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$ καθώς και τις ανάλογες σχέσεις για τα $\frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial \theta}$.
(ii) Έστω ημιευθεία L με κορυφή το 0, ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus L$, και $f : \Omega \to \mathbb{C}$, και έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f στο Ω. Αν οι u, v έχουν μερικές παραγώγους ως προς r, θ οι οποίες είναι συνεχείς και ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων του (i) σε κάθε σημείο του Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.

5.2.9. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, και $z_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A, έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f στο A, και έστω ότι οι u, v έχουν μερικές παραγώγους ως προς x και y σε κάθε σημείο (x, y) κάποιου δίσκου με κέντρο (x_0, y_0), και ότι αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο (x_0, y_0).
(i) Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{z\to z_0} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)$, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Υπόδειξη. Ελέγξτε το όριο όταν το z τείνει στο z_0 πάνω σε τρείς κατάλληλες ευθείες που διέρχονται από το z_0.
(ii) Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$, αποδείξτε ότι είτε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 είτε η $\overline{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

5.3 Αναλυτικοί κλάδοι του λογαρίθμου και των ριζών.

Πρόταση 5.9. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε η f είναι αναλυτική στο Ω, και*

$$f'(w) = \frac{1}{w} \quad \textit{για κάθε } w \in \Omega.$$

Απόδειξη. Έστω $w, w_0 \in \Omega$, $w \neq w_0$. Αν $z = f(w)$ και $z_0 = f(w_0)$, τότε $e^z = w$ και $e^{z_0} = w_0$. Από την $w \neq w_0$ συνεπάγεται $z \neq z_0$. Επίσης, επειδή η f είναι συνεχής, από $w \to w_0$ συνεπάγεται $z \to z_0$. Άρα

$$\lim_{w\to w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{e^z - e^{z_0}} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0}} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}.$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει διότι

$$\lim_{z\to z_0} \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = \frac{de^z}{dz}(z_0) = e^{z_0}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $w_0 \in \Omega$, και είναι $f'(w_0) = \frac{1}{w_0}$. □

Από τώρα και στο εξής, κάθε συνεχή κλάδο του λογαρίθμου σε χωρίο Ω θα τον λέμε **αναλυτικό κλάδο του λογαρίθμου** στο Ω.

Άρα όλα τα παραδείγματα $f_k : A \to Z_k$ που είδαμε στην ενότητα 3.5 είναι αυτομάτως *αναλυτικοί κλάδοι του λογαρίθμου* σε ανοικτό σύνολο της μορφής $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0.

Η επόμενη πρόταση έχει απόδειξη παρόμοια με την προηγούμενη απόδειξη.

Πρόταση 5.10. *Έστω $g : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε η g είναι αναλυτική στο Ω, και*

$$g'(w) = \frac{g(w)}{nw} \quad \text{για κάθε } w \in \Omega.$$

Απόδειξη. Έστω $w, w_0 \in \Omega$, $w \neq w_0$. Αν $z = g(w)$ και $z_0 = g(w_0)$, τότε $z^n = w$ και $z_0^n = w_0$. Από την $w \neq w_0$ συνεπάγεται $z \neq z_0$. Επίσης, επειδή η g είναι συνεχής, από $w \to w_0$ συνεπάγεται $z \to z_0$. Άρα

$$\lim_{w\to w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{z^n - z_0^n} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}} = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = \frac{z_0}{nz_0^n} = \frac{g(w_0)}{nw_0}.$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει διότι

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \frac{dz^n}{dz}(z_0) = nz_0^{n-1}.$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $w_0 \in \Omega$, και είναι $g'(w_0) = \frac{g(w_0)}{nw_0}$. □

Από τώρα και στο εξής, κάθε συνεχή κλάδο της n-οστής ρίζας σε χωρίο Ω θα τον λέμε **αναλυτικό κλάδο της n-οστής ρίζας** στο Ω.

Επομένως, όπως και με τους κλάδους του λογαρίθμου, όλα τα παραδείγματα $g_k : A \to B_k$ που είδαμε στην ενότητα 3.6 είναι αυτομάτως *αναλυτικοί κλάδοι της n-οστής ρίζας* σε ανοικτό σύνολο της μορφής $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0.

Ασκήσεις.

5.3.1. Σε ποιό χωρίο ορίζεται και είναι αναλυτική η συνάρτηση $f(z) = \mathrm{Log}(z - z_0)$; Ποιά είναι η παράγωγος $f'(z)$;

5.3.2. Βασισμένοι στο αποτέλεσμα της άσκησης 5.2.8(ii), αποδείξτε ότι κάθε κάθε συνεχής κλάδος του λογαρίθμου και κάθε συνεχής κλάδος n-οστής ρίζας σε σύνολο $\mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι ημιευθεία με κορυφή το 0, είναι αναλυτική συνάρτηση.

5.3.3. Είδαμε στην ενότητα 3.6 ότι κάθε συνεχής κλάδος $g_k : A \to B_k$ της n-οστής ρίζας μπορεί να οριστεί και στο $w = 0$ (με τιμή $z = 0$) ώστε να είναι συνεχής στο $A \cup \{0\}$. Είναι τότε η συνάρτηση $g_k : A \cup \{0\} \to B_k \cup \{0\}$ αναλυτικός κλάδος της n-οστής ρίζας στο $A \cup \{0\}$;

5.4 Παραγωγισιμότητα ως προς μία μιγαδική μεταβλητή και ως προς δύο πραγματικές μεταβλητές.

Θυμόμαστε από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών ότι μια πραγματική συνάρτηση $u : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, *ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών*, στο εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ αν υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) - \kappa(x - x_0) - \lambda(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0. \tag{5.15}$$

Θυμόμαστε, επίσης, ότι αν ισχύει το όριο στην (5.15) τότε, περιορίζοντας το (x, y) να πλησιάζει το (x_0, y_0) πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το (x_0, y_0) καθώς και πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το (x_0, y_0), προκύπτουν τα όρια

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} = \kappa, \quad \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lambda.$$

Άρα, αν η πραγματική συνάρτηση $u : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, *ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών*, στο (x_0, y_0), τότε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \kappa, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda.$$

Τέλος, θυμόμαστε ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^2$ είναι παραγωγίσιμη, *ως συνάρτηση δυο πραγματικών μεταβλητών*, στο εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του $A \subseteq \mathbb{R}^2$ αν οι δύο συντεταγμένες πραγματικές συναρτήσεις $u, v : A \to \mathbb{R}$ με $f = (u, v)$ είναι παραγωγίσιμες, ως συναρτήσεις δυο πραγματικών μεταβλητών, στο (x_0, y_0). Άρα η $f = (u, v)$ είναι παραγωγίσιμη, ως συνάρτηση δυο πραγματικών μεταβλητών, στο (x_0, y_0) αν και μόνο αν υπάρχουν $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - \kappa(x-x_0) - \lambda(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} &= 0 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0) - \mu(x-x_0) - \nu(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} &= 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Συνδυάζουμε τις δυο σχέσεις (5.16) σε μία σχέση διανυσματικής μορφής, γράφοντας

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}, \ f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} \kappa(x-x_0) + \lambda(y-y_0) \\ \mu(x-x_0) + \nu(y-y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Έτσι οι σχέσεις (5.16) γράφονται ισοδύναμα

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \tag{5.17}$$

Ο 2×2 πίνακας $\begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix}$ ονομάζεται **παράγωγος** της f, ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών, στο (x_0, y_0), και συμβολίζεται $Df(x_0, y_0)$. Δηλαδή

$$Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix}.$$

Ταυτίζοντας, κατά τα γνωστά, το $\mathbb{R}^2$ με το $\mathbb{C}$, βλέπουμε ότι έχουμε δύο έννοιες παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{C}$ στο εσωτερικό σημείο $z_0 = (x_0, y_0)$ του $A \subseteq \mathbb{C}$: την παραγωγισιμότητα ως προς μία μιγαδική μεταβλητή z, και την παραγωγισιμότητα ως προς δύο πραγματικές μεταβλητές x, y.

Για να συσχετίσουμε τις δύο έννοιες παραγωγισιμότητας θα γράψουμε την (5.17) σε μιγαδική μορφή:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \big(\kappa(x-x_0) + \lambda(y-y_0)\big) - i\big(\mu(x-x_0) + \nu(y-y_0)\big)}{|z - z_0|} = 0.$$

Επειδή ο παράγοντας $\frac{|z-z_0|}{z-z_0}$ έχει σταθερό μέτρο 1, το τελευταίο όριο είναι ισοδύναμο με το

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \big(\kappa(x-x_0) + \lambda(y-y_0)\big) - i\big(\mu(x-x_0) + \nu(y-y_0)\big)}{z - z_0} = 0.$$

Γράφοντας $x - x_0 = \frac{(z-z_0)+\overline{(z-z_0)}}{2}$ και $y - y_0 = \frac{(z-z_0)-\overline{(z-z_0)}}{2i}$, βλέπουμε ότι το τελευταίο όριο είναι ισοδύναμο με το

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (\frac{\kappa+\nu}{2} + i\frac{\mu-\lambda}{2})(z - z_0) - (\frac{\kappa-\nu}{2} + i\frac{\mu+\lambda}{2})\overline{(z - z_0)}}{z - z_0} = 0$$

κι αυτό είναι ισοδύναμο με το

$$\lim_{z\to z_0} \Big(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \Big(\frac{\kappa - \nu}{2} + i\frac{\mu + \lambda}{2}\Big)\frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}\Big) = \frac{\kappa + \nu}{2} + i\frac{\mu - \lambda}{2}. \tag{5.18}$$

Αν η f είναι παραγωγίσμη, ως συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής z, στο z_0, τότε έχουμε

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \tag{5.19}$$

Καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα.

Πρόταση 5.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, και εσωτερικό σημείο $z_0 = (x_0, y_0)$ του A. Η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, ως συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής, με παράγωγο $f'(z_0) = a+ib$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0), ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών, με παράγωγο $Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, ως συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής, με παράγωγο $f'(z_0) = a + ib$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει το όριο (5.19).
Τότε θεωρούμε τα $\kappa := a$, $\nu := a$, $\mu := b$, $\lambda := -b$, και τότε ισχύει το όριο (5.18), αφού είναι $\frac{\kappa+\nu}{2} + i\frac{\mu-\lambda}{2} = a + ib = f'(z_0)$ και $\frac{\kappa-\nu}{2} + i\frac{\mu+\lambda}{2} = 0$.
Άρα η f είναι παραγωγίσιμη, ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών, στο (x_0, y_0), με παράγωγο $Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.
Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη, ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών, στο (x_0, y_0), με παράγωγο $Df(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει το όριο (5.18) με $\kappa = a$, $\nu = a$, $\mu = b$, $\lambda = -b$.
Άρα ισχύει το όριο (5.19) με $f'(z_0) = a + ib$.
Άρα η f είναι παραγωγίσιμη, ως συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής, στο z_0, με παράγωγο $f'(z_0) = a + ib$. □

Με άλλα λόγια, *η παραγωγισιμότητα της f ως προς μία μιγαδική μεταβλητή ισοδυναμεί με τον συνδυασμό της παραγωγισιμότητάς της ως προς δύο πραγματικές μεταβλητές και της αντισυμμετρικότητας του 2×2 πίνακα Df.*

Αν σκεφτούμε ότι βάσει των (5.16) έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \kappa, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = \lambda, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \mu, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) = \nu,$$

τότε μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την Πρόταση 5.11 ως εξής.

Πρόταση 5.12. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, και εσωτερικό σημείο $z_0 = (x_0, y_0)$ του A, και έστω $f = u + iv$ η μιγαδική μορφή της f. Η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, ως συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής, αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0), ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών, και οι u, v ικανοποιούν τις*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Οι δυο αυτές ισότητες είναι οι γνωστές μας εξισώσεις (C-R) που εμφανίζονται στην (5.1).

Πολλές φορές μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ δίνεται με τον τύπο $f(x, y)$, ως συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών, και θέλουμε να βρούμε τον τύπο $f(z)$, ως συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής. Τότε γράφουμε $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ και έχουμε

$$f(x, y) = f\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big).$$

Απλοποιούμε την παράσταση που προκύπτει, και εμφανίζεται μια συνάρτηση

$$f(x, y) = f\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\Big) = f(z, \overline{z})$$

των *δύο* μεταβλητών z και $\overline{z}$. Για να προκύψει συνάρτηση μόνο της μεταβλητής z θα πρέπει η $f(z, \overline{z})$ να μην εξαρτάται από την μεταβλητή $\overline{z}$. Για να αποκρυπτογραφήσουμε την κατάσταση, παρατηρούμε ότι από τους τύπους αλλαγής μεταβλητών $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ συνεπάγονται οι *συμβολικές* μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i}, \quad \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = -\frac{1}{2i}.$$

Θεωρώντας την μιγαδική μορφή $f = u + iv$, οπότε

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \quad f(z, \overline{z}) = u(z, \overline{z}) + iv(z, \overline{z}),$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{i}{2}\Big(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big) \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Επειδή οι $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ είναι πραγματικές συναρτήσεις, βλέπουμε από την δεύτερη σχέση (5.20) ότι η f δεν εξαρτάται από την μεταβλητή $\overline{z}$, δηλαδή ότι $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, αν και μόνο αν $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ή, ισοδύναμα, όταν ικανοποιούνται οι εξισώσεις (C-R).

Επομένως, οι εξισώσεις (C-R) εκφράζουν το ότι μια συνάρτηση $f(x, y)$ δύο πραγματικών μεταβλητών είναι συνάρτηση μόνο της μιγαδικής μεταβλητής z και όχι της $\overline{z}$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε $f' = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z}$, οπότε από την πρώτη σχέση (5.20) και τις εξισώσεις (C-R) έχουμε τους τύπους

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

για την παράγωγο της f ως προς την μεταβλητή z. Φυσικά, αυτούς τους τύπους τους έχουμε ξαναδεί.

5.5 Αναλυτικές συναρτήσεις που ορίζονται από επικαμπύλια ολοκληρώματα.

Πρόταση 5.13. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, καμπύλη γ, και $\phi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής στην τροχιά γ^* της γ. Ορίζουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$ με τύπο*

$$f(z) := \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta \quad \text{για } z \notin \gamma^*.$$

Τότε η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ και ισχύει

$$f'(z) = n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{για } z \notin \gamma^*.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η τροχιά γ^* είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, οπότε το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ είναι ανοικτό.
Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Επειδή το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$D(z; \delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$

δηλαδή η τροχιά της γ δεν τέμνει τον δίσκο $D(z; \delta)$.
Τώρα θεωρούμε τον μικρότερο δίσκο $D(z; \frac{\delta}{2})$, και έχουμε ότι

$$|\zeta - w| \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{για κάθε } \zeta \in \gamma^* \text{ και κάθε } w \in D\Big(z; \frac{\delta}{2}\Big). \tag{5.21}$$

Τώρα, για κάθε $w \in D(z; \frac{\delta}{2})$ έχουμε

$$f(w) - f(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - w)^n}\, d\zeta - \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta = \int_\gamma \Big(\frac{1}{(\zeta - w)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \Big) \phi(\zeta)\, d\zeta.$$

Άρα για κάθε $w \in D(z; \frac{\delta}{2})$, $w \neq z$ ισχύει

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \int_\gamma \frac{\frac{1}{(\zeta - w)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n}}{w - z}\, \phi(\zeta)\, d\zeta$$

και, επομένως,

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \int_\gamma \Big(\frac{\frac{1}{(\zeta - w)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n}}{w - z} - \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}} \Big) \phi(\zeta)\, d\zeta. \tag{5.22}$$

Τώρα, για απλούστευση των συμβόλων θέτουμε προσωρινά

$$a := \zeta - w, \quad b := \zeta - z, \quad \text{οπότε} \quad b - a = w - z$$

και για την παράσταση μέσα στην παρένθεση της (5.22) χρησιμοποιούμε τον αλγεβρικό τύπο (τον οποίο θα αποδείξετε εσείς)

$$\frac{\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n}}{b - a} - \frac{n}{b^{n+1}} = (b - a)\Big(\frac{1}{a^n b^2} + \frac{2}{a^{n-1} b^3} + \cdots + \frac{n-1}{a^2 b^n} + \frac{n}{a b^{n+1}} \Big).$$

Από την (5.21) έχουμε ότι για κάθε $\zeta \in \gamma^*$ και κάθε $w \in D(z; \frac{\delta}{2})$ ισχύει $|a| \geq \frac{\delta}{2}$ και $|b| \geq \frac{\delta}{2}$, οπότε για την παράσταση μέσα στην παρένθεση της (5.22) έχουμε

$$\begin{aligned} \Big| \frac{\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n}}{b - a} - \frac{n}{b^{n+1}} \Big| &\leq |b - a| \Big(\frac{1}{|a|^n |b|^2} + \frac{2}{|a|^{n-1} |b|^3} + \cdots + \frac{n-1}{|a|^2 |b|^n} + \frac{n}{|a||b|^{n+1}} \Big) \\ &\leq |w - z| \frac{1 + 2 + \cdots + (n-1) + n}{(\delta/2)^{n+2}} \leq |w - z|\, \frac{n^2 2^{n+2}}{\delta^{n+2}}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Επίσης, επειδή η τροχιά γ^* είναι συμπαγές σύνολο και η ϕ είναι συνεχής στην γ^* συνεπάγεται ότι η ϕ είναι φραγμένη στην γ^*, οπότε υπάρχει αριθμός $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|\phi(\zeta)| \leq M \quad \text{για } \zeta \in \gamma^*. \tag{5.24}$$

Από τις (5.23) και (5.24) η (5.22) συνεπάγεται την

$$\Big|\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - n\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\Big| \leq |w-z|\,\frac{n^2 2^{n+2}}{\delta^{n+2}}\,M\,\text{μήκος}(\gamma) \quad \text{για } w \in D\Big(z;\frac{\delta}{2}\Big), w \neq z.$$

Επειδή τα n, δ, M, μήκος(γ) είναι σταθεροί αριθμοί, από την τελευταία ανισότητα συνεπάγεται

$$\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = n\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z και $f'(z) = n\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$.
Άρα η f είναι παραγωγίσμη σε κάθε $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$ και, επειδή το $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ είναι ανοικτό σύνολο, η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. □

Προσέξτε ότι η Πρόταση 5.13 ουσιαστικά λέει ότι μπορούμε να κάνουμε μια εναλλαγή παραγώγισης και ολοκλήρωσης, όπως αυτή φαίνεται στην τρίτη ισότητα παρακάτω:

$$\boxed{f'(z) = \frac{d}{dz}f(z) = \frac{d}{dz}\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{d}{dz}\Big(\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\Big)\,d\zeta = n\int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta.}$$

Γενικά, τέτοιες εναλλαγές παραγώγισης και ολοκλήρωσης δεν επιτρέπονται και κάθε φορά πρέπει να αποδεικνύονται.

5.6 Αρμονικές συναρτήσεις.

Ορισμός. *Έστω $u : A \to \mathbb{R}$, και (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A. Αν η u έχει μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x, y στο (x_0, y_0), τότε η παράσταση $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ ονομάζεται* **Λαπλασιανή** *της u στο (x_0, y_0), και συμβολίζεται $\Delta u(x_0, y_0)$. Δηλαδή*

$$\boxed{\Delta u(x_0,y_0) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0).}$$

Ορισμός. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω, και $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η u είναι* **αρμονική** *στο Ω αν η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x, y σε κάθε σημείο του Ω, και*

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \text{για κάθε } (x,y) \in \Omega.$$

Πρόταση 5.14. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω, και έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f. Τότε οι u, v είναι αρμονικές στο Ω.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε αργότερα ότι οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης ως προς x, y σε κάθε σημείο του Ω. Αν δεχτούμε προσωρινά αυτό το αποτέλεσμα, τότε, επειδή οι u, v ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R), έχουμε αμέσως ότι

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} = 0.\\
\Delta v &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Άρα οι u, v είναι αρμονικές στο Ω. □

Σχόλιο. Τονίζουμε ότι απομένει να αποδειχθεί το ότι οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης (τουλάχιστον δεύτερης) ως προς x, y σε κάθε σημείο του Ω.

Ορισμός. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω, και $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Αν οι u, v είναι αρμονικές στο Ω, και αν η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο Ω, τότε η v ονομάζεται* **αρμονική συζυγής** *της u στο Ω.*

Παράδειγμα 5.6.1. Η $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, οπότε οι $u(x,y) = x^2 - y^2$ και $v(x,y) = 2xy$ είναι αρμονικές στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.6.2. Θεωρούμε την $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(x,y) := x^3 - 3xy^2$. Είναι σαφές ότι η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς x, y και ότι $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -6xy$ και

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 6x - 6x = 0 \quad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{C}.$$

Άρα η u είναι αρμονική στο $\mathbb{C}$.
Το θέμα είναι να βρούμε μια αρμονική συζυγή $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ της u στο $\mathbb{C}$.
Η v είναι αρμονική συζυγής της u στο $\mathbb{C}$ αν και μόνο αν το ζευγάρι u, v ικανοποιεί τις εξισώσεις (C-R) στο $\mathbb{C}$, δηλαδή

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 3y^2 \qquad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{C}. \tag{5.26}$$

(Αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις (C-R), τότε η v είναι αυτομάτως αρμονική όπως είδαμε στους τύπους (5.21).)
Για να βρούμε την v εφαρμόζουμε μια απλή μέθοδο γνωστή από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών. Κρατάμε σταθερό το y και ολοκληρώνουμε την πρώτη σχέση (5.22) ως προς x:

$$v(x,y) = 3x^2 y + \phi(y),$$

όπου ϕ είναι συνάρτηση του y, ανεξάρτητη του x (η σταθερά ολοκλήρωσης ως προς x). Κατόπιν παραγωγίζουμε την τελευταία σχέση ως προς y και, χρησιμοποιώντας την δεύτερη σχέση (5.22), βρίσκουμε

$$3x^2 + \phi'(y) = 3x^2 - 3y^2.$$

Επομένως, $\phi(y) = -y^3 + c$.
Άρα έχουμε άπειρες λύσεις $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή *πραγματική* συνάρτηση.
Στην άσκηση 5.5.2 αποδεικνύεται ότι αυτές οι v είναι όλες οι αρμονικές συζυγείς της u στο $\mathbb{C}$.
Αν θέλουμε να ελέγξουμε ότι η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, γράφουμε

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3) + ic$$

και παρατηρούμε ότι

$$f(z) = (x+iy)^3 + ic = z^3 + ic$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
Επειδή μπορεί να υπάρξει η ένσταση ότι δεν είναι πάντοτε εύκολο να μαντέψουμε τον τύπο της

f ως συνάρτηση του z από τον τύπο της ως συνάρτηση των x, y, έχουμε τον εξής εναλλακτικό τρόπο: γράφουμε $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ και τότε

$$\begin{aligned} f(z) &= \Big(\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}\Big)^3 - 3\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}\Big)\Big(\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)^2\Big) + i\Big(3\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}\Big)^2\Big(\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big) - \Big(\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)^3\Big) + ic \\ &= \ldots = z^3 + ic. \end{aligned}$$

Για καλύτερη κατανόηση αυτού του τελευταίου δείτε πάλι τη συζήτηση στο τέλος της ενότητας 5.4, μετά από την Πρόταση 5.12.

Ασκήσεις.

5.6.1. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις $u(x, y)$ αποδείξτε ότι είναι αρμονική στο αντίστοιχο πεδίο ορισμού της, και βρείτε τις αντίστοιχες αρμονικές συζυγείς συναρτήσεις $v(x, y)$. Κατόπιν, γράψτε τον τύπο της $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ έτσι ώστε η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι το $z = x + iy$.

(i) $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$.

(ii) $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(x, y) = \sin x \sinh y$.

(iii) $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

(iv) $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \,|\, x \leq 0\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

5.6.2. Έστω $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ αρμονικές στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν η v είναι αρμονική συζυγής της u στο Ω, αποδείξτε ότι η $-u$ είναι αρμονική συζυγής της v στο Ω.

5.6.3. Έστω $u, v_1, v_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ αρμονικές στο χωρίο Ω. Αν η v_1 είναι αρμονική συζυγής της u στο Ω, αποδείξτε ότι η v_2 είναι αρμονική συζυγής της u στο Ω αν και μόνο αν η $v_2 - v_1$ είναι σταθερή στο Ω.
Υπόδειξη. Δείτε την άσκηση 5.4.1.

5.6.4. (i) Ποιό είναι το πιο γενικό ομογενές πολυώνυμο δύο μεταβλητών βαθμού δύο, $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, με πραγματικούς συντελεστές το οποίο είναι πραγματικό μέρος συνάρτησης αναλυτικής στο $\mathbb{C}$; Ποιά είναι αυτή η συνάρτηση; Αποτελεί το σύνολο αυτών των πολυωνύμων γραμμικό χώρο επί του $\mathbb{R}$; Αν ναι, τότε ποιά είναι η διάσταση αυτού του χώρου;

(ii) Ίδιες ερωτήσεις για το γενικό ομογενές πολυώνυμο δύο μεταβλητών βαθμού τρία, $p(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, με πραγματικούς συντελεστές.

(iii) Ίδιες ερωτήσεις για το γενικό ομογενές πολυώνυμο δύο μεταβλητών βαθμού n, $p(x, y) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_1xy^{n-1} + a_0y^n$, με πραγματικούς συντελεστές.

5.6.5. Αποδείξτε ότι η Λαπλασιανή $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ γράφεται σε *πολική μορφή* ως εξής:

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.}$$

Υπόδειξη. Δείτε την υπόδειξη της άσκησης 5.2.8.

Κεφάλαιο 6

Το Θεώρημα Cauchy.

6.1 Παράγουσες.

Ορισμός. *Αν το Ω είναι χωρίο, και αν για τις $f, F : \Omega \to \mathbb{C}$ ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η F χαρακτηρίζεται* **παράγουσα** *της f στο Ω.*

Θυμόμαστε ότι οι καμπύλες $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι από τον ορισμό τους συνεχείς συναρτήσεις και ότι έχουμε κάνει την επιπλέον παραδοχή ότι οι καμπύλες που θα εξετάζουμε θα είναι τμηματικά ομαλές.

Πρόταση 6.1. *Έστω χωρίο Ω, και καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \Omega$ (οπότε η τροχιά γ^* περιέχεται στο Ω), και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο Ω, και $F : \Omega \to \mathbb{C}$ η οποία είναι παράγουσα της f στο Ω. Τότε*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Ειδικώτερα, αν η γ είναι κλειστή καμπύλη, δηλαδή αν $\gamma(b) = \gamma(a)$, τότε

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Απόδειξη. Βάσει της Πρότασης 5.4 για την τρίτη ισότητα και βάσει της Πρότασης 4.5 για την τέταρτη ισότητα παρακάτω, ισχύει

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma F'(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt \\ = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Αν $\gamma(b) = \gamma(a)$, τότε φυσικά $\oint_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$. □

Πόρισμα 6.1. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο χωρίο Ω, και έστω ότι υπάρχει παράγουσα της f στο Ω. Τότε για κάθε καμπύλη γ στο Ω το $\int_\gamma f(z)\, dz$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της. Ειδικώτερα, για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω είναι*

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Απόδειξη. Υπάρχει $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$. Τότε από την Πρόταση 6.1 συνεπάγεται $\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Άρα το $\int_\gamma f(z)\, dz$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα $\gamma(a), \gamma(b)$ της γ, και όχι από τα άλλα σημεία της τροχιάς της ή οποιαδήποτε άλλα χαρακτηριστικά της (π.χ. το μήκος της).
Από την Πρόταση 6.1 προκύπτει και το τελευταίο συμπέρασμα για κλειστές καμπύλες. □

Παράδειγμα 6.1.1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση p έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}$.
Πράγματι, αν $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, τότε προφανώς η πολυωνυμική συνάρτηση P με τύπο $P(z) = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ είναι παράγουσα της p στο $\mathbb{C}$.
Άρα για κάθε κλειστή καμπύλη γ ισχύει

$$\boxed{\oint_\gamma p(z)\,dz = \oint_\gamma (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)\,dz = 0.}$$

Αν η καμπύλη γ έχει αρχικό άκρο το a και τελικό άκρο το b, τότε

$$\int_\gamma p(z)\,dz = P(b) - P(a).$$

Παράδειγμα 6.1.2. Η εκθετική συνάρτηση e^z έχει παράγουσα τον εαυτό της στο $\mathbb{C}$.
Άρα για κάθε κλειστή καμπύλη γ ισχύει

$$\boxed{\oint_\gamma e^z\,dz = 0.}$$

Αν η καμπύλη γ έχει αρχικό άκρο το a και τελικό άκρο το b, τότε

$$\int_\gamma e^z\,dz = e^b - e^a.$$

Παράδειγμα 6.1.3. Έστω z_0 και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε η συνάρτηση $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ έχει παράγουσα στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ την συνάρτηση $-\frac{1}{(n-1)(z-z_0)^{n-1}}$.
Άρα για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (δηλαδή το z_0 δεν ανήκει στην τροχιά γ^*) ισχύει

$$\boxed{\oint_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = 0 \quad \text{με } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.}$$

Αν η καμπύλη γ έχει αρχικό άκρο το a και τελικό άκρο το b, τότε

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = -\frac{1}{(n-1)}\Big(\frac{1}{(b-z_0)^{n-1}} - \frac{1}{(a-z_0)^{n-1}}\Big) \quad \text{με } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Παράδειγμα 6.1.4. Η συνάρτηση $\frac{1}{z-z_0}$ δεν έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ και, ακόμη περισσότερο, ούτε σε κανέναν δακτύλιο $D(z_0; r_1, r_2)$.
Πράγματι, αν είχε η $\frac{1}{z-z_0}$ παράγουσα στον δακτύλιο $D(z_0; r_1, r_2)$, θα ίσχυε $\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στον $D(z_0; r_1, r_2)$. Όμως, αν θεωρήσουμε ακτίνα r με $r_1 < r < r_2$ και την $\gamma : [0, 2\pi] \to D(z_0; r_1, r_2)$ με παραμετρική εξίσωση $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, τότε η γ είναι κλειστή καμπύλη στον δακτύλιο $D(z_0; r_1, r_2)$ και, σύμφωνα με τα σύμβολα στο παράδειγμα 4.4.2, έχουμε

$$\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \oint_{C(z_0;r)} \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it}\,dt = 2\pi i \neq 0.$$

Με βάση αυτό το *πολύ σημαντικό παράδειγμα* μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

Δεν ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου σε οποιονδήποτε δακτύλιο $D(0; r_1, r_2)$ και, επομένως, ούτε και στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Πράγματι, αν υπήρχε αναλυτικός κλάδος f του λογαρίθμου στον δακτύλιο $D(0; r_1, r_2)$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.9, θα ίσχυε $f'(z) = \frac{1}{z}$ για κάθε z στο $D(0; r_1, r_2)$. Δηλαδή, η $\frac{1}{z}$ θα είχε παράγουσα στο $D(0; r_1, r_2)$, και αυτό, όπως είδαμε, είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 6.1.5. Έστω ημιευθεία L με κορυφή το σημείο 0. Γνωρίζουμε ότι στο χωρίο $A = \mathbb{C} \setminus L$ ορίζονται άπειροι αναλυτικοί κλάδοι του λογαρίθμου. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ ένας οποιοσδήποτε από αυτούς τους αναλυτικούς κλάδους του λογαρίθμου. Από την Πρόταση 5.9 έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι παράγουσα της συνάρτησης $\frac{1}{z}$ στο χωρίο A.
Επομένως, για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο χωρίο A (δηλαδή η τροχιά της γ δεν τέμνει την ημιευθεία L) ισχύει

$$\boxed{\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0.}$$

Αν η καμπύλη γ έχει αρχικό άκρο το a και τελικό άκρο το b, τότε

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = f(b) - f(a).$$

Πρόταση 6.2. *Έστω χωρίο Ω, έστω $f, F_1, F_2 : \Omega \to \mathbb{C}$, και έστω ότι η F_1 είναι παράγουσα της f στο Ω. Τότε και η F_2 είναι παράγουσα της f στο Ω αν και μόνο αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή στο Ω.*
Ειδικώτερα, αν δυο παράγουσες της f στο Ω έχουν ίσες τιμές σε κάποιο $z_0 \in \Omega$, τότε οι δυο αυτές παράγουσες ταυτίζονται στο Ω.

Απόδειξη. Αν ισχύει $F_2(z) - F_1(z) = c$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε, προφανώς,

$$F_2'(z) = F_1'(z) + c' = f(z) + 0 = f(z) \quad \text{για κάθε } z \in \Omega.$$

Άρα η F_2 είναι παράγουσα της f στο Ω.
Αντιστρόφως, αν η F_2 είναι παράγουσα της f στο Ω, τότε για την $F = F_2 - F_1$ ισχύει

$$F'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0 \quad \text{για κάθε } z \in \Omega,$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.7, η F είναι σταθερή στο Ω. □

Ασκήσεις.

6.1.1. Έστω γ οποιαδήποτε καμπύλη με αρχικό άκρο το $-i$ και τελικό άκρο το i (μην θεωρήσετε συγκεκριμένη καμπύλη). Υπολογίστε τα παρακάτω επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_\gamma (2z^3 - 3z^2 + z + 5)\,dz, \quad \int_\gamma e^z\,dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z^5}\,dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz, \quad \int_\gamma \cos z\,dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz.$$

Για το τρίτο ολοκλήρωμα υποθέστε ότι η τροχιά της γ δεν περιέχει το 0. Για το τέταρτο ολοκλήρωμα να διακρίνετε δύο περιπτώσεις: όταν η τροχιά της γ δεν τέμνει τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα $(-\infty, 0]$ και όταν η τροχιά της γ δεν τέμνει τον θετικό πραγματικό ημιάξονα $[0, +\infty)$. Για το τελευταίο ολοκλήρωμα υποθέστε ότι η τροχιά της γ δεν περιέχει κανένα από τα σημεία $k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.

6.1.2. (i) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\frac{z-1}{z+1}$ απεικονίζει το χωρίο $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ μέσα στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
(ii) Αποδείξτε ότι η $\frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}$ είναι παράγουσα της $\frac{1}{z^2-1}$ στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
(iii) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2 - 1}\,dz, \quad \int_\gamma \frac{1}{z^2 - 1}\,dz.$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα η γ είναι οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Στο δεύτερο ολοκλήρωμα η γ είναι οποιαδήποτε καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ με αρχικό άκρο το $-i$ και τελικό άκρο το i.

6.2 Το Θεώρημα Cauchy για τρίγωνα.

Το Θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα και η γενίκευσή του, την οποία θα δούμε αρκετά αργότερα, είναι η βάση για σχεδόν κάθε σημαντικό αποτέλεσμα της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Από τώρα και στο εξής θα συμβολίζουμε Δ ένα τρίγωνο, και T το ίδιο τρίγωνο Δ μαζί με τα σημεία που περικλείονται από αυτό. Αν θέλουμε να δηλώσουμε τις κορυφές a, b, c των Δ και T, θα γράφουμε $\Delta(a, b, c)$ και $T(a, b, c)$.

Θεώρημα Cauchy για τρίγωνα. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω, και τρίγωνο Δ ώστε $T \subseteq \Omega$ (δηλαδή το τρίγωνο καθώς και όλα τα σημεία τα οποία αυτό περικλείει περιέχονται στο Ω). Τότε*

$$\oint_{\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε (για συντομία)

$$I := \oint_{\Delta} f(z)\, dz,$$

οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι $I = 0$.
Θεωρούμε ότι

$$\Delta = \Delta(z_0, z_1, z_2),$$

δηλαδή ότι τα z_0, z_1, z_2 είναι οι κορυφές του Δ, και έστω w_2, w_0, w_1 τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_0]$, αντιστοίχως. Τότε το τρίγωνο $T(z_0, z_1, z_2)$ χωρίζεται στα τέσσερα τρίγωνα

$$T^{(0)} := T(z_0, w_2, w_1),\ T^{(1)} := T(w_2, z_1, w_0),\ T^{(2)} := T(w_0, z_2, w_1),\ T^{(3)} := T(w_2, w_0, w_1).$$

Ορίζουμε τα αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$I^{(0)} := \oint_{\Delta^{(0)}} f(z)\, dz,\ \ I^{(1)} := \oint_{\Delta^{(1)}} f(z)\, dz,\ \ I^{(2)} := \oint_{\Delta^{(2)}} f(z)\, dz,\ \ I^{(3)} := \oint_{\Delta^{(3)}} f(z)\, dz.$$

Βάσει των συμβολισμών και των αποτελεσμάτων στα παραδείγματα 4.4.4, 4.4.5 και 4.4.7, έχουμε

$$\begin{aligned}
I^{(0)} + I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} &= \int_{[z_0,w_2]} f(z)\, dz + \int_{[w_2,w_1]} f(z)\, dz + \int_{[w_1,z_0]} f(z)\, dz \\
&\quad + \int_{[w_2,z_1]} f(z)\, dz + \int_{[z_1,w_0]} f(z)\, dz + \int_{[w_0,w_2]} f(z)\, dz \\
&\quad + \int_{[w_0,z_2]} f(z)\, dz + \int_{[z_2,w_1]} f(z)\, dz + \int_{[w_1,w_0]} f(z)\, dz \\
&\quad + \int_{[w_2,w_0]} f(z)\, dz + \int_{[w_0,w_1]} f(z)\, dz + \int_{[w_1,w_2]} f(z)\, dz \\
&= \int_{[z_0,w_2]} f(z)\, dz + \int_{[w_2,z_1]} f(z)\, dz + \int_{[z_1,w_0]} f(z)\, dz \\
&\quad + \int_{[w_0,z_2]} f(z)\, dz + \int_{[z_2,w_1]} f(z)\, dz + \int_{[w_1,z_0]} f(z)\, dz \\
&= \int_{[z_0,z_1]} f(z)\, dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\, dz + \int_{[z_2,z_0]} f(z)\, dz \\
&= I.
\end{aligned}$$

Άρα

$$|I| \le |I^{(0)}| + |I^{(1)}| + |I^{(2)}| + |I^{(3)}|$$

και, επομένως, για ένα τουλάχιστον από τα $j = 0, 1, 2, 3$ ισχύει

$$|I^{(j)}| \geq \frac{1}{4}|I|.$$

Τώρα θεωρούμε τα αντίστοιχα τρίγωνα $\Delta^{(j)}$ και $T^{(j)}$ και τα ξανασυμβολίζουμε Δ_1 και T_1, και το $I^{(j)}$ το ξανασυμβολίζουμε I_1.
Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι μέσα στο αρχικό τρίγωνο T υπάρχει κάποιο τρίγωνο T_1 ώστε, αν $I = \oint_\Delta f(z)\,dz$ και $I_1 = \oint_{\Delta_1} f(z)\,dz$, να ισχύει $|I_1| \geq \frac{1}{4}|I|$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι $\mathrm{diam}(T_1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(T)$.
Αυτήν την διαδικασία μπορούμε να την επαναλάβουμε επ' άπειρον ώστε να δημιουργήσουμε μια ακολουθία εγκιβωτισμένων τριγώνων $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ και την αντίστοιχη ακολουθία επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ ώστε να ισχύουν τα εξής:
(i) $T \supseteq T_1 \supseteq \cdots \supseteq T_n \supseteq T_{n+1} \supseteq \cdots$,
(ii) $|I_n| \geq \frac{1}{4^n}|I|$,
(iii) $\mathrm{diam}(T_n) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{diam}(T)$.
Από την (i) και από την Πρόταση 2.10 συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο σημείο z το οποίο ανήκει σε κάθε τρίγωνο T_n. Ειδικώτερα, το z ανήκει στο T και, επομένως, στο Ω, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z.
Τώρα θεωρούμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο z, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\Big|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z)\Big| < \epsilon \quad \text{όταν } 0 < |\zeta - z| < \delta.$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με το $|\zeta - z|$ και, αφού παρατηρήσουμε ότι η σχέση που θα προκύψει ισχύει και για $\zeta = z$, έχουμε

$$|f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)| \leq \epsilon|\zeta - z| \quad \text{όταν } |\zeta - z| < \delta. \tag{6.1}$$

Κατόπιν, βάσει της (iii), θεωρούμε αρκετά μεγάλο n ώστε

$$\mathrm{diam}(T_n) < \delta.$$

Επειδή $z \in T_n$ και $\mathrm{diam}(T_n) < \delta$, συνεπάγεται ότι για κάθε $\zeta \in \Delta_n \subseteq T_n$ ισχύει

$$|\zeta - z| \leq \mathrm{diam}(T_n) < \delta,$$

οπότε από την (6.1) και από την (iii) έχουμε

$$|f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)| \leq \epsilon|\zeta - z| \leq \epsilon\,\mathrm{diam}(T_n) = \frac{\epsilon}{2^n}\,\mathrm{diam}(T) \quad \text{για κάθε } \zeta \in \Delta_n.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \Big|\oint_{\Delta_n} (f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z))\,d\zeta\Big| &\leq \frac{\epsilon}{2^n}\,\mathrm{diam}(T)\ \text{μήκος}(\Delta_n) \\ &\leq \frac{3\epsilon}{2^n}\,\mathrm{diam}(T)\ \mathrm{diam}(T_n) \\ &= \frac{3\epsilon}{4^n}(\mathrm{diam}(T))^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με το παράδειγμα 6.1.1, είναι

$$\oint_{\Delta_n} (f(z) + f'(z)(\zeta - z))\,d\zeta = 0$$

διότι η συνάρτηση $f(z) + f'(z)(\zeta - z)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση του ζ.
Άρα η (6.2) γίνεται

$$|I_n| = \Big| \oint_{\Delta_n} f(\zeta)\, d\zeta \Big| \leq \frac{3\epsilon}{4^n} (\text{diam}(T))^2.$$

Τέλος, από την (ii) συνεπάγεται

$$|I| \leq 3\epsilon (\text{diam}(T))^2.$$

Επειδή το ϵ είναι τυχών θετικός αριθμός, συνεπάγεται $I = 0$. □

Ασκήσεις.

6.2.1. Διατυπώστε και αποδείξτε ένα Θεώρημα Cauchy για *τετράγωνα*.

6.3 Γενικό Θεώρημα Cauchy για αστρόμορφα χωρία.

Ανακαλούμε το παράδειγμα 2.5.2. Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται *αστρόμορφο* αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο σημείο $z_0 \in A$ ώστε για κάθε $z \in A$ το ευθ. τμήμα $[z_0, z]$ να περιέχεται ολόκληρο στο A. Ένα τέτοιο σημείο z_0 χαρακτηρίζεται *κέντρο* του αστρόμορφου συνόλου A. Το κέντρο μπορεί να μην είναι μοναδικό, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε σημείο του αστρόμορφου συνόλου A είναι κέντρο του. Έχουμε δει ότι κάθε ανοικτό σύνολο A το οποίο είναι αστρόμορφο, είναι συνεκτικό, δηλαδή χωρίο.

Τα επόμενα δύο αποτελέσματα, η Πρόταση 6.3 και το Γενικό Θεώρημα Cauchy για αστρόμορφα χωρία, αναφέρουν δυο βασικά αποτελέσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης στην περίπτωση *αστρόμορφου* χωρίου. Σε πολλά βιβλία τα ίδια αποτελέσματα αναφέρονται για *κυρτά* χωρία: τα κυρτά χωρία είναι ειδικές περιπτώσεις αστρόμορφων χωρίων.

Πρόταση 6.3. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο αστρόμορφο χωρίο Ω. Τότε υπάρχει παράγουσα της f στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε σταθερό σημείο $z_0 \in \Omega$, το οποίο είναι κέντρο του Ω, και για κάθε $z \in \Omega$ ορίζουμε

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{6.3}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται διότι το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z]$ περιέχεται στο Ω και η f είναι συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.
Θεωρούμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο z, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon \quad \text{για } |\zeta - z| < \delta.$$

Έστω $|w - z| < \delta$. Τότε για κάθε $\zeta \in [z, w]$ ισχύει $|\zeta - z| < \delta$ και, επομένως, $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$.
Άρα

$$\Big| \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta \Big| \leq \epsilon |w - z| \quad \text{για } |w - z| < \delta. \tag{6.4}$$

Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $T(z_0, w, z)$ (δηλαδή το $\Delta(z_0, w, z)$ καθώς και τα σημεία το οποία αυτό περικλείει) περιέχεται στο Ω (δικαιολογήστε), οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Cauchy για τρίγωνα, ισχύει

$$\oint_{\Delta(z_0, w, z)} f(z)\, dz = 0.$$

Επομένως,

$$\int_{[z_0, w]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[w, z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z, z_0]} f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

οπότε βάσει και του τύπου (6.3) είναι

$$F(w) - F(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{6.5}$$

Χρησιμοποιώντας τις (6.4) και (6.5), έχουμε ότι, αν $0 < |w - z| < \delta$, τότε

$$\left|\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z)\right| = \left|\frac{F(w) - F(z) - (w - z)f(z)}{w - z}\right| = \frac{\left|\int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[z,w]} f(z)\, d\zeta\right|}{|w - z|}$$
$$= \frac{\left|\int_{[z,w]}(f(\zeta) - f(z))\, d\zeta\right|}{|w - z|} \leq \frac{\epsilon|w - z|}{|w - z|} = \epsilon.$$

Άρα $\lim_{w\to z} \frac{F(w)-F(z)}{w-z} = f(z)$. □

Γενικό Θεώρημα Cauchy για αστρόμορφα χωρία. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο αστρόμορφο χωρίο Ω. Τότε για κάθε καμπύλη γ στο Ω το $\int_\gamma f(z)\, dz$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της. Ειδικώτερα, για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω είναι*

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Απόδειξη. Συνδυασμός των Προτάσεων 6.1 και 6.3. □

Παράδειγμα 6.3.1. Θεωρούμε το χωρίο $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0. Τότε

$$\oint_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο A.
Αυτό μπορούμε να το δούμε με δύο τρόπους.
Ο πρώτος τρόπος αναφέρθηκε στο παράδειγμα 6.1.5. Επαναλαμβάνουμε συνοπτικά. Γνωρίζουμε ότι στο A ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου, και ότι κάθε τέτοιος κλάδος είναι παράγουσα της $\frac{1}{z}$ στο A. Άρα το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 6.1.
Ο δεύτερος τρόπος έχει ως εξής. Το A είναι αστρόμορφο χωρίο και η $\frac{1}{z}$ είναι αναλυτική σ' αυτό. Άρα το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή του Γενικού Θεωρήματος Cauchy για αστρόμορφα χωρία.
Φυσικά, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = 0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο αστρόμορφο χωρίο $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το z_0.
Ας δούμε *πολύ προσεκτικά* τη διαφορά με την κατάσταση στο παράδειγμα 6.1.4. Στο παράδειγμα 6.1.4 η τροχιά γ^* της καμπύλης γ είναι κύκλος με κέντρο z_0, οπότε η γ^* "περικυκλώνει" το σημείο z_0. Αν, όμως, αφαιρέσουμε μια ημιευθεία L με κορυφή το z_0, και θεωρήσουμε, όπως στο παρόν παράδειγμα, καμπύλη γ στο σύνολο A που απομένει, τότε η τροχιά γ^* δεν μπορεί να "κόψει" την ημιευθεία και, επομένως, δεν μπορεί να "περικυκλώσει" το z_0.

Θα περιγράψουμε τώρα μια πάρα πολύ χρήσιμη τεχνική για να χειριζόμαστε επικαμπύλια ολοκληρώματα αναλυτικών συναρτήσεων. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται κυρίως σε δυο χαρακτηριστικές περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση. Έστω ότι η $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο χωρίο Ω, ότι το Ω *δεν είναι αστρόμορφο*, και έστω κλειστή καμπύλη γ στο Ω. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\oint_\gamma f(z)\, dz$.

Αν το Ω ήταν αστρόμορφο, θα συμπεραίναμε ότι $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$. Υποθέτουμε ότι το σχήμα της τροχιάς γ^* είναι οπτικά απλό, και ότι μπορούμε να διακρίνουμε το "εσωτερικό" της, δηλαδή το ανοικτό σύνολο D των σημείων τα οποία η γ^* "περικυκλώνει", και υποθέτουμε ότι το D είναι υποσύνολο του Ω, οπότε η f είναι αναλυτική στο D και στην τροχιά γ^* της καμπύλης. Υποθέτουμε, επίσης, ότι το σύνορο του D είναι η τροχιά γ^*.
Η τεχνική που θα εφαρμόσουμε έχει ως εξής. Βρίσκουμε μέσα στο D ανοικτά σύνολα $D_1, \dots, D_m$ ξένα ανά δύο έτσι ώστε τα σύνορά τους να είναι τροχιές κλειστών καμπυλών $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, έτσι ώστε η ένωση των $D_1, \dots, D_m$ και των $\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*$ να ισούται με την ένωση του D και της γ^*, και, τέλος, έτσι ώστε: όταν αναλύσουμε με κατάλληλο τρόπο καθεμιά από τις $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ σε μικρότερες καμπύλες και όταν απαλείψουμε από αυτές τις μικρότερες καμπύλες εκείνες που είναι αντίθετες να απομείνουν κάποιες καμπύλες των οποίων η σύνθεση είναι η αρχική καμπύλη γ. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_{\sigma_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\sigma_m} f(z)\,dz.$$

Αυτήν την τεχνική την εφαρμόσαμε ήδη στην απόδειξη του Θεωρήματος Cauchy για τρίγωνα, με τον χωρισμό ενός τριγώνου σε τέσσερα μικρότερα τρίγωνα.
Αν, τώρα, καταφέρουμε να επιλέξουμε τα διάφορα $D_1, \dots, D_m$ έτσι ώστε κάθε D_k μαζί με την συνοριακή του τροχιά σ_k^* να περιέχεται σε ένα αντίστοιχο *αστρόμορφο* χωρίο το οποίο περιέχεται στο Ω, τότε θα συμπεράνουμε ότι

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_{\sigma_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\sigma_m} f(z)\,dz = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Δεύτερη περίπτωση. Έστω ότι η $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο χωρίο Ω και έστω κλειστές καμπύλες $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ στο Ω. Θέλουμε να συσχετίσουμε τα $\oint_\gamma f(z)\,dz, \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz, \dots, \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz$.
Υποθέτουμε ότι τα σχήματα των τροχιών $\gamma^*, \gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$ είναι οπτικά απλά, ότι όλες αυτές οι τροχιές είναι ανά δύο ξένες, ότι η γ^* "περικυκλώνει" τις $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$, ότι καμία από τις $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$ δεν "περικυκλώνει" τις άλλες, ότι διακρίνουμε το "ενδιάμεσο" σύνολο, δηλαδή το ανοικτό σύνολο D των σημείων τα οποία "περικυκλώνει" η γ^* και δεν "περικυκλώνουν" οι $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$, και υποθέτουμε ότι το D είναι υποσύνολο του Ω, οπότε η f είναι αναλυτική στο D και στις τροχιές $\gamma^*, \gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι το σύνορο του D είναι η ένωση $\gamma^* \cup \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$ όλων των τροχιών.
Τώρα, η τεχνική έχει ως εξής. Βρίσκουμε μέσα στο D ανοικτά σύνολα $D_1, \dots, D_m$ ξένα ανά δύο έτσι ώστε τα σύνορά τους να είναι τροχιές κλειστών καμπυλών $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, έτσι ώστε η ένωση των $D_1, \dots, D_m$ και των $\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*$ να ισούται με την ένωση του D και των $\gamma^*, \gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$, και, τέλος, έτσι ώστε: όταν αναλύσουμε με κατάλληλο τρόπο καθεμιά από τις $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ σε μικρότερες καμπύλες και όταν απαλείψουμε από αυτές τις μικρότερες καμπύλες εκείνες που είναι αντίθετες να απομείνουν κάποιες καμπύλες των οποίων η σύνθεση είναι η αρχική καμπύλη γ και οι αντίθετες $\neg\gamma_1, \dots, \neg\gamma_n$ των $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz - \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz - \cdots - \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz = \oint_{\sigma_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\sigma_m} f(z)\,dz.$$

Αν καταφέρουμε να επιλέξουμε τα διάφορα $D_1, \dots, D_m$ έτσι ώστε κάθε D_k μαζί με την συνοριακή του τροχιά σ_k^* να περιέχεται σε ένα αντίστοιχο *αστρόμορφο* χωρίο το οποίο περιέχεται στο Ω, τότε θα συμπεράνουμε ότι

$$\oint_\gamma f(z)\,dz - \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz - \cdots - \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz = \oint_{\sigma_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\sigma_m} f(z)\,dz = 0 + \cdots + 0 = 0$$

και, επομένως,

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

Πόρισμα 6.2. *Έστω κύκλοι $C, C_1, \dots, C_n$, και έστω $D, D_1, \dots, D_n$ οι αντίστοιχοι ανοικτοί δίσκοι. Υποθέτουμε ότι οι αντίστοιχοι κλειστοί δίσκοι $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_n$ είναι ανά δύο ξένοι και ότι περιέχονται στον ανοικτό δίσκο D. Θεωρούμε και το κλειστό σύνολο M το οποίο είναι η διαφορά του $\overline{D}$ από την ένωση $D_1 \cup \cdots \cup D_n$. Αν η $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική σε κάποιο χωρίο Ω το οποίο περιέχει το M, τότε*

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,dz.$$

Αντί κύκλων μπορούμε να θεωρήσουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα ή τρίγωνα ή οποιοδήποτε συνδυασμό των τριών σχημάτων.

Παράδειγμα 6.3.2. Έστω $f : D(z_0; R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$ και έστω $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Τότε

$$\boxed{\oint_{C(z_0;r_1)} f(z)\,dz = \oint_{C(z_0;r_2)} f(z)\,dz.} \tag{6.6}$$

Δηλαδή, *αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$, τότε το $\oint_{C(z_0;r)} f(z)\,dz$ είναι ανεξάρτητο της ακτίνας r (με $R_1 < r < R_2$).*

Ας δούμε τώρα το αντίστροφο του Πορίσματος 6.1.

Πρόταση 6.4. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο χωρίο Ω. Τα παρακάτω (i), (ii), (iii) είναι ισοδύναμα.*
(i) Για κάθε καμπύλη γ στο Ω το $\int_\gamma f(z)\,dz$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της.
(ii) Για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω είναι $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.
(iii) Υπάρχει παράγουσα της f στο Ω.

Απόδειξη. Το Πόρισμα 6.1 λέει ότι το (iii) συνεπάγεται τα (i), (ii). Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι τα (i), (ii) είναι ισοδύναμα και ότι συνεπάγονται το (iii).
Έστω ότι ισχύει το (i). Αν η καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \Omega$ είναι κλειστή, δηλαδή $\gamma(a) = \gamma(b)$, θέτουμε $z_0 := \gamma(a) = \gamma(b)$, και θεωρούμε την *σταθερή* καμπύλη $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ με $\gamma_1(t) = z_0$ για κάθε $t \in [a, b]$. Οι γ, γ_1 έχουν τα ίδια άκρα, οπότε λόγω υπόθεσης ισχύει

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = \int_a^b f(z_0)\,0\,dt = 0.$$

Άρα ισχύει το (ii).
Έστω ότι ισχύει το (ii). Έστω ότι οι καμπύλες γ_1, γ_2 στο Ω έχουν τα ίδια άκρα. Τότε η καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} (\neg\gamma_2)$ είναι στο Ω και είναι κλειστή. Άρα λόγω υπόθεσης έχουμε

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\neg\gamma_2} f(z)\,dz = \oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

οπότε $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.
Έστω ότι ισχύει το (i). Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο z_0 του Ω.
Επειδή το Ω είναι χωρίο, για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει τουλάχιστον μια καμπύλη γ (και μάλιστα, πολυγωνική) στο Ω η οποία έχει αρχικό άκρο το z_0 και τελικό άκρο το z. Ορίζουμε

$$F(z) := \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta.$$

Έτσι ορίζεται συνάρτηση

$$F : \Omega \to \mathbb{C}.$$

Τώρα είναι βασικό να καταλάβουμε ότι για να είναι η F *συνάρτηση* πρέπει ο αριθμός $F(z)$ να είναι *μονοσήμαντα ορισμένος*. Δηλαδή, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η αριθμητική τιμή του $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$ εξαρτάται μόνο από το z και όχι από την καμπύλη γ που επιλέγουμε για να συνδέσουμε το z_0 με το z. Αυτό, όμως, εξασφαλίζεται ακριβώς από την υπόθεση (i).

Απομένει να αποδείξουμε ότι ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.

Θεωρούμε οποιοδήποτε $z_1 \in \Omega$ και, επειδή το Ω είναι ανοικτό, υπάρχει δίσκος $D(z_1; r) \subseteq \Omega$. Θεωρούμε επίσης μια καμπύλη γ_0 στο Ω με αρχικό άκρο z_0 και τελικό άκρο z_1, και για κάθε $z \in D(z_1; r)$ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[z_1, z]$, και ορίζουμε

$$G(z) := \int_{[z_1,z]} f(\zeta)\, d\zeta \quad \text{για } z \in D(z_1; r).$$

Ο δίσκος $D(z_1; r)$ είναι, φυσικά, αστρόμορφο χωρίο, και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση G που ορίσαμε στο $D(z_1; r)$ είναι ακριβώς η συνάρτηση F που ορίσαμε στην γενική περίπτωση αστρόμορφου συνόλου στην απόδειξη της Πρότασης 6.3. (Απλώς αντί του z_0 έχουμε το z_1 και ως Ω θεωρούμε το $D(z_1; r)$). Άρα ισχύει

$$G'(z) = f(z) \quad \text{για } z \in D(z_1; r).$$

Τώρα, για $z \in D(z_1; r)$ θεωρούμε την καμπύλη γ_1 με τύπο $\gamma_1(t) = (1-t)z_1 + tz$, $t \in [0, 1]$, η οποία έχει τροχιά το ευθ.τμήμα $[z_1, z]$ με αρχικό άκρο z_1 και τελικό άκρο z. Κατόπιν θεωρούμε την καμπύλη $\gamma = \gamma_0 \dot{+} \gamma_1$ στο Ω με αρχικό άκρο z_0 και τελικό άκρο z, και τότε είναι

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma_1} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_1,z]} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta + G(z) \quad \text{για } z \in D(z_1; r). \end{aligned}$$

Επειδή το $\int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta$ δεν εξαρτάται από το z, συνεπάγεται

$$F'(z) = G'(z) = f(z) \quad \text{για } z \in D(z_1; r)$$

και, επομένως, $F'(z_1) = f(z_1)$. Επειδή το z_1 είναι οποιοδήποτε σημείο του Ω, η F είναι παράγουσα της f στο Ω. $\square$

Ασκήσεις.

6.3.1. Υπολογίστε με τρεις τρόπους το $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$, όπου γ είναι κλειστή καμπύλη που διαγράφει μία φορά και με τη θετική φορά περιστροφής ένα τετράγωνο R με κέντρο το 0 και πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες, και όπου το z περικλείεται από το R:

(i) Χρησιμοποιήστε παραμετρικές εξισώσεις των ευθυγράμμων τμημάτων που αποτελούν την γ και κάντε υπολογισμούς.

(ii) Βάσει της Πρότασης 5.13, αποδείξτε ότι η παράγωγος του $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$, ως συνάρτηση του z, είναι ίση με 0 στο τετραγωνικό χωρίο Q των σημείων που περικλείονται από το R. Έτσι η τιμή του $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$ είναι ίση με την τιμή του $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$, η οποία υπολογίζεται εύκολα όπως περιγράφεται στο (i).

(iii) Δείτε ότι, με τρόπο όμοιο με του παραδείγματος 6.3.2, η απάντηση ανάγεται στον υπολογισμό επικαμπυλίου ολοκληρώματος σε έναν μικρό κύκλο με κέντρο z.

6.3.2. Έστω $z \in D(z_0; R)$. Υπολογίστε με τρεις τρόπους το $\oint_{C(z_0;R)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$:
(i) Χρησιμοποιήστε την παραμετρική εξίσωση του κύκλου και κάντε υπολογισμούς.
(ii) Βάσει της Πρότασης 5.13, αποδείξτε ότι η παράγωγος του $\oint_{C(z_0;R)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$, ως συνάρτηση του z, είναι ίση με 0 στον δίσκο $D(z_0; R)$. Έτσι η τιμή του $\oint_{C(z_0;R)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$ είναι ίση με την τιμή του $\oint_{C(z_0;R)} \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta$, την οποία γνωρίζουμε.
(iii) Δείτε ότι, με τρόπο όμοιο με του παραδείγματος 6.3.2, η απάντηση ανάγεται στον υπολογισμό επικαμπυλίου ολοκληρώματος σε έναν μικρό κύκλο με κέντρο z.

6.3.3. Έστω $y, R > 0$ και $\gamma_{R,y}$ η κλειστή καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά και με τη θετική φορά περιστροφής, διαδοχικά: το ευθ.τμήμα $[-R, R]$, το ευθ. τμήμα $[R, R + iy]$, το ευθ. τμήμα $[R + iy, -R + iy]$, και το ευθ. τμήμα $[-R + iy, -R]$.
(i) Αποδείξτε ότι, με σταθερό $y > 0$, ισχύει $\int_{[R,R+iy]} e^{-z^2}\, dz \to 0$ και $\int_{[-R+iy,-R]} e^{-z^2}\, dz \to 0$ όταν $R \to +\infty$.
(ii) Κατόπιν, αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx$ δεν εξαρτάται από το $y \in [0, +\infty)$.
(iii) Τέλος, χρησιμοποιώντας τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy)\, dx = \sqrt{\pi} e^{-y^2}$$

για κάθε $y \geq 0$ και, αμέσως μετά και πολύ εύκολα, για κάθε $y \leq 0$. Ο τύπος αυτός είναι κεντρικής σημασίας για την Ανάλυση Fourier.

6.3.4. Έστω γ_R η κλειστή καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά και με τη θετική φορά περιστροφής, διαδοχικά: το ευθύγραμμο τμήμα από το 0 στο R, το τόξο του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα R από το R στο $Re^{i\frac{\pi}{4}}$, και το ευθύγραμμο τμήμα από το $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ στο 0. Έστω, επίσης, σ_R η καμπύλη η οποία διαγράφει μόνο το προαναφερθέν τόξο από το R στο $Re^{i\frac{\pi}{4}}$.
(i) Αποδείξτε ότι $\int_{\sigma_R} e^{-z^2}\, dz \to 0$ όταν $R \to +\infty$.
(ii) Κατόπιν, χρησιμοποιώντας κατάλληλα την γ_R και τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, αποδείξτε τους τύπους για τα λεγόμενα ολοκληρώματα Fresnel:

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

6.4 Οι τύποι Cauchy για κύκλους, και η άπειρη παραγωγισιμότητα μιας αναλυτικής συνάρτησης.

Τύπος Cauchy για κύκλους. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω. Αν $\overline{D}(z_0; r_0) \subseteq \Omega$, τότε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0).$$

Απόδειξη. Έστω $z \in D(z_0; r_0)$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε κλειστό δίσκο $\overline{D}(z; r)$ ο οποίος περιέχεται στον ανοικτό δίσκο $D(z_0; r_0)$, και την συνάρτηση $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ (ως συνάρτηση του ζ), η οποία είναι αναλυτική στο χωρίο $\Omega \setminus \{z\}$ το οποίο περιέχει το κλειστό σύνολο $\overline{D}(z_0; r_0) \setminus D(z; r)$. Από το Πόρισμα 6.2 συνεπάγεται ότι

$$\oint_{C(z_0;r_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint_{C(z;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{6.7}$$

Τώρα, ισχύει

$$\oint_{C(z;r)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt = 2\pi i,$$

οπότε

$$\oint_{C(z;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z) = \oint_{C(z;r)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{6.8}$$

Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο z, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon \quad \text{για κάθε } \zeta \in \Omega \text{ με } |\zeta - z| < \delta.$$

Άρα, αν $0 < r < \delta$, τότε η (6.8) συνεπάγεται

$$\Big| \oint_{C(z;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z) \Big| \le \frac{\epsilon}{r}\, 2\pi r = 2\pi\epsilon.$$

Επειδη το $\epsilon > 0$ είναι τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{r\to 0} \oint_{C(z;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Παίρνοντας $r \to 0$ στην (6.7), βρίσκουμε ότι $\oint_{C(z_0;r_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z)$. □

Μια ειδική περίπτωση του τύπου Cauchy για κύκλους είναι όταν $z = z_0$, το κέντρο του κύκλου $C(z_0; r_0)$. Χρησιμοποιώντας την παραμετρική εξίσωση $\zeta = z_0 + r_0 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, προκύπτει

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{it})\, dt}$$

και αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **ιδιότητα μέσης τιμής** της αναλυτικής συνάρτησης f.

Θεώρημα 6.1. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω. Τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιοδήποτε $z_0 \in \Omega$ και έναν κλειστό δίσκο $\overline{D}(z_0; r_0) \subseteq \Omega$. Εφαρμόζουμε τον τύπο Cauchy για κύκλους

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0). \tag{6.9}$$

Θεωρούμε τις δυο μεριές της (6.9) ως συναρτήσεις περιορισμένες στον ανοικτό δίσκο $D(z_0; r_0)$. Η αριστερή μεριά f είναι αναλυτική στον $D(z_0; r_0)$ και, σύμφωνα με την Πρόταση 5.13, και η δεξιά μεριά είναι αναλυτική στον $D(z_0; r_0)$. Η (6.9) λέει ότι οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται στον $D(z_0; r_0)$, οπότε και οι παράγωγοί τους ταυτίζονται στον $D(z_0; r_0)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας και τον τύπο για την παράγωγο της δεξιάς μεριάς από την Πρόταση 5.13, έχουμε

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0). \tag{6.10}$$

Τώρα δεν γνωρίζουμε αν η αριστερή μεριά της (6.10) είναι, ως συνάρτηση του z στον δίσκο $D(z_0; r_0)$, παραγωγίσιμη. Γνωρίζουμε, όμως, από την Πρόταση 5.13 ότι η δεξιά μεριά της (6.10) είναι παραγωγισιμη στον $D(z_0; r_0)$, οπότε επειδή οι δυο μεριές ταυτίζονται στον $D(z_0; r_0)$, συνεπάγεται ότι και η αριστερή μεριά f' είναι παραγωγίσιμη στον $D(z_0; r_0)$ και, από τον τύπο της Πρότασης 5.13, έχουμε

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0). \tag{6.11}$$

Αυτό το επιχείρημα το επαναλαμβάνουμε επαγωγικά και καταλήγουμε στο ότι για κάθε n η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στον δίσκο $D(z_0; r_0)$ και ότι ισχύει

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0). \tag{6.12}$$

Άρα η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στον δίσκο $D(z_0; r_0)$ και, ειδικώτερα, στο σημείο z_0. Επειδή το z_0 είναι τυχόν σημείο του Ω, έχουμε ότι η f άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω. □

Σχόλιο. Μπορούμε τώρα να κλείσουμε το "άνοιγμα" που υπάρχει σε σχέση με την απόδειξη της Πρότασης 5.14. Πράγματι, από την $f = u + iv$ έχουμε ότι

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη, συνεπάγεται ότι οι $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, έχουν μερικές παραγώγους ως προς x, y και, μάλιστα,

$$f'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Επίσης, επειδή η f'' είναι συνεχής, έχουμε ότι όλες οι παράγωγοι δεύτερης τάξης των u, v ως προς x, y είναι συνεχείς.
Επαγωγικά, μπορούμε να δούμε ότι οι u, v είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες ως προς x, y.

Τύπος Cauchy για παραγώγους και κύκλους. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω. Αν $\overline{D}(z_0; r_0) \subseteq \Omega$, τότε για κάθε n έχουμε*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \textit{για κάθε } z \in D(z_0; r_0).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη έγινε ήδη μέσα στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1. □

Παράδειγμα 6.4.1. Ισχύει

$$\oint_{C(z_0;r_0)} \frac{1}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta = 0 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και κάθε } z \notin \overline{D}(z_0; r_0).$$

Για να το αποδείξουμε παρατηρούμε ότι ο κύκλος $C(z_0; r_0)$ περιέχεται σε έναν λίγο μεγαλύτερο ανοικτό δίσκο $D(z_0; r_0')$ ο οποίος δεν περιέχει το z: αρκεί να πάρουμε $r_0 < r_0' < |z - z_0|$. Τότε ο δίσκος $D(z_0; r_0')$ είναι αστρόμορφο χωρίο και η $\frac{1}{(\zeta - z)^n}$ είναι αναλυτική συνάρτηση του ζ στον $D(z_0; r_0')$. Τώρα ο παραπάνω τύπος είναι αποτέλεσμα του Γενικού Θεωρήματος Cauchy για αστρόμορφα χωρία.
Από την άλλη μεριά, ισχύει

$$\oint_{C(z_0;r_0)} \frac{1}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & \text{αν } n = 1 \\ 0, & \text{αν } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0).$$

Αυτό είναι απλή εφαρμογή του τύπου Cauchy για παραγώγους και κύκλους με την σταθερή συνάρτηση 1. Την ειδική περίπτωση με $z = z_0$ την έχουμε συναντήσει στην άσκηση 4.4.8.

Εκτιμήσεις Cauchy. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω, και $\overline{D}(z_0; r_0) \subseteq \Omega$. Αν $|f(\zeta)| \leq M$ για κάθε $\zeta \in C(z_0; r_0)$, τότε*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M}{r_0^n} \quad \textit{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή του τύπου Cauchy για παραγώγους και κύκλους:

$$|f^{(n)}(z_0)| = \Big|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r_0)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\Big| \le \frac{n!}{2\pi}\,\frac{M}{r_0^{n+1}}\,2\pi r_0 = \frac{n!M}{r_0^n}.$$

□

Ασκήσεις.

6.4.1. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 0$ υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\oint_{C(0;1)}\frac{e^{\zeta}}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

Κατόπιν υπολογίστε τα πραγματικά ολοκληρώματα:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta-\sin\theta)\,d\theta, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta.$$

6.4.2. Αν $z \in D(0;1)$ και $m,n \in \mathbb{Z}$, $n,m \ge 0$ υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\oint_{C(0;1)}\frac{\zeta^m}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,\ \oint_{C(0;1)}\frac{e^{i\zeta}}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,\ \oint_{C(0;1)}\frac{\sin\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,\ \oint_{C(0;1)}\frac{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Ποιά είναι η τιμή των ολοκληρωμάτων αν $z \notin \overline{D}(0;1)$;

6.4.3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\oint_{C(0;r)}\frac{e^{\zeta}}{\zeta(\zeta^2+1)}\,d\zeta \qquad \text{με } 0<r<1 \text{ και με } 1<r<+\infty,$$

$$\oint_{C(0;r)}\frac{e^{\zeta}}{\zeta(\zeta^2+1)(\zeta^2+4)^2}\,d\zeta \qquad \text{με } 0<r<1 \text{ και με } 1<r<2 \text{ και με } 2<r<+\infty.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα με $1<r<+\infty$ χωρίστε το $\frac{1}{\zeta(\zeta^2+1)} = \frac{1}{\zeta(\zeta+i)(\zeta-i)}$ σε απλά κλάσματα, γράφοντάς το στη μορφή $\frac{a}{\zeta}+\frac{b}{\zeta+i}+\frac{c}{\zeta-i}$ με κατάλληλα a,b,c. Καντε το ίδιο για το δεύτερο ολολήρωμα όταν $1<r<2$. Αλλά όταν $2<r<+\infty$ χωρίστε το $\frac{1}{\zeta(\zeta^2+1)(\zeta^2+4)^2} = \frac{1}{\zeta(\zeta+i)(\zeta-i)(\zeta+2i)^2(\zeta-2i)^2}$ σε απλά κλάσματα, γράφοντάς το στη μορφή $\frac{a}{\zeta}+\frac{b}{\zeta+i}+\frac{c}{\zeta-i}+\frac{d\zeta+e}{(\zeta+2i)^2}+\frac{f\zeta+g}{(\zeta-2i)^2}$ με κατάλληλα a,b,c,d,e,f,g.

6.5 Το Θεώρημα Liouville, και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

Θεώρημα Liouville. *Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Αν η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει $M \ge 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| \le M$ για κάθε z. Παίρνουμε οποιοδήποτε z_0 και εφαρμόζουμε την εκτίμηση Cauchy για την πρώτη παράγωγο της f και με τυχόντα κύκλο $C(z_0;r_0)$ κέντρου z_0. Έχουμε, λοιπόν,

$$|f'(z_0)| \le \frac{M}{r_0}.$$

Επειδή αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $r_0>0$, συνεπάγεται $|f'(z_0)|=0$. Επειδή το z_0 είναι τυχόν, η f' είναι μηδενική στο χωρίο $\mathbb{C}$ και άρα η f είναι σταθερή. □

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. *Κάθε πολυώνυμο βαθμού ≥ 1 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε πολυώνυμο p βαθμού ≥ 1 και υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{C}$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Θεωρούμε την συνάρτηση $f = \frac{1}{p}$ η οποία είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και αποδεικνύουμε εύκολα ότι είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$. Πράγματι, επειδή $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$, συνεπάγεται ότι $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, οπότε υπάρχει $R > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq 1$ για κάθε z με $|z| > R$. Η $|f|$ είναι συνεχής στον συμπαγή δίσκο $\overline{D}(0; R)$, οπότε είναι φραγμένη σ'αυτόν τον δίσκο και άρα υπάρχει $M' \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq M'$ για κάθε z με $|z| \leq R$. Θεωρώντας τον αριθμό $M = \max\{M', 1\}$, έχουμε ότι ισχύει $|f(z)| \leq M$ για κάθε z και άρα η f είναι φραγμένη.
Τώρα, από το Θεώρημα Liouville συνεπάγεται ότι η f και, επομένως, και το πολυώνυμο p είναι σταθερή συνάρτηση. Αυτό είναι άτοπο. $\square$

Έχοντας αποδείξει ότι ένα πολυώνυμο $p(z)$ έχει μια ρίζα z_1, με αλγεβρικές πράξεις αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι το $z - z_1$ είναι παράγων του πολυωνύμου, δηλαδή ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_1(z)$ ώστε να ισχύει $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$ για κάθε z. Αν το $p_1(z)$ είναι βαθμού ≥ 1, τότε κι αυτό έχει κάποια ρίζα z_2 και με το ίδιο επιχείρημα έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_2(z)$ ώστε να ισχύει $p_1(z) = (z - z_2)p_2(z)$ και, επομένως, $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)p_2(z)$ για κάθε z. Συνεχίζοντας επαγωγικά, καταλήγουμε στο ότι, αν $n \geq 1$ είναι ο βαθμός του αρχικού πολυωνύμου $p(z)$, υπάρχουν $z_1, \ldots, z_n$ ώστε να ισχύει

$$p(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z_n) \quad \text{για κάθε } z$$

όπου c είναι μια σταθερά. Είναι προφανές ότι το c είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $p(z)$. Έτσι, λοιπόν, αποδεικνύεται ότι:

Κάθε πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ έχει n ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Ασκήσεις.

6.5.1. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και έστω ότι υπάρχουν σταθεροί αριθμοί A, M και φυσικός n ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq A + M|z|^n$ για κάθε z. Ακολουθώντας τη μέθοδο της απόδειξης του Θεωρήματος Liouville, αποδείξτε ότι ισχύει $f^{(n+1)}(z) = 0$ για κάθε z και, τέλος, ότι η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n$.

6.6 Η Αρχή Μεγίστου.

Αρχή Μεγίστου. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω και έστω $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \Omega$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ έτσι ώστε $|f(z_0)| = M$, τότε η f είναι σταθερή στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ανοικτό δίσκο $D(z_0; r_0) \subseteq \Omega$ και οποιοδήποτε r με $0 < r < r_0$. Από την ιδιότητα μέσης τιμής έχουμε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt. \tag{6.13}$$

Επειδή ισχύει

$$|f(z_0 + re^{it})| \leq M \quad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi] \tag{6.14}$$

συνεπάγεται

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \leq \int_0^{2\pi} M\, dt = 2\pi M. \tag{6.15}$$

Άρα η (6.13) συνεπάγεται

$$M = |f(z_0)| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\,dt \le M. \tag{6.16}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι δυο ανισότητες στην (6.16) πρέπει να είναι ισότητες, οπότε η ανισότητα (6.15) πρέπει να είναι ισότητα. Όμως, η (6.15) προέκυψε από την (6.14) και, επειδή οι δυο μεριές της (6.14) είναι συνεχείς συναρτήσεις του t στο $[0, 2\pi]$, συνεπάγεται

$$|f(z_0 + re^{it})| = M \quad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi].$$

Τώρα θυμόμαστε ότι το r είναι τυχόν στο διάστημα $(0, r_0)$, οπότε

$$|f(z_0 + re^{it})| = M \quad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi] \text{ και κάθε } r \in (0, r_0).$$

Άρα

$$|f(z)| = M \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0).$$

Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι:

Αν ισχύει $|f(z)| = M$ σε κάποιο σημείο $z \in U$, τότε η ισότητα αυτή ισχύει σε κάθε σημείο σε μια περιοχή του z.

Αυτό το αποδείξαμε για το συγκεκριμένο σημείο $z = z_0$, αλλά η μόνη ιδιότητα του z_0 που χρησιμοποιήθηκε ήταν ότι $|f(z_0)| = M$, οπότε ισχύει και για κάθε άλλο σημείο με αυτήν την ιδιότητα.

Κατόπιν θεωρούμε τα εξής υποσύνολα του Ω.

$$B = \{z \in \Omega \,|\, |f(z)| = M\}, \quad C = \{z \in \Omega \,|\, |f(z)| < M\}.$$

Είναι σαφές ότι

$$B \cup C = U, \quad B \cap C = \emptyset.$$

Αν πάρουμε οποιοδήποτε $z \in B$, τότε $|f(z)| = M$, οπότε σύμφωνα με αυτό που αποδείξαμε προηγουμένως, θα ισχύει η ίδια ισότητα σε κάθε σημείο ενός ανοικτού δίσκου κέντρου z, οπότε ένας τέτοιος ανοικτός δίσκος θα περιέχεται στο σύνολο B. Άρα κάθε $z \in B$ είναι εσωτερικό σημείο του B, οπότε το B είναι ανοικτό σύνολο. Απο την άλλη μεριά, αν $z \in C$, τότε $|f(z)| < M$, οπότε λόγω συνέχειας της f θα ισχύει η ίδια ισότητα σε κάθε σημείο ενός ανοικτού δίσκου κέντρου z, οπότε ένας τέτοιος ανοικτός δίσκος θα περιέχεται στο σύνολο C. Άρα κάθε $z \in C$ είναι εσωτερικό σημείο του C, οπότε το C είναι ανοικτό σύνολο. Από την Πρόταση 3.15 (με το Ω ως A) συνεπάγεται ότι ένα από τα δυο σύνολα B, C είναι κενό. Επειδή $z_0 \in B$, συνεπάγεται $C = \emptyset$ και άρα

$$|f(z)| = M \quad \text{για κάθε } z \in \Omega. \tag{6.17}$$

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή στο Ω γνωρίζοντας ότι το μέτρο της, το $|f|$, είναι σταθερό στο Ω.

Κατ' αρχάς, αν $M = 0$, τότε είναι προφανές ότι από την $|f| = 0$ συνεπάγεται $f = 0$ στο Ω. Άρα, αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση $M > 0$. Γράφουμε

$$f = u + iv,$$

όπου u και v είναι το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της f.

Η (6.17) γράφεται

$$u^2 + v^2 = M^2 \quad \text{στο } U$$

και, παραγωγίζοντας ως προς x και y ξεχωριστά, έχουμε

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{στο } \Omega.$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (C-R), μετασχηματίζουμε την δεύτερη ισότητα και έχουμε

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad -u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad \text{στο }\Omega. \tag{6.18}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη ισότητα (6.18) με u και την δεύτερη με v και προσθέτοντας, βρίσκουμε

$$(u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad \text{στο }\Omega$$

και, επειδή $u^2+v^2=M^2>0$, συνεπάγεται

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad \text{στο }\Omega.$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη ισότητα (6.18) με v και την δεύτερη με $-u$ και προσθέτοντας, βρίσκουμε

$$(u^2+v^2)\frac{\partial v}{\partial x}=0\quad \text{στο }\Omega$$

και, πάλι επειδή $u^2+v^2=M^2>0$, συνεπάγεται

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0\quad \text{στο }\Omega.$$

Επομένως,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(z)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z)=0\quad \text{για κάθε } z\in\Omega.$$

Άρα η f είναι σταθερή στο χωρίο Ω. □

Η Αρχή Μεγίστου λέει ότι, *αν η f είναι μη-σταθερή αναλυτική συνάρτηση σε χωρίο Ω, τότε η $|f|$ δεν πιάνει μέγιστη τιμή στο Ω.*

Υπάρχει και μία ανάλογη Αρχή Ελαχίστου για αναλυτικές συναρτήσεις σε χωρίο οι οποίες δεν μηδενίζονται πουθενά στο χωρίο.

Αρχή Ελαχίστου. *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω και έστω $|f(z)|\geq m>0$ για κάθε $z\in\Omega$. Αν υπάρχει $z_0\in\Omega$ έτσι ώστε $|f(z_0)|=m$, τότε η f είναι σταθερή στο Ω.*

Απόδειξη. Από το $|f(z)|\geq m>0$ για κάθε $z\in\Omega$ συνεπάγεται ότι ορίζεται η $\frac{1}{f}:\Omega\to\mathbb{C}$ και είναι αναλυτική στο χωρίο Ω. Επίσης, ισχύει $\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leq\frac{1}{m}$ για κάθε $z\in\Omega$.
Αν υπάρχει $z_0\in\Omega$ έτσι ώστε $|f(z_0)|=m$, τότε είναι $\left|\frac{1}{f(z_0)}\right|=\frac{1}{m}$. Άρα από την Αρχή Μεγίστου συνεπάγεται ότι η $\frac{1}{f}$ είναι σταθερή στο Ω, οπότε και η f είναι σταθερή στο Ω. □

Ασκήσεις.

6.6.1. Υπολογίστε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της $|e^z-1|$ στο κλειστό ορθ. παραλληλόγραμμο $\{(x,y)\,|\,-1\leq x\leq 1,-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\}$ καθώς και στο $\{(x,y)\,|\,1\leq x\leq 2,-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\}$.

6.6.2. Έστω φραγμένο χωρίο Ω και έστω $\overline{\Omega}=\Omega\cup\{z\,|\,z$ είναι συνοριακό σημείο του $\Omega\}$. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 2.4.7, το $\overline{\Omega}$ είναι συμπαγές. Έστω $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ η οποία είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και αναλυτική στο Ω. Γνωρίζουμε ότι η $|f|$ έχει μέγιστη τιμή, έστω M, στο $\overline{\Omega}$.
(i) Αν η f δεν είναι σταθερή στο Ω, αποδείξτε ότι ισχύει $|f(z)|<M$ για κάθε $z\in\Omega$, οπότε τα σημεία $z\in\overline{\Omega}$ τα οποία ικανοποιούν την $|f(z)|=M$ είναι όλα συνοριακά σημεία του Ω.
(ii) Αν η f είναι σταθερή στο Ω, αποδείξτε ότι είναι σταθερή και στο $\overline{\Omega}$, οπότε τα σημεία $z\in\overline{\Omega}$ τα οποία ικανοποιούν την $|f(z)|=M$ είναι όλα τα σημεία του $\overline{\Omega}$.
Σε κάθε περίπτωση, η μέγιστη τιμή της $|f|$ στο $\overline{\Omega}$ πιάνεται σε συνοριακά σημεία του Ω.

6.6.3. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω και έστω $\mathrm{Re}(f(z)) \leq K$ για κάθε $z \in \Omega$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $\mathrm{Re}(f(z_0)) = K$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω:
(i) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\frac{f-K+1}{f-K-1}$.
(ii) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση e^f.

6.6.4. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο φραγμένο χωρίο Ω και έστω ότι $\lim_{z\to\zeta} f(z) = 0$ για κάθε συνοριακό σημείο ζ του Ω. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο Ω.

6.6.5. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω. Μιμούμενοι τα επιχειρήματα στο τέλος της απόδειξης της Αρχής Μεγίστου, αποδείξτε τα παρακάτω.
(i) Αν η f έχει σταθερό πραγματικό μέρος στο Ω, τότε είναι σταθερή στο Ω.
(ii) Αν η f έχει σταθερό φανταστικό μέρος στο Ω, τότε είναι σταθερή στο Ω.
(iii) Αν l είναι μια ευθεία και ισχύει $f(z) \in l$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η f είναι σταθερή στο Ω.

6.7 Το Θεώρημα Morera, και η αναλυτικότητα μιας συνάρτησης.

Από την Πρόταση 6.4 και το Θεώρημα 6.1 παίρνουμε το εξής πόρισμα:
Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο χωρίο Ω. Αν ισχύει $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.
Πράγματι, τότε η f έχει παράγουσα, έστω F, στο Ω, δηλαδή ισχύει $f = F'$ στο Ω. Τότε η F είναι αναλυτική στο Ω και άρα η F είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω. Επειδή $f = F'$ στο Ω, έχουμε ότι και η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω και, ειδικώτερα, η f είναι αναλυτική στο Ω.
Το Θεώρημα Morera έχει ασθενέστερες υποθέσεις από το πόρισμα που είδαμε μόλις τώρα αλλά το ίδιο συμπέρασμα.

Θεώρημα Morera. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο χωρίο Ω. Αν ισχύει $\oint_\Delta f(z)\,dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Δ το οποίο περιέχεται στο Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.*

Απόδειξη. Έστω τυχόν $z_0 \in \Omega$. Επειδή το Ω είναι ανοικτό, υπάρχει δίσκος $D(z_0; r_0) \subseteq \Omega$.
Ο δίσκος $D(z_0; r_0)$ είναι αστρόμορφο χωρίο με κέντρο το z_0. Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση $F : D(z_0; r_0) \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0).$$

Παρατηρήστε ότι αυτή η F είναι η ίδια με την F που ορίστηκε με τον τύπο (6.3) στην Πρόταση 6.3 (με τον δίσκο $D(z_0; r_0)$ ως Ω). Κατόπιν, δεν κάνουμε τίποτε άλλο από το να επαναλάβουμε την απόδειξη της Πρότασης 6.3, χρησιμοποιώντας το ότι ισχύει $\oint_\Delta f(z)\,dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Δ το οποίο περιέχεται στο $D(z_0; r_0)$ (αφού ισχύει για κάθε τρίγωνο Δ το οποίο περιέχεται στο τωρινό Ω). Η κατάληξη είναι ότι ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in D(z_0; r_0)$.
Επομένως, η F είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(z_0; r_0)$ και άρα η F είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $D(z_0; r_0)$. Επειδή $f = F'$ στο $D(z_0; r_0)$, έχουμε ότι και η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $D(z_0; r_0)$. Ειδικώτερα, η f είναι αναλυτική στο $D(z_0; r_0)$.
Άρα η f είναι αναλυτική στο σημείο z_0 και, επειδή, το z_0 είναι τυχόν σημείο του Ω, η f είναι αναλυτική στο Ω. □

Ασκήσεις.

6.7.1. Έστω χωρίο Ω, και $f : \Omega \to \mathbb{C}$, και ευθεία l στο $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι αναλυτική στα σημεία του Ω τα οποία δεν ανήκουν στην l, και συνεχής στα σημεία του Ω τα οποία ανήκουν στην l. Αποδείξτε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω.

6.7.2. Έστω χωρίο Ω, και $f : \Omega \to \mathbb{C}$, και κύκλος C στο $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι αναλυτική στα σημεία του Ω τα οποία δεν ανήκουν στον C, και συνεχής στα σημεία του Ω τα οποία ανήκουν στον C. Αποδείξτε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω.

Κεφάλαιο 7

Σειρές αριθμών, σειρές συναρτήσεων, δυναμοσειρές, σειρές Taylor, σειρές Laurent.

7.1 Σειρές αριθμών.

Ορισμός. *Για κάθε ακολουθία* (z_n) *μιγαδικών αριθμών η παράσταση*

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$$

ονομάζεται **σειρά** *των* z_n*. Μια σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *ονομάζεται και* **σειρά μιγαδικών αριθμών** *ή, απλώς,* **μιγαδική σειρά***. Αν ισχύει* $z_n \in \mathbb{R}$ *για κάθε* n*, τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *ονομάζεται* **σειρά πραγματικών αριθμών** *ή, απλώς,* **πραγματική σειρά***.*
Τα $s_k = z_1 + \cdots + z_k$ *για* $k \in \mathbb{N}$ *ονομάζονται* **μερικά αθροίσματα** *της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$*.*
Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **συγκλίνει** *αν η ακολουθία* (s_k) *των μερικών αθροισμάτων της σειράς συγκλίνει, και τότε το όριο* s *της* (s_k) *ονομάζεται* **άθροισμα** *της σειράς, και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = s.$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **αποκλίνει** *αν η ακολουθία* (s_k) *αποκλίνει. Αν η* (s_k) *αποκλίνει στο* ∞*, τότε λέμε ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **αποκλίνει στο** ∞*, και ότι το* ∞ *είναι το* **άθροισμα** *της σειράς, και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \infty.$$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} z_n.$$

Προσέξτε. *Μια μιγαδική σειρά μπορεί να έχει άθροισμα* ∞*. Μόνο μια πραγματική σειρά μπορεί να έχει άθροισμα* $+\infty$ *ή* $-\infty$*.* Δηλαδή, όταν γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = +\infty$ ή $-\infty$, εννοούμε ότι ισχύει $z_n \in \mathbb{R}$ για κάθε n και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, ως πραγματική σειρά, αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Φυσικά, αν μια πραγματική σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η ίδια, ως μιγαδική σειρά, αποκλίνει στο ∞.

Παράδειγμα 7.1.1. Άν όλα τα z_n είναι ίσα με μια σταθερά c, τότε για την αντίστοιχη σειρά έχουμε ότι

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} c = c + c + \cdots + c + \cdots = \begin{cases} 0, & \text{αν } c = 0 \\ \infty, & \text{αν } c \neq 0 \end{cases}}$$

Πράγματι, τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι

$$s_k = c + \cdots + c \ (k \text{ φορές}) \ = kc \begin{cases} \to 0, & \text{αν } c = 0 \\ \to \infty, & \text{αν } c \neq 0 \end{cases}$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$ λέγεται **μηδενική σειρά** και έχει άθροισμα 0.

Παράδειγμα 7.1.2. Η **γεωμετρική σειρά** είναι η

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots .$$

Για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς θα δούμε ότι

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \begin{cases} = \frac{1}{1-z}, & \text{αν } |z| < 1 \\ = \infty, & \text{αν } |z| > 1 \text{ ή } z = 1 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } |z| = 1,\, z \neq 1 \end{cases}}$$

Αν $z = 1$, τότε η σειρά είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = 1+1+\cdots+1+\cdots$, και, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, έχει άθροισμα ∞.
Αν $z \neq 1$, τότε

$$s_k = 1 + z + \cdots + z^k = \frac{z^{k+1} - 1}{z - 1} \begin{cases} \to \frac{0-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}, & \text{αν } |z| < 1 \\ \to \infty, & \text{αν } |z| > 1 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } |z| = 1,\, z \neq 1 \end{cases}$$

σύμφωνα με τα γνωστά μας συμπεράσματα για το όριο γεωμετρικής προόδου.
Παρατηρήστε ότι, αν $z < -1$ (οπότε $z \in \mathbb{R}$), τότε η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, ως μιγαδική σειρά, αποκλίνει στο ∞, αλλά, ως πραγματική σειρά, αποκλίνει, αλλά δεν αποκλίνει σε κανένα από τα $\pm\infty$.

Πρόταση 7.1. *Έστω $z_n = x_n + iy_n$ η μιγαδική μορφή του z_n. Τότε η μιγαδική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν οι πραγματικές σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν, και σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $u_k = x_1 + \cdots + x_k$, $v_k = y_1 + \cdots + y_k$ και $s_k = z_1 + \cdots + z_k$ των τριών σειρών, και εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$s_k = u_k + iv_k \quad \text{για κάθε } k.$$

Δηλαδή τα u_k, v_k είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του s_k. Επομένως, η ακολουθία (s_k) συγκλίνει αν και μόνο αν οι ακολουθίες (u_k), (v_k) συγκλίνουν. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν. Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{k\to+\infty} u_k + i \lim_{k\to+\infty} v_k = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

□

Μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα της Πρότασης 7.1 ως εξής:

$$\operatorname{Re}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re}(z_n), \quad \operatorname{Im}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im}(z_n).$$

Μέσω της Πρότασης 7.1 μπορούμε να αποδείξουμε διάφορα αποτελέσματα για μιγαδικές σειρές ανάγοντάς τα σε ανάλογα αποτελέσματα για πραγματικές σειρές. Όλα τα αποτελέσματα που ακολουθούν αποδεικνύονται με αυτόν τον τρόπο, αλλά και με κατά λέξη επανάληψη των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για πραγματικές σειρές, οπότε μπορεί να τα αποδείξει ο αναγνώστης. Όμως, για λόγους πληρότητας, θα αποδείξουμε τα περισσότερα από αυτά.

Πρόταση 7.2. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει, τότε $z_k \to 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_k = z_1 + \cdots + z_k$. Αν s είναι το άθροισμα (μιγαδικός αριθμός) της σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, τότε

$$z_k = s_k - s_{k-1} \to s - s = 0.$$

□

Πρόταση 7.3. *Ισχύουν οι ισότητες*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n + w_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda z_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} z_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n}$$

αρκεί τα αθροίσματα στις δεξιές παραστάσεις να υπάρχουν και οι παραστάσεις αυτές να μην είναι απροσδιόριστες μορφές.

Όσον αφορά στα *θεωρήματα σύγκρισης σειρών*, επειδή αυτά βασίζονται στις ιδιότητες των ανισοτικών σχέσεων που, όπως είδαμε, ισχύουν μόνο για πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε να πούμε τα εξής. Όταν γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ ως συνέπεια των $z_n \le w_n$, εννοούμε ότι *τα z_n, w_n είναι όλα πραγματικοί αριθμοί, και ότι, απλώς, εφαρμόζουμε τα γνωστά θεωρήματα σύγκρισης για πραγματικές σειρές*.

Κριτήριο Cauchy. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $\big|\sum_{n=k'+1}^{k''} z_n\big| = |z_{k'+1} + \cdots + z_{k''}| < \epsilon$ για κάθε k', k'' με $k'' > k' \ge k_0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_k = z_1 + \cdots + z_k$.
Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (s_k) συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η (s_k) είναι ακολουθία Cauchy. Το ότι η (s_k) είναι ακολουθία Cauchy σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $|s_{k''} - s_{k'}| < \epsilon$ για κάθε k', k'' με $k'' > k' \ge k_0$. Όμως, έχουμε την ισότητα

$$|s_{k''} - s_{k'}| = |(z_1 + \cdots + z_{k''}) - (z_1 + \cdots + z_{k'})| = |z_{k'+1} + \cdots + z_{k''}|$$

κι έτσι τελειώνει η απόδειξη. □

Ορισμός. *Λέμε ότι η μιγαδική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$* **συγκλίνει απολύτως** *αν η σειρά μη-αρνητικών όρων $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < +\infty$.*

Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει, και*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\Big| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$ συγκλίνει. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, από το κριτήριο Cauchy, υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $|z_{k'+1}| + \cdots + |z_{k''}| < \epsilon$ και, επομένως,

$$|z_{k'+1} + \cdots + z_{k''}| \leq |z_{k'+1}| + \cdots + |z_{k''}| < \epsilon$$

για κάθε k', k'' με $k'' > k' \geq k_0$. Άρα, πάλι από το κριτήριο Cauchy, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει. Τώρα θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_k = z_1 + \cdots + z_k$ και $S_k = |z_1| + \cdots + |z_k|$. Ισχύει $|s_k| \leq S_k$ για κάθε k, οπότε

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\Big| = |\lim_{k\to+\infty} s_k| = \lim_{k\to+\infty}|s_k| \leq \lim_{k\to+\infty} S_k = \sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|.$$

□

Ορισμός. *Λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **συγκλίνει υπό συνθήκη** *αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Τύπος άθροισης κατά μέρη (Abel). *Έστω ακολουθίες* (a_n), (z_n), *και τα μερικά αθροίσματα* $s_k = z_1 + \cdots + z_k$. *Για κάθε* k', k'' *με* $k'' > k'$ *ισχύει*

$$\sum_{n=k'+1}^{k''} a_n z_n = \sum_{n=k'+1}^{k''} (a_n - a_{n+1})s_n + a_{k''+1}s_{k''} - a_{k'+1}s_{k'}. \tag{7.1}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=k'+1}^{k''} a_n z_n &= \sum_{n=k'+1}^{k''} a_n(s_n - s_{n-1}) = \sum_{n=k'+1}^{k''} a_n s_n - \sum_{n=k'+1}^{k''} a_n s_{n-1} \\ &= \sum_{n=k'+1}^{k''} a_n s_n - \sum_{n=k'}^{k''-1} a_{n+1} s_n \\ &= \sum_{n=k'+1}^{k''} a_n s_n - \sum_{n=k'+1}^{k''} a_{n+1} s_n + a_{k''+1}s_{k''} - a_{k'+1}s_{k'} \\ &= \sum_{n=k'+1}^{k''} (a_n - a_{n+1})s_n + a_{k''+1}s_{k''} - a_{k'+1}s_{k'}.\end{aligned}$$

□

Κριτήριο Dirichlet. *Έστω ακολουθίες* (a_n), (z_n), *και τα μερικά αθροίσματα* $s_k = z_1 + \cdots + z_k$. *Έστω, επίσης, ότι η* (a_n) *είναι πραγματική ακολουθία. Αν η* (a_n) *είναι φθίνουσα με* $a_n \to 0$, *και αν η* (s_n) *είναι φραγμένη, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s_n| \leq M$ για κάθε n. Επίσης, επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $a_k \to 0$, υπάρχει k_0 ώστε να ισχύει $a_k \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $k \geq k_0$. Τότε, λόγω

της (7.1), για κάθε k', k'' με $k'' > k' \geq k_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{n=k'+1}^{k''} a_n z_n \Big| &= \Big| \sum_{n=k'+1}^{k''} (a_n - a_{n+1}) s_n + a_{k''+1} s_{k''} - a_{k'+1} s_{k'} \Big| \\
&\leq \sum_{n=k'+1}^{k''} (a_n - a_{n+1}) |s_n| + a_{k''+1} |s_{k''}| + a_{k'+1} |s_{k'}| \\
&\leq M \sum_{n=k'+1}^{k''} (a_n - a_{n+1}) + M a_{k''+1} + M a_{k'+1} \\
&= M(a_{k'+1} - a_{k''+1}) + M a_{k''+1} + M a_{k'+1} \\
&= 2M a_{k'+1} \leq \frac{2M\epsilon}{2M+1} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Από το κριτήριο Cauchy συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 7.1.3. Αν η ακολουθία (a_n) είναι πραγματική και φθίνουσα, και $a_n \to 0$, και αν $|z| \leq 1$, $z \neq 1$, τότε η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

συγκλίνει.

Πράγματι, θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = 1 + z + \cdots + z^n$. Τότε, αν $|z| \leq 1$, $z \neq 1$, έχουμε ότι

$$|s_n| = \Big| \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \Big| \leq \frac{|z|^{n+1} + 1}{|z - 1|} \leq \frac{2}{|z-1|} \quad \text{για κάθε } n.$$

Επομένως η ακολουθία (s_n) είναι φραγμένη, και τότε, σύμφωνα με το κριτήριο Dirichlet, η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ συγκλίνει.

Κριτήριο λόγου (d' Alembert). *Έστω ότι ισχύει $z_n \neq 0$ για κάθε n, και έστω ότι υπάρχει το* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ *και είναι ίσο με a, οπότε $0 \leq a \leq +\infty$.*

(i) Αν $0 \leq a < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Αν $1 < a \leq +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ αποκλίνει.

(iii) Αν $a = 1$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε b ώστε $a < b < 1$.

Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq b$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$|z_n| = \Big| \frac{z_n}{z_{n-1}} \Big| \Big| \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}} \Big| \cdots \Big| \frac{z_{n_0+1}}{z_{n_0}} \Big| |z_{n_0}| \leq b^{n-n_0} |z_{n_0}| = c\, b^n,$$

όπου $c = |z_{n_0}|/b^{n_0}$.

Επειδή $0 \leq b < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b^n$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει.

(ii) Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$|z_n| \geq |z_{n-1}| \geq \cdots \geq |z_{n_0}| > 0.$$

Άρα δεν ισχύει $z_n \to 0$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ δεν συγκλίνει.

(iii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, και $\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| \to 1$.

Ομοίως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, και $\left|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right| \to 1$. □

Κριτήριο ρίζας (Cauchy). *Έστω ότι υπάρχει το* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ *και είναι ίσο με* a, *οπότε* $0 \leq a \leq +\infty$.
(i) Αν $0 \leq a < 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *συγκλίνει απολύτως.*
(ii) Αν $1 < a \leq +\infty$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *αποκλίνει.*
(iii) Αν $a = 1$, *τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε b ώστε $a < b < 1$.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\sqrt[n]{|z_n|} \leq b$ και, επομένως, $|z_n| \leq b^n$. Επειδή $0 \leq b < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b^n$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει.
(ii) Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $|z_n| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$, οπότε δεν ισχύει $z_n \to 0$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ δεν συγκλίνει.
(iii) Για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε ότι $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ και $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$.
Η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. □

Σχόλιο. Υπάρχουν κάποιες γενικότερες και πληρέστερες παραλλαγές του κριτηρίου λόγου και του κριτηρίου ρίζας, στις οποίες δεν χρειάζεται να υποθέσουμε την ύπαρξη των $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ και $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ αντιστοίχως. Σ' αυτές χρησιμοποιούνται οι έννοιες του $\liminf$ και του $\limsup$ πραγματικής ακολουθίας. Στο μάθημά μας δεν θα ασχοληθούμε με αυτές τις γενικότερες παραλλαγές. Για όποιους γνωρίζουν τις έννοιες του $\liminf$ και του $\limsup$ πραγματικής ακολουθίας, αυτές οι γενικότερες παραλλαγές υπάρχουν ως ασκήσεις 7.1.12 και 7.1.13.

Παράδειγμα 7.1.4. Θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} = z + \frac{z^2}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{n^2} + \cdots .$$

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $z = 0$, τότε η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $z \neq 0$, τότε $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)^2}{z^n/n^2}\right| = |z|\frac{n^2}{(n+1)^2} \to |z|$. Άρα, αν $0 < |z| < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως, και, αν $|z| > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Ισχύει $\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n^2}\right|} = \frac{|z|}{(\sqrt[n]{n})^2} \to |z|$. Επομένως, αν $|z| < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως, και, αν $|z| > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.
Αν $|z| = 1$, τότε κανένα από τα δύο κριτήρια δεν δίνει συμπέρασμα, οπότε μελετάμε την σειρά μας χωρίς αναφορά σε αυτά, ως εξής.
Επειδή $|z| = 1$, είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.
Συνοψίζουμε: Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως αν $|z| \leq 1$, και αποκλίνει αν $|z| > 1$.

Παράδειγμα 7.1.5. Θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots .$$

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $z = 0$, τότε η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $z \neq 0$, τότε $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)}{z^n/n}\right| = |z|\frac{n}{n+1} \to |z|$. Άρα, αν $0 < |z| < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως, και, αν $|z| > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Ισχύει $\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n}\right|} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n}} \to |z|$. Επομένως, αν $|z| < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως, και, αν $|z| > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.
Αν $|z| = 1$, τότε κανένα από τα δύο κριτήρια δεν δίνει συμπέρασμα, οπότε μελετάμε την σειρά μας χωρίς αναφορά σε αυτά, ως εξής.
Αν $z = 1$, τότε η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει. Αν $|z| = 1$, $z \neq 1$, τότε από το

συμπέρασμα του παραδείγματος 7.1.3 συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι, αν $|z| = 1$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ δεν συγκλίνει απολύτως. Συνοψίζουμε: Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει απολύτως αν $|z| < 1$, συγκλίνει υπό συνθήκη αν $|z| = 1$, $z \neq 1$, και αποκλίνει αν $z = 1$ ή $|z| > 1$.

Παράδειγμα 7.1.6. Θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots .$$

Πρώτα εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Αν $z = 0$, τότε η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $z \neq 0$, τότε $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0$. Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε z.

Τώρα εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας. Ισχύει $\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n!}} \to \frac{|z|}{+\infty} = 0$. Επομένως, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε z.

Ασκήσεις.

7.1.1. Ποιές από τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}\Big), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n}{2^n} + \frac{i}{n^3}\Big), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+i^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+i^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+i}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+in}$$

συγκλίνουν;

7.1.2. Ποιό είναι το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n-1}$ αν θεωρηθεί μιγαδική σειρά, και ποιό είναι το άθροισμά της αν θεωρηθεί πραγματική σειρά;

7.1.3. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 i^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{i^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2i)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+i)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4i)^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+i)(6+i)(9+i)\cdots(3n+i)}{(3+4i)(3+8i)(3+12i)\cdots(3+4ni)}.$$

7.1.4. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n i^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n+i}{2n-i}\Big)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n+i}{n-i}\Big)^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(1+2i)^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 (1-i)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+3i)^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+i}{(\sqrt[n]{n}+i)^n}.$$

7.1.5. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n}{n \log n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n}{n(\log n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} i^{n-1} \sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} i^{n-1}\Big(1 - \cos\frac{1}{n}\Big).$$

7.1.6. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < +\infty$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n e^{in\theta}$ συγκλίνει απολύτως.

7.1.7. (i) Έστω $z_n = x_n + iy_n$ η μιγαδική μορφή του z_n. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν απολύτως.

(ii) Αποδείξτε το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης για μιγαδικές σειρές χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κριτήριο για πραγματικές σειρές.

7.1.8. Έστω $|a_n|r^n \leq Mn^k$ για κάθε n, όπου $M \geq 0$ και $k \in \mathbb{N}$ είναι σταθεροί αριθμοί. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ συγκλίνει για κάθε z με $|z| < r$.

7.1.9. Βρείτε τα z για τα οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2+z^n}$ συγκλίνει.

7.1.10. Έστω $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, και έστω ότι για κάθε z_n κάποιο από τα $\arg z_n$ ανήκει στο διάστημα $[-\theta_0, \theta_0]$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει απολύτως, και ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \infty$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| = +\infty$.

7.1.11. Βρείτε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ η οποία συγκλίνει αλλά έτσι ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n^2$ να αποκλίνει.

7.1.12. Αποδείξτε το γενικότερο **κριτήριο λόγου (d' Alembert)**:
Έστω $z_n \neq 0$ για κάθε n, και έστω $a' = \liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ και $a'' = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$, οπότε $0 \leq a' \leq a'' \leq +\infty$.
(i) Αν $0 \leq a'' < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως.
(ii) Αν $1 < a' \leq +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ αποκλίνει.
(iii) Αν $a' \leq 1 \leq a''$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.

7.1.13. Αποδείξτε το γενικότερο **κριτήριο ρίζας (Cauchy)**:
Έστω $a = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$, οπότε $0 \leq a \leq +\infty$.
(i) Αν $0 \leq a < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως.
(ii) Αν $1 < a \leq +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ αποκλίνει.
(iii) Αν $a = 1$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.

7.2 Ακολουθίες συναρτήσεων, σειρές συναρτήσεων.

Ορισμός. *Έστω συναρτήσεις $f_k : A \to \mathbb{C}$ για $k \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_k) συγκλίνει στην συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$* **κατά σημείο** *στο σύνολο A αν για κάθε $z \in A$ η ακολουθία (μιγαδικών) αριθμών $(f_k(z))$ συγκλίνει στον (μιγαδικό) αριθμό $f(z)$, δηλαδή*

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(z) = f(z) \quad \text{για κάθε } z \in A.$$

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ ονομάζεται **κατά σημείο όριο** *της ακολουθίας συναρτήσεων (f_k) στο σύνολο A.*

Το ότι για κάθε $z \in A$ ισχύει $\lim_{k\to+\infty} f_k(z) = f(z)$ σημαίνει ότι για κάθε $z \in A$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $k_0 = k_0(\epsilon, z)$ (δηλαδή το k_0 εξαρτάται από το ϵ και από το z) ώστε να ισχύει

$$|f_k(z) - f(z)| \leq \epsilon \quad \text{για κάθε } k \geq k_0.$$

Ορισμός. *Έστω συναρτήσεις $f_k : A \to \mathbb{C}$ για $k \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_k) συγκλίνει στην συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$* **ομοιόμορφα** *στο σύνολο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $k_0 = k_0(\epsilon)$ (δηλαδή το k_0 εξαρτάται από το ϵ) ώστε να ισχύει*

$$|f_k(z) - f(z)| \leq \epsilon \quad \text{για κάθε } k \geq k_0 \text{ και κάθε } z \in A.$$

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ ονομάζεται **ομοιόμορφο όριο** *της ακολουθίας συναρτήσεων (f_k) στο σύνολο A.*

Έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_k) συγκλίνει στην συνάρτηση f *ομοιόμορφα* στο σύνολο A. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης προκύπτει ότι αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε $z \in A$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $k_0 = k_0(\epsilon)$ ώστε να ισχύει $|f_k(z) - f(z)| \leq \epsilon$ για κάθε $k \geq k_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{k \to +\infty} f_k(z) = f(z)$ για κάθε $z \in A$. Άρα η ακολουθία συναρτήσεων (f_k) συγκλίνει στην συνάρτηση f *κατά σημείο* στο A. Συνοψίζουμε:

Η ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλισή της.

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παράδειγμα 7.2.1. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\lim_{k \to +\infty} z^k = 0$ για κάθε $z \in D(0;1)$. Δηλαδή η ακολουθία συναρτήσεων (z^k) συγκλίνει στην μηδενική συνάρτηση *κατά σημείο* στον δίσκο $D(0;1)$. Τώρα, έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων (z^k) συγκλίνει στην μηδενική συνάρτηση ομοιόμορφα στον δίσκο $D(0;1)$.
Τότε για το $\epsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|z|^k = |z^k - 0| \leq \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε } k \geq k_0 \text{ και κάθε } z \in D(0;1).$$

Ειδικώτερα, με $k = k_0$, ισχύει

$$|z|^{k_0} \leq \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε } z \in D(0;1).$$

Όμως, η τελευταία ανισότητα δεν μπορεί να ισχύει για κάθε $z \in D(0;1)$. Πράγματι, αν το z στον δίσκο $D(0;1)$ τείνει στο 1, τότε το αριστερό μέλος της ανισότητας τείνει στο 1, οπότε δεν μπορεί να είναι φραγμένο από το $\frac{1}{2}$.
Άρα η ακολουθία συναρτήσεων (z^k) δεν συγκλίνει στην μηδενική συνάρτηση ομοιόμορφα στον δίσκο $D(0;1)$.

Προσέξτε τη διαφορά ανάμεσα στην κατά σημείο σύγκλιση και στην ομοιόμορφη σύγκλιση: για κάθε ϵ το k_0, που χρειάζεται ώστε να ισχύει $|f_k(z) - f(z)| \leq \epsilon$ για κάθε $k \geq k_0$, στην περίπτωση της κατά σημείο σύγκλισης εξαρτάται από το ϵ αλλά και από το z, ενώ στην περίπτωση της ομοιόμορφης σύγκλισης εξαρτάται μόνο από το ϵ αλλά όχι από το z, είναι δηλαδή *ομοιόμορφο* ως προς το $z \in A$.

Προφανώς, *αν μια ακολουθία συναρτήσεων (f_k) συγκλίνει στη συνάρτηση f κατά σημείο ή ομοιόμορφα σε κάποιο σύνολο A, τότε συγκλίνει στην f κατά σημείο ή ομοιόμορφα, αντιστοίχως, και σε κάθε υποσύνολο του A.*

Ορισμός. *Έστω συναρτήσεις $f_n : A \to \mathbb{C}$ για $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε και τα αθροίσματα $s_k : A \to \mathbb{C}$, όπου $s_k = f_1 + \cdots + f_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην συνάρτηση $s : A \to \mathbb{C}$* **κατά σημείο** *στο σύνολο A αν η ακολουθία συναρτήσεων (s_k) συγκλίνει στην συνάρτηση s κατά σημείο στο A, δηλαδή*

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(z) = \lim_{k \to +\infty} s_k(z) = s(z) \quad \textit{για κάθε } z \in A.$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = s(z) \quad \textit{για κάθε } z \in A.$$

Η συνάρτηση $s : A \to \mathbb{C}$ ονομάζεται **κατά σημείο άθροισμα** *της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ στο σύνολο A.*

Το ότι για κάθε $z \in A$ ισχύει $\lim_{k \to +\infty} s_k(z) = s(z)$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $k_0 = k_0(\epsilon, z)$ (δηλαδή το k_0 εξαρτάται από το ϵ και από το z) ώστε να ισχύει

$$\Big| \sum_{n=1}^{k} f_n(z) - s(z) \Big| = |s_k(z) - s(z)| \leq \epsilon \quad \text{για κάθε } k \geq k_0.$$

Παράδειγμα 7.2.2. Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$ κατά σημείο στον ανοικτό δίσκο $D(0;1)$, αφού ισχύει

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{για κάθε } z \in D(0;1).$$

Δηλαδή η συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$ είναι το κατά σημείο άθροισμα της γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ στον δίσκο $D(0;1)$.

Ορισμός. *Έστω συναρτήσεις* $f_n : A \to \mathbb{C}$ *για* $n \in \mathbb{N}$. *Θεωρούμε και τα αθροίσματα* $s_k : A \to \mathbb{C}$, *όπου* $s_k = f_1 + \cdots + f_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *συγκλίνει στην συνάρτηση* $s : A \to \mathbb{C}$ **ομοιόμορφα** *στο σύνολο* A *αν η ακολουθία συναρτήσεων* (s_k) *συγκλίνει στην συνάρτηση* s *ομοιόμορφα στο* A, *δηλαδή για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* $k_0 = k_0(\epsilon)$ *(δηλαδή το* k_0 *εξαρτάται από το* ϵ*) ώστε να ισχύει*

$$\Big|\sum_{n=1}^{k} f_n(z) - s(z)\Big| = |s_k(z) - s(z)| \le \epsilon \quad \textit{για κάθε } k \ge k_0 \textit{ και κάθε } z \in A.$$

Έστω ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην συνάρτηση s ομοιόμορφα στο A, δηλαδή ότι η ακολουθία συναρτήσεων (s_k) συγκλίνει στην συνάρτηση s ομοιόμορφα στο A. Τότε η ακολουθία συναρτήσεων (s_k) συγκλίνει στην συνάρτηση s κατά σημείο στο A, δηλαδή η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην συνάρτηση s κατά σημείο στο A. Συνοψίζουμε:

Η ομοιόμορφη σύγκλιση σειράς συναρτήσεων συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλισή της.

Βλέπουμε, επίσης, ότι αν η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην συνάρτηση s ομοιόμορφα στο A, τότε (λόγω της κατά σημείο σύγκλισης) ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = s(z) \quad \text{για κάθε } z \in A.$$

Δηλαδή η συνάρτηση s είναι το *κατά σημείο άθροισμα* της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ στο σύνολο A. Επειδή υποθέσαμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο A, η συνάρτηση s ονομάζεται **ομοιόμορφο άθροισμα** της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ στο σύνολο A.

Παράδειγμα 7.2.3. Είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ότι η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$ κατά σημείο στον ανοικτό δίσκο $D(0;1)$. Τώρα θα δούμε ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$ ομοιόμορφα στον ανοικτό δίσκο $D(0;1)$. Τότε για το $\epsilon = 1$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\Big|\sum_{n=1}^{k} z^n - \frac{1}{1-z}\Big| \le 1 \quad \text{για κάθε } k \ge k_0 \text{ και κάθε } z \in D(0;1).$$

Ειδικώτερα, με $k = k_0$, ισχύει

$$\Big|\sum_{n=1}^{k_0} z^n - \frac{1}{1-z}\Big| \le 1 \quad \text{για κάθε } z \in D(0;1).$$

Όμως, η τελευταία ανισότητα δεν μπορεί να ισχύει για κάθε $z \in D(0;1)$. Πράγματι, αν το z στον δίσκο $D(0;1)$ τείνει στο 1, τότε το αριστερό μέλος της ανισότητας τείνει στο $|k_0 - \infty| = +\infty$, οπότε δεν μπορεί να είναι φραγμένο από το 1.

Είναι σαφές ότι, *αν μια σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *συγκλίνει στη συνάρτηση* s *κατά σημείο ή ομοιόμορφα σε κάποιο σύνολο* A*, τότε συγκλίνει στην* s *κατά σημείο ή ομοιόμορφα, αντιστοίχως, και σε κάθε υποσύνολο του* A.

Πρόταση 7.4. *Έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων* (f_k) *συγκλίνει στην συνάρτηση* f *ομοιόμορφα στο σύνολο* A*. Αν κάθε* f_k *είναι συνεχής στο* $z_0 \in A$*, τότε η* f *είναι συνεχής στο* z_0.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|f_k(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{για κάθε } k \geq k_0 \text{ και κάθε } z \in A.$$

Ειδκώτερα, με $k = k_0$, ισχύει

$$|f_{k_0}(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{για κάθε } z \in A. \tag{7.2}$$

Αφού η f_{k_0} είναι συνεχής στο z_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f_{k_0}(z) - f_{k_0}(z_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{για κάθε } z \in A \text{ με } |z - z_0| < \delta. \tag{7.3}$$

Από τις (7.2) και (7.3) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_{k_0}(z)| + |f_{k_0}(z) - f_{k_0}(z_0)| + |f_{k_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \text{για κάθε } z \in A \text{ με } |z - z_0| < \delta. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στο z_0. □

Πρόταση 7.5. *Έστω ότι η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *συγκλίνει στο άθροισμά της* s *ομοιόμορφα στο* A*. Αν κάθε* f_n *είναι συνεχής στο* $z_0 \in A$*, τότε η* s *είναι συνεχής στο* z_0.

Απόδειξη. Έστω $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Επειδή κάθε f_n είναι συνεχής στο z_0, κάθε πεπερασμένο άθροισμα s_k είναι συνάρτηση συνεχής στο z_0. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της ακολουθίας συναρτήσεων (s_k) στην συνάρτηση s, από την Πρόταση 7.4 συνεπάγεται ότι η s είναι συνεχής στο z_0. □

Πρόταση 7.6. *Έστω καμπύλη* γ *στο* $\mathbb{C}$*, και συναρτήσεις* $\phi, f_k : \gamma^* \to \mathbb{C}$ *για* $k \in \mathbb{N}$*. Έστω ότι όλες οι* ϕ, f_k *είναι συνεχείς στην τροχιά* γ^**, και ότι η ακολουθία συναρτήσεων* (f_k) *συγκλίνει στην συνάρτηση* f *ομοιόμορφα στο* γ^**. Τότε*

$$\lim_{k \to +\infty} \int_\gamma f_k(z)\phi(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\phi(z)\, dz.$$

Απόδειξη. Όλα τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_\gamma f_k(z)\phi(z)\, dz$ είναι καλώς ορισμένα, αφού οι συναρτήσεις ϕ, f_k είναι συνεχείς στο γ^*. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της ακολουθίας συναρτήσεων (f_k) στην συνάρτηση f, από την Πρόταση 7.4 συνεπάγεται ότι και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο γ^*. Άρα και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\phi(z)\, dz$ είναι καλώς ορισμένο. Επειδή η ϕ είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο γ^*, υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|\phi(z)| \leq M \quad \text{για κάθε } z \in \gamma^*. \tag{7.4}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|f_k(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{M \,\text{μήκος}(\gamma) + 1} \quad \text{για κάθε } k \geq k_0 \text{ και κάθε } z \in \gamma^*. \tag{7.5}$$

Από τις (7.4) και (7.5) συνεπάγεται

$$\Big| \int_\gamma f_k(z)\phi(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\phi(z)\,dz \Big| = \Big| \int_\gamma (f_k(z) - f(z))\phi(z)\,dz \Big|$$
$$\le \frac{\epsilon}{M\ \text{μήκος}(\gamma) + 1} M\ \text{μήκος}(\gamma) < \epsilon \quad \text{για κάθε } k \ge k_0.$$

Άρα $\lim_{k\to+\infty} \int_\gamma f_k(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\phi(z)\,dz$. □

Παρατηρούμε ότι ο τύπος της Πρότασης 7.6 μπορεί να γραφτεί στη μορφή εναλλαγής ορίου και επικαμπυλίου ολοκληρώματος:

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\gamma f_k(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma \lim_{k\to+\infty} f_k(z)\phi(z)\,dz.$$

Πρόταση 7.7. *Έστω καμπύλη γ στο $\mathbb{C}$, και συναρτήσεις $\phi, f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$ για $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι όλες οι ϕ, f_n είναι συνεχείς στην τροχιά γ^*, και ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμά της s ομοιόμορφα στο γ^*. Τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma s(z)\phi(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Έστω $s_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Επειδή κάθε f_n είναι συνεχής στο γ^*, κάθε πεπερασμένο άθροισμα s_k είναι συνάρτηση συνεχής στο γ^*. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της ακολουθίας συναρτήσεων (s_k) στην συνάρτηση s, από την Πρόταση 7.6 συνεπάγεται ότι

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\gamma s_k(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma s(z)\phi(z)\,dz. \tag{7.6}$$

Όμως,

$$\int_\gamma s_k(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{n=1}^{k} f_n(z)\phi(z)\,dz = \sum_{n=1}^{k} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz,$$

οπότε η (7.6) γίνεται

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma s(z)\phi(z)\,dz.$$

Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma s(z)\phi(z)\,dz$. □

Ο τύπος της Πρότασης 7.7 μπορεί να γραφτεί στη μορφή εναλλαγής σειράς και επικαμπυλίου ολοκληρώματος:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)\phi(z)\,dz.$$

Τώρα θα δούμε ένα χρήσιμο κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης σειράς συναρτήσεων.

Κριτήριο Weierstrass. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{C}$ για $n \in \mathbb{N}$ και έστω ακολουθία αριθμών (M_n) με $M_n \ge 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|f_n(z)| \le M_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $z \in A$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$ τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε συνάρτηση s ομοιόμορφα στο σύνολο A.*

Απόδειξη. Για κάθε $z \in A$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z)| \le \sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty.$$

Επομένως, η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ συγκλίνει απολύτως, και άρα συγκλίνει. Θεωρούμε το άθροισμα της σειράς:

$$s(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \quad \text{για κάθε } z \in A.$$

Έτσι δημιουργείται συνάρτηση $s : A \to \mathbb{C}$ η οποία είναι το κατά σημείο άθροισμα της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ στο σύνολο A.
Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=k_0+1}^{+\infty} M_n \le \epsilon.$$

Από αυτό συνεπάγεται

$$\begin{aligned} |s(z) - s_k(z)| &= \Big| s(z) - \sum_{n=1}^{k} f_n(z) \Big| = \Big| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) - \sum_{n=1}^{k} f_n(z) \Big| \\ &= \Big| \sum_{n=k+1}^{+\infty} f_n(z) \Big| \le \sum_{n=k+1}^{+\infty} |f_n(z)| \le \sum_{n=k+1}^{+\infty} M_n \\ &\le \sum_{n=k_0+1}^{+\infty} M_n \le \epsilon \quad \text{για κάθε } k \ge k_0 \text{ και κάθε } z \in A. \end{aligned}$$

Άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμά της s ομοιόμορφα στο A. □

Παράδειγμα 7.2.4. Είδαμε στο παράδειγμα 7.2.3 ότι η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ δεν συγκλίνει στην $\frac{1}{1-z}$ ομοιόμορφα στον ανοικτό δίσκο $D(0;1)$.
Τώρα θεωρούμε *οποιοδήποτε* r με $0 \le r < 1$, και θα δούμε ότι η σύγκλιση της $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ στην $\frac{1}{1-z}$ είναι ομοιόμορφη στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0;r)$.
Πράγματι, ισχύει

$$|z^n| = |z|^n \le r^n \quad \text{για κάθε } z \in \overline{D}(0;r)$$

και

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n < +\infty.$$

Τώρα από το κριτήριο Weierstrass συνεπάγεται ότι η σύγκλιση της $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ είναι ομοιόμορφη στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0;r)$.
Δηλαδή βλέπουμε ότι η σύγκλιση της σειράς, αν και δεν είναι ομοιόμορφη στον ανοικτό δίσκο $D(0;1)$, είναι ομοιόμορφη σε κάθε γνήσια μικρότερο κλειστό δίσκο.

Τώρα, πέρα από τις γενικότητες, ας ξαναγυρίσουμε στο κεντρικό θέμα αυτών των σημειώσεων. Τα επόμενα αποτελέσματα αυτής της ενότητας αναφέρονται σε ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών και σειρών *αναλυτικών* συναρτήσεων.

Θεώρημα 7.1. *Έστω χωρίο Ω και $f, f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και έστω ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_k) συγκλίνει στην συνάρτηση f ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω. Αν όλες οι f_k είναι αναλυτικές στο Ω τότε και η f είναι αναλυτική στο Ω. Επιπλέον, η ακολουθία των παραγώγων (f_k') συγκλίνει στην παράγωγο f' ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω.*

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in \Omega$. Τότε υπάρχει κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0;r)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω, και τότε η (f_k) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $\overline{D}(z_0;r)$.
Συνεπάγεται ότι η (f_k) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο $\overline{D}(z_0;r)$, και άρα $f_k(z_0) \to f(z_0)$.
Το z_0 είναι τυχόν σημείο του Ω, οπότε η (f_k) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο Ω.
Τώρα, πάλι έστω $z_0 \in \Omega$, και πάλι θεωρούμε κάποιον κλειστό δίσκο $\overline{D}(z_0;r)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω. Επειδή κάθε f_k είναι αναλυτική στο Ω, ισχύει

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0;r) \text{ και κάθε } k. \tag{7.7}$$

Είδαμε ήδη ότι $f_k(z) \to f(z)$. Η (f_k) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $\overline{D}(z_0;r)$, οπότε η (f_k) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $C(z_0;r)$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.6 στο δεξιό μέρος της (7.7), παίρνουμε το όριο της (7.7), και βρίσκουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0;r). \tag{7.8}$$

Επειδή κάθε f_k είναι συνεχής στο $C(z_0;r)$ και επειδή η (f_k) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $C(z_0;r)$, συνεπάγεται ότι και η f είναι συνεχής στο $C(z_0;r)$. Από την Πρόταση 5.13 συνεπάγεται ότι η δεξιά μεριά της (7.8) είναι, ως συνάρτηση του z, αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;r)$. Επειδή, όμως, σύμφωνα με την (7.8), η f ταυτίζεται με αυτήν την συνάρτηση στον δίσκο $D(z_0;r)$, συνεπάγεται ότι η f είναι αναλυτική στον $D(z_0;r)$ και, ειδικώτερα, η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Αποδείξαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z_0 \in \Omega$, οπότε η f είναι αναλυτική στο Ω.
Τώρα μένει να αποδείξουμε ότι η ακολουθία των παραγώγων (f_k') συγκλίνει στην παράγωγο f' ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω.
Έστω κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0;r)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω.
Τότε υπάρχει $r' > r$ ώστε και ο μεγαλύτερος κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0;r')$ να περιέχεται στο Ω. Επειδή η f καθώς και κάθε f_k είναι αναλυτική στο Ω, ισχύει

$$f_k'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r')} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0;r') \text{ και κάθε } k$$

και

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0;r').$$

Αφαιρούμε τις δύο ισότητες και βρίσκουμε

$$|f_k'(z) - f'(z)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{C(z_0;r')} \frac{f_k(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta\Big| \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0;r') \text{ και κάθε } k. \tag{7.9}$$

Τώρα έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η (f_k) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $C(z_0;r')$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|f_k(\zeta) - f(\zeta)| \le \frac{(r'-r)^2\epsilon}{r'} \quad \text{για κάθε } \zeta \in C(z_0;r') \text{ και κάθε } k \ge k_0. \tag{7.10}$$

Τώρα, για κάθε $z \in \overline{D}(z_0;r)$ και για κάθε $\zeta \in C(z_0;r')$ ισχύει $|\zeta - z| \ge r' - r$. Από αυτό καθώς και από τις (7.9) και (7.10) προκύπτει

$$|f_k'(z) - f'(z)| \le \frac{1}{2\pi}\,\frac{(r'-r)^2\epsilon/r'}{(r'-r)^2}\,2\pi r' = \epsilon \quad \text{για κάθε } z \in \overline{D}(z_0;r) \text{ και κάθε } k \ge k_0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η (f_k') συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(z_0;r)$. $\square$

Το πέρασμα σε σειρές αναλυτικών συναρτήσεων είναι άμεσο.

Θεώρημα 7.2. *Έστω χωρίο Ω και $s, f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και έστω ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην συνάρτηση s ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω. Αν όλες οι f_n είναι αναλυτικές στο Ω τότε και η s είναι αναλυτική στο Ω. Επιπλέον, η σειρά των παραγώγων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ συγκλίνει στην παράγωγο s' ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω.*

Απόδειξη. Εφαρμογή του Θεωρήματος 7.1 στα μερικά αθροίσματα $s_k = f_1 + \cdots + f_k$ τα οποία είναι, προφανώς, αναλυτικές συναρτήσεις στο Ω με $s_k' = f_1' + \cdots + f_k'$. □

Τα συμπεράσματα των Θεωρημάτων 7.1 και 7.2 μπορούν να επεκταθούν ως εξής. Στο Θεώρημα 7.1 η ακολουθία των παραγώγων (f_k') ικανοποιεί τις ίδιες υποθέσεις με την ακολουθία (f_k). Δηλαδή, η (f_k') συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω. Άρα το Θεώρημα 7.1 εφαρμόζεται σ' αυτήν την ακολουθία, και συμπεραίνουμε ότι η (f_k'') συγκλίνει στην f'' ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω. Αυτό, όμως, συνεχίζεται επαγωγικά, και βλέπουμε ότι:

Αν η ακολουθία αναλυτικών στο χωρίο Ω συναρτήσεων (f_k) συγκλίνει στην συνάρτηση f ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω, και για κάθε m η ακολουθία των παραγώγων $(f_k^{(m)})$ συγκλίνει στην παράγωγο $f^{(m)}$ ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω.

Το ίδιο ισχύει και για την σειρά αναλυτικών συναρτήσεων στο Θεώρημα 7.2.

Αν η σειρά αναλυτικών στο χωρίο Ω συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην συνάρτηση s ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω, τότε η s είναι αναλυτική στο Ω, και για κάθε m η σειρά των παραγώγων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(m)}$ συγκλίνει στην παράγωγο $s^{(m)}$ ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω.

Το Θεώρημα 7.1 λεει ότι η m-οστή παράγωγος $f^{(m)}$ της f, δηλαδή του ορίου των f_k, ισούται με το όριο των m-οστών παραγώγων $f_k^{(m)}$ των f_k. Αυτό μπορούμε να το γράψουμε ως εξής:

$$\boxed{\frac{d^m}{dz^m}\Big(\lim_{k\to+\infty} f_k(z)\Big) = \lim_{k\to+\infty}\Big(\frac{d^m}{dz^m} f_k(z)\Big).}$$

Ομοίως, το Θεώρημα 7.2 λεει ότι η m-οστή παράγωγος $s^{(m)}$ της s, δηλαδή του αθροίσματος της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ των f_n, ισούται με το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(m)}$ των m-οστών παραγώγων $f_n^{(m)}$ των f_n. Αυτό μπορούμε να το γράψουμε ως εξής:

$$\boxed{\frac{d^m}{dz^m}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{d^m}{dz^m} f_n(z)\Big).}$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε εναλλαγή παραγώγισης και ορίου συναρτήσεων. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε εναλλαγή παραγώγισης και αθροίσματος άπειρων συναρτήσεων. Τα αντίστοιχα Θεωρήματα 7.1 και 7.2 περιγράφουν τις προϋποθέσεις ώστε να ισχύουν αυτές οι εναλλαγές των συμβόλων.

Ασκήσεις.

7.2.1. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$.
(i) Αποδείξτε ότι $\left|\frac{z}{z+1}\right| < 1$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{2}$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο ημιεπίπεδο $H = \left\{z \,\middle|\, \mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{2}\right\}$. Ποιά συνάρτηση είναι το κατά σημείο άθροισμα της σειράς συναρτήσεων στο ημιεπίπεδο H;

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε r με $0 < r < 1$ η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα στο σύνολο $\left\{z \,\middle|\, \left|\frac{z}{z+1}\right| \leq r\right\}$. Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο αυτό και τη σχέση του με το ημιεπίπεδο H. Να συμπεράνετε ότι η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο ημιεπίπεδο H.

7.2.2. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z^{2n}+1}$.

(i) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο στο σύνολο $A = \mathbb{C} \setminus C(0;1)$.

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε r με $0 < r < 1$ η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα στο σύνολο $\{z \,|\, |z| \leq r\}$ καθώς και στο σύνολο $\left\{z \,\middle|\, |z| \geq \frac{1}{r}\right\}$. Να συμπεράνετε ότι η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο σύνολο A. Τί συμπεραίνετε για το άθροισμα της σειράς στο σύνολο A;

7.2.3. Θεωρήστε ότι

$$t^z := e^{z \ln t} \quad \text{για κάθε } z \text{ και κάθε } t > 0.$$

Θεωρήστε και τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

(i) Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως) σε κάθε σημείο του ανοικτού ημιεπιπέδου $H = \{z \,|\, \mathrm{Re}\, z > 1\}$.

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $\sigma > 1$ η σειρά συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα στο κλειστό ημιεπίπεδο $\{z \,|\, \mathrm{Re}\, z \geq \sigma\}$. Να συμπεράνετε ότι η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο ημιεπίπεδο H.

Το άθροισμα της σειράς συμβολίζεται

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{για } z \in H,$$

και είναι συνάρτηση $\zeta : H \to \mathbb{C}$. Να συμπεράνετε ότι η συνάρτηση ζ είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο H.

Η συνάρτηση ζ ονομάζεται **συνάρτηση ζήτα** του Riemann, και συνδέεται με ένα από τα δυσκολότερα (ίσως το δυσκολότερο) άλυτα (ακόμη) προβλήματα των μαθηματικών.

7.2.4. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα επικαμπύλια ολοκληρώματα καθώς και την άσκηση 4.4.8, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) η οποία συγκλίνει στην συνάρτηση $\frac{1}{z}$ ομοιόμορφα σε κύκλο $C(0;r)$.

7.2.5. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ συγκλίνει κατά σημείο στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, και ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο άθροισμά της σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Τί συμπεραίνετε για το άθροισμα της σειράς στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$;

7.3 Δυναμοσειρές.

Δυναμοσειρές.

Ορισμός. *Κάθε σειρά της μορφής*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots}$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** *με* **κέντρο** *το* z_0 *και* **συντελεστές** *τα* a_n.
Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *είναι, φυσικά, η σειρά των συναρτήσεων* $a_n(z-z_0)^n$ *με ανεξάρτητη μεταβλητή το* z.
Αν για κάποιο z *η δυναμοσειρά συγκλίνει, τότε λέμε ότι το* z *είναι* **σημείο σύγκλισης** *της δυναμοσειράς. Αν για κάποιο* z *η δυναμοσειρά αποκλίνει, τότε λέμε ότι το* z *είναι* **σημείο απόκλισης** *της δυναμοσειράς. Το σύνολο των σημείων σύγκλισης λέγεται* **σύνολο σύγκλισης** *της δυναμοσειράς.*

Αν A είναι το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, και αν γράψουμε $s(z)$ το άθροισμα της δυναμοσειράς για κάθε $z \in A$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην συνάρτηση s κατά σημείο στο A:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = s(z) \quad \text{για κάθε } z \in A.$$

Η συνάρτηση s είναι το *κατά σημείο άθροισμα* της δυναμοσειράς στο σύνολο σύγκλισης A.

Όταν έχουμε μια δυναμοσειρά, μας ενδιαφέρει να βρούμε το σύνολο σύγκλισής της, το A, καθώς και το άθροισμά της, την συνάρτηση s στο σύνολο A.

Είναι προφανές ότι, αν $z = z_0$, τότε όλοι οι όροι της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ είναι ίσοι με το 0 εκτός από τον πρώτο όρο a_0. Δηλαδή το κέντρο μιας δυναμοσειράς είναι πάντοτε σημείο σύγκλισής της, και το άθροισμα της δυναμοσειράς στο κέντρο της είναι ίσο με a_0.

Υπάρχουν παραδείγματα όπου το z_0 είναι το μοναδικό σημείο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, δηλαδή το σύνολο σύγκλισής της είναι το $\{z_0\}$.

Παράδειγμα 7.3.1. Θεωρούμε την δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n z^n$$

με κέντρο το 0.
Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας: έχουμε ότι $\sqrt[n]{|n^n z^n|} = \sqrt[n]{n^n|z|^n} = n|z| \to +\infty$ όταν $z \neq 0$, οπότε κάθε $z \neq 0$ είναι σημείο απόκλισης της δυναμοσειράς. Άρα το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $\{0\}$.

Τώρα έστω ότι μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο σύγκλισης διαφορετικό από το κέντρο της z_0, και έστω z οποιοδήποτε σημείο σύγκλισης $\neq z_0$. Θέτουμε $r = |z-z_0| > 0$, και θεωρούμε $z' \in D(z_0; r)$, οπότε $|z'-z_0| < r$. Επειδή το z είναι σημείο σύγκλισης, η σειρά αριθμών $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει. Συνεπάγεται ότι $a_n(z-z_0)^n \to 0$, οπότε η ακολουθία $(a_n(z-z_0)^n)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει κάποιο $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|a_n|r^n = |a_n||z-z_0|^n = |a_n(z-z_0)^n| \leq M \quad \text{για κάθε } n.$$

Τότε

$$|a_n(z'-z_0)^n| = |a_n|r^n\Big(\frac{|z'-z_0|}{r}\Big)^n \leq M\Big(\frac{|z'-z_0|}{r}\Big)^n = Ms^n \quad \text{για κάθε } n, \tag{7.11}$$

όπου θέσαμε $s = \frac{|z'-z_0|}{r}$. Επειδή $0 \leq s < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} s^n$ συγκλίνει, οπότε από την (7.11) συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(z'-z_0)^n|$ συγκλίνει. Δηλαδή η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z'-z_0)^n$ συγκλίνει απολύτως.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι
Αν το $z \neq z_0$ *είναι σημείο σύγκλισης της δυναμοσειράς, και αν* $r = |z-z_0| > 0$*, τότε κάθε σημείο του ανοικτού δίσκου* $D(z_0; r)$ *είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς.*

Βλέπουμε δηλαδή ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ανοικτός δίσκος κάθε σημείο του οποίου είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τώρα θα θεωρήσουμε τον *μεγαλύτερο* τέτοιο ανοικτό δίσκο $D(z_0; R)$, δηλαδή την μεγαλύτερη ακτίνα $R > 0$ ώστε κάθε σημείο του $D(z_0; R)$ να είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Σχόλιο. Η ύπαρξη αυτού του *μέγιστου* δίσκου $D(z_0; R)$ είναι διαισθητικά προφανής. Αν, όμως, θέλουμε να θεμελιώσουμε αυστηρά την ύπαρξη αυτού του μέγιστου δίσκου, πρέπει να ορίσουμε το R ως το supremum του συνόλου των ακτίνων r για τις οποίες κάθε σημείο του $D(z_0; r)$ είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Υπάρχουν παραδείγματα όπου ο μέγιστος δίσκος $D(z_0; R)$ έχει ακτίνα $R = +\infty$. Αυτό σημαίνει ότι $D(z_0; R) = \mathbb{C}$ ή, με άλλα λόγια, ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 7.3.2. Θεωρούμε την δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} z^n$$

με κέντρο το 0.
Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας: ισχύει $\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n^n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n^n}} = \frac{|z|}{n} \to 0$, οπότε για κάθε z η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως, και επομένως $R = +\infty$.

Απομένει η περίπτωση $0 < R < +\infty$, δηλαδή όταν ο μέγιστος ανοικτός δίσκος $D(z_0; R)$, κάθε σημείο του οποίου είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς, έχει πεπερασμένη ακτίνα. (Θα δούμε παραδείγματα σε λίγο.) Τότε παίρνουμε οποιοδήποτε z με $|z - z_0| > R$ και θέτουμε $r = |z - z_0| > R$. Αν το z είναι σημείο σύγκλισης της δυναμοσειράς, τότε, σύμφωνα με ό,τι έχουμε αποδείξει προηγουμένως, κάθε σημείο του ανοικτού δίσκου $D(z_0; r)$ είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο δίσκος $D(z_0; r)$ είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον $D(z_0; R)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε z με $|z - z_0| > R$ είναι σημείο απόκλισης της δυναμοσειράς.

Άρα στην περίπτωση $0 < R < +\infty$ ο ανοικτός δίσκος $D(z_0; R)$ αποτελείται από σημεία απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς, ενώ όλα τα εξωτερικά σημεία του $D(z_0; R)$ είναι σημεία απόκλισης της δυναμοσειράς. Για τα συνοριακά σημεία, δηλαδή για τα σημεία του κύκλου $C(z_0; R)$ υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις: μπορεί να είναι όλα σημεία σύγκλισης ή όλα σημεία απόκλισης ή μερικά σημεία σύγκλισης και τα υπόλοιπα σημεία απόκλισης. (Θα δούμε παραδείγματα σε πολύ λίγο.)

Πριν συνοψίσουμε, θα πούμε ότι στην αρχική περίπτωση, που το μοναδικό σημείο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το κέντρο z_0, ο ανοικτός δίσκος $D(z_0; 0)$ με μηδενική ακτίνα $R = 0$ είναι, φυσικά, το κενό σύνολο. Ο κύκλος $C(z_0; 0)$ είναι το μονοσύνολο $\{z_0\}$, και κάθε $z \neq z_0$ είναι εξωτερικό σημείο του $D(z_0; 0)$. Αν πάμε στο άλλο άκρο, ο ανοικτός δίσκος $D(z_0; +\infty)$ με άπειρη ακτίνα $R = +\infty$ είναι, προφανώς, ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Ο κύκλος $C(z_0; +\infty)$ είναι το κενό σύνολο, και, επίσης, δεν υπάρχει κανένα εξωτερικό σημείο του $D(z_0; +\infty)$.

Η πρόταση που ακολουθεί συνοψίζει όσα αποδείξαμε μέχρι τώρα.

Πρόταση 7.8. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Τότε υπάρχει $R \in [0, +\infty]$ ώστε κάθε σημείο του δίσκου $D(z_0; R)$ να είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς, και κάθε εξωτερικό σημείο του δίσκου $D(z_0; R)$ να είναι σημείο απόκλισης της δυναμοσειράς. Τα συνοριακά σημεία του δίσκου $D(z_0; R)$, δηλαδή τα σημεία του κύκλου $C(z_0; R)$, μπορεί να είναι όλα σημεία σύγκλισης ή όλα σημεία απόκλισης ή μερικά σημεία σύγκλισης και τα υπόλοιπα σημεία απόκλισης της δυναμοσειράς. Δηλαδή, το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ο δίσκος $D(z_0; R)$ μαζί, ίσως, με μερικά από τα σημεία του κύκλου $C(z_0; R)$.*

Ορισμός. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Το $R \in [0, +\infty]$ της Πρότασης 7.8 ονομάζεται* **ακτίνα σύγκλισης** *της δυναμοσειράς, και ο ανοικτός δίσκος $D(z_0; R)$ ονομάζεται* **δίσκος σύγκλισης** *της δυναμοσειράς.*

Παράδειγμα 7.3.3. Θεωρούμε την γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ με κέντρο το 0.
Γνωρίζουμε από το παράδειγμα 7.1.2 ότι η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει απολύτως όταν $|z| < 1$,

δηλαδή όταν $z \in D(0;1)$, και αποκλίνει όταν $|z| \geq 1$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι το $R = 1$, και ο δίσκος σύγκλισης είναι ο $D(0;1)$. Η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο του κύκλου $C(0;1)$, οπότε το σύνολο σύγκλισης είναι ο δίσκος $D(0;1)$.

Παράδειγμα 7.3.4. Θεωρούμε την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ του παραδείγματος 7.1.4. Είδαμε ότι η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει απολύτως όταν $|z| < 1$, και αποκλίνει όταν $|z| > 1$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι το $R = 1$, και ο δίσκος σύγκλισης είναι ο $D(0;1)$. Είδαμε, επίσης, ότι όλα τα σημεία του κύκλου $C(0;1)$ είναι σημεία σύγκλισης (και μάλιστα απόλυτης). Άρα το σύνολο σύγκλισης είναι ο κλειστός δίσκος $\overline{D}(0;1)$.

Παράδειγμα 7.3.5. Θεωρούμε την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n$ του παραδείγματος 7.1.5. Είδαμε ότι η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει απολύτως όταν $|z| < 1$, και αποκλίνει όταν $|z| > 1$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι το $R = 1$, και ο δίσκος σύγκλισης είναι ο $D(0;1)$. Είδαμε, επίσης, ότι από τα σημεία του κύκλου $C(0;1)$ το σημείο 1 είναι σημείο απόκλισης, και όλα τα άλλα είναι σημεία σύγκλισης. Άρα το σύνολο σύγκλισης είναι το $\overline{D}(0;1) \setminus \{1\}$.

Η πρόταση που ακολουθεί δίνει δύο μεθόδους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμοσειράς, βασισμένες στα κριτήρια λόγου και ρίζας για σύγκλιση σειράς αριθμών.

Πρόταση 7.9. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.*
(i) Αν $a_n \neq 0$ για κάθε n και αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ και είναι ίσο με a, οπότε $0 \leq a \leq +\infty$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{a}$.
(ii) Αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ και είναι ίσο με a, οπότε $0 \leq a \leq +\infty$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{a}$.

Απόδειξη. (i) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου στην $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ θεωρώντας $z \neq z_0$. Είναι

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n (z - z_0)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z - z_0|\right) = \left(\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) |z - z_0| = a|z - z_0|.$$

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως αν $|z - z_0| < \frac{1}{a}$, και αποκλίνει αν $|z - z_0| > \frac{1}{a}$. Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{a}$.
(ii) Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας στην $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Είναι

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n (z - z_0)^n|} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0|\right) = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right) |z - z_0| = a|z - z_0|.$$

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως αν $|z - z_0| < \frac{1}{a}$, και αποκλίνει αν $|z - z_0| > \frac{1}{a}$. Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{a}$. $\square$

Σχόλιο. Υπάρχει μια γενικότερη και πληρέστερη παραλλαγή της Πρότασης 7.9, στην οποία δεν χρειάζεται να υποθέσουμε την ύπαρξη των $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ και $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Σ' αυτήν χρησιμοποιείται η έννοια του $\limsup$ πραγματικής ακολουθίας. Για όποιους γνωρίζουν αυτήν την έννοια, η γενικότερη παραλλαγή της Πρότασης 7.9 υπάρχει ως άσκηση 7.3.14.

Λήμμα 7.1. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο $\overline{D}(z_0; r)$, με $0 < r < R$, και επομένως και σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στον ανοικτό δίσκο $D(z_0; R)$.*

Απόδειξη. Έστω $0 < r < R$. Θεωρούμε οποιοδήποτε $z' \in D(z_0; R)$ με $r < |z' - z_0| < R$. Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z' - z_0)^n$ συγκλίνει απολύτως, οπότε ισχύει $a_n (z' - z_0)^n \to 0$, και άρα η ακολουθία $(a_n (z' - z_0)^n)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|a_n||z' - z_0|^n = |a_n (z' - z_0)^n| \leq M \quad \text{για κάθε } n.$$

Τότε για κάθε $z \in \overline{D}(z_0; r)$ και για κάθε n ισχύει

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n||z-z_0|^n \leq |a_n|r^n = |a_n||z'-z_0|^n\Big(\frac{r}{|z'-z_0|}\Big)^n \leq Ms^n, \tag{7.12}$$

όπου θέσαμε $s = \frac{r}{|z'-z_0|}$. Επειδή $0 < s < 1$, ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} s^n < +\infty$. Άρα από την (7.12) και από το κριτήριο Weierstrass προκύπτει ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα στο $\overline{D}(z_0; r)$.
Τώρα, αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε κλειστό δίσκο $\overline{D}$ ο οποίος περιέχεται στον $D(z_0; R)$, υπάρχει r ώστε $0 < r < R$ και ώστε ο $\overline{D}$ να περιέχεται στον $\overline{D}(z_0; r)$. Επειδή η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα στο $\overline{D}(z_0; r)$, συνεπάγεται ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο άθροισμά της και στο υποσύνολο $\overline{D}$ του $\overline{D}(z_0; r)$. □

Πρόταση 7.10. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε:*
(i) Το άθροισμα

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R)$$

της δυναμοσειράς είναι αναλυτική συνάρτηση στον δίσκο σύγκλισης $D(z_0; R)$, και για την παράγωγό της ισχύει

$$s'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R).$$

(ii) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, η οποία προκύπτει από την $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ μετά από παραγώγιση κάθε όρου της, έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης R.

Απόδειξη. (i) Άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 7.2 μετά από το Λήμμα 7.1.
(ii) Έστω R' η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$. Θα δούμε ότι $R' = R$. Από το (i) έχουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ συγκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; R)$. Άρα ο δίσκος σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ περιέχει τον δίσκο $D(z_0; R)$, οπότε $R \leq R'$. Τώρα θεωρούμε $z \in D(z_0; R')$. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ συγκλίνει απολύτως. Συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(z-z_0)^n| = |z-z_0| \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(z-z_0)^{n-1}| \leq |z-z_0| \sum_{n=1}^{+\infty} |na_n(z-z_0)^{n-1}| < +\infty.$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει, οπότε $z \in \overline{D}(z_0; R)$. Άρα $D(z_0; R') \subseteq \overline{D}(z_0; R)$, και επομένως $R' \leq R$.
Από τις $R \leq R'$ και $R' \leq R$ συνεπάγεται $R' = R$. □

Η Πρόταση 7.10 λέει ότι μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή παραγώγισης και αθροίσματος άπειρων συναρτήσεων:

$$s'(z) = \frac{d\,s(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dz}\big(a_n(z-z_0)^n\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Είδαμε λοιπόν ότι το άθροισμα μιας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με θετική ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ είναι αναλυτική συνάρτηση $s(z)$ στον δίσκο σύγκλισης $D(z_0; R)$, και ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, η οποία προκύπτει από την προηγούμενη μετά από παραγώγιση κάθε όρου της, έχει ως άθροισμα την παράγωγο $s'(z)$ στον ίδιο δίσκο σύγκλισης $D(z_0; R)$. Αυτό, φυσικά, ισχύει και για τη νέα δυναμοσειρά: η δυναμοσειρά $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$, η οποία προκύπτει από την $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ μετά από παραγώγιση κάθε όρου της, έχει ως άθροισμα την παράγωγο $s''(z)$ στον ίδιο δίσκο σύγκλισης $D(z_0; R)$. Και ξανά: η δυναμοσειρά $\sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)a_n(z-z_0)^{n-3}$, η οποία προκύπτει από την $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$ μετά από παραγώγιση κάθε όρου της, έχει ως άθροισμα την παράγωγο $s'''(z)$ στον ίδιο δίσκο σύγκλισης $D(z_0; R)$. Και ούτω καθ' εξής. Άρα:

Η m-οστή παράγωγος του αθροίσματος $s(z)$ μιας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με θετική ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ είναι ίση με την δυναμοσειρά η οποία προκύπτει από την αρχική δυναμοσειρά μετά από m παραγωγίσεις κάθε όρου της:

$$s^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m} \quad \text{για } z \in D(z_0; R).$$

Αν στον τελευταίο τύπο θέσουμε $z = z_0$, τότε από την σειρά στο δεξιό μέλος του θα απομείνει μόνο ο πρώτος όρος (δηλαδή με $n = m$) και θα προκύψει ότι $s^{(m)}(z_0) = m!a_m$. Δηλαδή

$$\boxed{a_m = \frac{s^{(m)}(z_0)}{m!} \quad \text{για κάθε } m \geq 0.}$$

Παράδειγμα 7.3.6. Γνωρίζουμε ότι η γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ έχει δίσκο σύγκλισης τον $D(0; 1)$ και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{για } z \in D(0; 1).$$

Άρα, για κάθε $m \geq 1$, παραγωγίζοντας m φορές, παίρνουμε ότι

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)z^{n-m} = \frac{m!}{(1-z)^{m+1}} \quad \text{για } z \in D(0; 1).$$

Παράδειγμα 7.3.7. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}z^n$ του παραδείγματος 7.3.4 έχει δίσκο σύγκλισης τον $D(0; 1)$. Έστω $s(z)$ το άθροισμα της δυναμοσειράς:

$$s(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}z^n \quad \text{για } z \in D(0; 1).$$

Συνεπάγεται

$$s'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \quad \text{για } z \in D(0; 1).$$

Γνωρίζουμε ότι ο πρωτεύων κλάδος $\operatorname{Log} z$ του λογαρίθμου είναι αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ με παράγωγο $\frac{d \operatorname{Log} z}{dz} = \frac{1}{z}$. Από τον κανόνα σύνθεσης προκύπτει αμέσως ότι η συνάρτηση $\operatorname{Log}(1-z)$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ με παράγωγο $\frac{d \operatorname{Log}(1-z)}{dz} = -\frac{1}{1-z}$. Επειδή ο ανοικτός δίσκος $D(0; 1)$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, έχουμε ότι

$$s'(z) = \frac{1}{1-z} = -\frac{d \operatorname{Log}(1-z)}{dz} \quad \text{για } z \in D(0; 1).$$

Δηλαδή η συνάρτηση $s(z) + \operatorname{Log}(1-z)$ έχει μηδενική παράγωγο στο χωρίο $D(0; 1)$, και άρα είναι σταθερή στο $D(0; 1)$. Η τιμή της στο 0 είναι $s(0) + \operatorname{Log} 1 = 0 + 0 = 0$, οπότε ισχύει $s(z) + \operatorname{Log}(1-z) = 0$ για κάθε $z \in D(0; 1)$. Δηλαδή

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}z^n = -\operatorname{Log}(1-z) \quad \text{για } z \in D(0; 1).}$$

Παράδειγμα 7.3.8. Είδαμε στο παράδειγμα 7.1.6 ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ συγκλίνει για κάθε z, οπότε έχει δίσκο σύγκλισης τον $D(0; +\infty) = \mathbb{C}$. Έστω $s(z)$ το άθροισμα της δυναμοσειράς:

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{για κάθε } z.$$

Τότε

$$s'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = s(z) \quad \text{για κάθε } z.$$

Συνεπάγεται

$$\frac{d}{dz}(e^{-z} s(z)) = -e^{-z} s(z) + e^{-z} s'(z) = 0 \quad \text{για κάθε } z.$$

Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι χωρίο, η συνάρτηση $e^{-z} s(z)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Και επειδή $e^{-0} s(0) = 1$, συνεπάγεται ότι $e^{-z} s(z) = 1$ για κάθε z, δηλαδή ότι

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z \quad \text{για κάθε } z.}$$

Δυναμοσειρές δεύτερου τύπου

Πολλές φορές εμφανίζονται σειρές της μορφής

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n (z - z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0}}$$

δηλαδή δυναμοσειρές στις οποίες το $z - z_0$ εμφανίζεται με αρνητικές δυνάμεις. Τέτοιες δυναμοσειρές θα τις ονομάζουμε **δυναμοσειρές δεύτερου τύπου**, για να τις ξεχωρίσουμε από τις δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, τις οποίες μπορούμε να ονομάσουμε και *δυναμοσειρές πρώτου τύπου*. Το z_0 και τα a_n θα συνεχίσουμε να τα λέμε **κέντρο** και **συντελεστές** της δυναμοσειράς δεύτερου τύπου $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n (z - z_0)^n$.

Παρατηρούμε ότι μια δυναμοσειρά δεύτερου τύπου δεν έχει νόημα στο κέντρο της z_0, ακριβώς όπως και μια δυναμοσειρά πρώτου τύπου δεν έχει νόημα στο ∞. Από την άλλη μεριά, στο $z = \infty$ μια δυναμοσειρά δεύτερου τύπου γίνεται $\sum_{-\infty}^{n=-1} 0 = 0$, οπότε μπορούμε να πούμε ότι συγκλίνει και έχει άθροισμα 0.

Από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$D(z_0; R, +\infty) := \{z \,|\, R < |z - z_0| < +\infty\}, \quad \overline{D}(z_0; R, +\infty) := \{z \,|\, R \leq |z - z_0| < +\infty\}$$

για τον ανοικτό και τον κλειστό μη-φραγμένο δακτύλιο κέντρου z_0 και εσωτερικής ακτίνας R. Επίσης θα συμβολίζουμε

$$D(z_0; R_1, R_2) := \{z \,|\, R_1 < |z - z_0| < R_2\}, \quad \overline{D}(z_0; R_1, R_2) := \{z \,|\, R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\}$$

τον ανοικτό και τον κλειστό φραγμένο δακτύλιο κέντρου z_0, εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής ακτίνας R_2.

Πρόταση 7.11. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n (z - z_0)^n$. Τότε υπάρχει $R \in [0, +\infty]$ ώστε κάθε σημείο του δακτυλίου $D(z_0; R, +\infty)$ (καθώς και το ∞) να είναι σημείο απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς, και κάθε εξωτερικό σημείο του δακτυλίου $D(z_0; R, +\infty)$ να είναι σημείο απόκλισης της δυναμοσειράς. Τα συνοριακά σημεία του δακτυλίου $D(z_0; R, +\infty)$, δηλαδή τα σημεία του κύκλου $C(z_0; R)$, μπορεί να είναι όλα σημεία σύγκλισης ή όλα σημεία απόκλισης ή μερικά σημεία σύγκλισης και τα υπόλοιπα σημεία απόκλισης της δυναμοσειράς.*

Απόδειξη. Ο απλούστερος τρόπος απόδειξης είναι να αναγάγουμε την δυναμοσειρά δεύτερου τύπου σε δυναμοσειρά πρώτου τύπου με την απλή αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{1}{z-z_0}$. Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ παίρνει τη μορφή δυναμοσειράς πρώτου τύπου με κέντρο το 0:

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n,$$

όπου για την πρώτη ισότητα κάναμε αλλαγή από n σε $-n$.
Παρατηρούμε ότι το z διατρέχει τον δακτύλιο $D(z_0; R, +\infty)$ (δηλαδή $R < |z-z_0| < +\infty$) αν και μόνο αν το w διατρέχει το $D\big(0; \frac{1}{R}\big) \setminus \{0\}$ (δηλαδή $0 < |w| < \frac{1}{R}$). Επίσης, το z διατρέχει τον κύκλο $C(z_0; R)$ αν και μόνο αν το w διατρέχει τον κύκλο $C\big(0; \frac{1}{R}\big)$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ό,τι γνωρίζουμε για την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n$ από την Πρόταση 7.8 για να πάρουμε τα ανάλογα αποτελέσματα για την $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$. □

Το R που εμφανίζεται στην Πρόταση 7.11 ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$. Επίσης, ο μη-φραγμένος δακτύλιος $D(z_0; R, +\infty)$ ονομάζεται **δακτύλιος σύγκλισης** της δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$.

Παράδειγμα 7.3.9. Η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{-n}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}z^{-n}$ συγκλίνει απολύτως σε κάθε σημείο του $D(0; 1, +\infty) \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0; 1)$.
Αυτό φαίνεται με την αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{1}{z}$ (όπως στην απόδειξη της Πρότασης 7.11). Τότε

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{-n}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}w^n,$$

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του παραδείγματος 7.3.4.
Την ίδια αλλαγή μεταβλητής χρησιμοποιούμε και στα επόμενα παραδείγματα.
Μάλιστα, από το παράδειγμα 7.3.7 έχουμε ότι

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{-n}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}w^n = -\operatorname{Log}(1-w) = -\operatorname{Log}\Big(1-\frac{1}{z}\Big) \quad \text{για } z \in D(0; 1, +\infty) \cup \{\infty\}.$$

Παράδειγμα 7.3.10. Η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{n^2}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{z^n}$ συγκλίνει απολύτως σε κάθε σημείο του $D(0; 1, +\infty) \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0; 1)$.

Παράδειγμα 7.3.11. Η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{(-n)!}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$ συγκλίνει απολύτως σε κάθε σημείο του $D(0; 0, +\infty) \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.
Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{1}{z}$ και το αποτέλεσμα του παραδείγματος 7.3.8, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{(-n)!}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}w^n = e^w - 1 = e^{1/z} - 1 \quad \text{για κάθε } z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}.$$

Παράδειγμα 7.3.12. Η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1}(-n)^{-n}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^n\frac{1}{z^n}$ συγκλίνει μόνο στο σημείο $z = \infty$.

Μπορούμε να διατυπώσουμε μια πρόταση ανάλογη της Πρότασης 7.9 για την εύρεση της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς δεύτερου τύπου. Είναι όμως προτιμότερο να βρίσκουμε την ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς δεύτερου τύπου ανάγοντάς την σε δυναμοσειρά πρώτου τύπου και εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.9 σ’ αυτήν.

Παράδειγμα 7.3.13. Στην δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{3^n}{n^2} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n n^2} \frac{1}{z^n}$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{1}{z}$, και προκύπτει

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{3^n}{n^2} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n n^2} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n n^2} w^n.$$

Για την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n n^2} w^n$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το (i) της Πρότασης 7.9:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{1/(3^{n+1}(n+1)^2)}{1/(3^n n^2)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3(n+1)^2} = \frac{1}{3}.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n n^2} w^n$ είναι ίση με 3. Δηλαδή αυτή η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $|w| < 3$, και αποκλίνει αν $|w| > 3$. Άρα, λόγω της αλλαγής μεταβλητής $w = \frac{1}{z}$ που κάναμε, η αρχική δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{3^n}{n^2} z^n$ συγκλίνει αν $|z| > \frac{1}{3}$, και αποκλίνει αν $|z| < \frac{1}{3}$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης της αρχικής δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{3}$, και ο δακτύλιος σύγκλισής της είναι ο $D(0; \frac{1}{3}, +\infty)$.

Λήμμα 7.2. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R < +\infty$. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δακτύλιο $\overline{D}(z_0; r, +\infty)$, με $R < r < +\infty$, και επομένως και σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στον ανοικτό δακτύλιο $D(z_0; R, +\infty)$.*

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 7.11, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{1}{z-z_0}$, καθώς και τα αποτελέσματα του Λήμματος 7.1 για την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$. □

Πρόταση 7.12. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R < +\infty$. Τότε:*
(i) Το άθροισμα

$$s(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R, +\infty)$$

της δυναμοσειράς είναι αναλυτική συνάρτηση στον δακτύλιο σύγκλισης $D(z_0; R, +\infty)$, και για την παράγωγό της ισχύει

$$s'(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} n a_n(z-z_0)^{n-1} \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R, +\infty).$$

(ii) Η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} n a_n(z-z_0)^{n-1}$, η οποία προκύπτει από την $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ μετά από παραγώγιση κάθε όρου της, έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης R.

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 7.11, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{1}{z-z_0}$, καθώς και τα αποτελέσματα της Πρότασης 7.10 για την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$. Φυσικά θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα σύνθεσης για την παράγωγο, όπως και την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης $w = \frac{1}{z-z_0}$. Ας συμπληρώσει ο αναγνώστης τις λεπτομέρειες. □

Όπως στην περίπτωση των δυναμοσειρών πρώτου τύπου, η Πρόταση 7.12 συμπληρώνεται ως εξής:

Η m-οστή παράγωγος του αθροίσματος $s(z)$ μιας δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R<+\infty$ είναι ίση με την δυναμοσειρά η οποία προκύπτει από την αρχική δυναμοσειρά μετά από m παραγωγίσεις κάθε όρου της:

$$s^{(m)}(z)=\sum_{-\infty}^{n=-1} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m} \quad \text{για } z\in D(z_0;R,+\infty).$$

Δυναμοσειρές τρίτου τύπου

Τέλος, μπορούμε να θεωρήσουμε δυναμοσειρές της μορφής

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n=\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

οι οποίες αποτελούνται από μια δυναμοσειρά πρώτου τύπου και μια δυναμοσειρά δεύτερου τύπου με το ίδιο κέντρο. Τέτοιες δυναμοσειρές θα τις αποκαλούμε **δυναμοσειρές τρίτου τύπου** με **κέντρο** z_0 και **συντελεστές** a_n. Η ακτίνα σύγκλισης R_1 της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ και η ακτίνα σύγκλισης R_2 της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ονομάζονται **ακτίνες σύγκλισης** της νέας δυναμοσειράς. Λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει για κάποιο z αν και οι δύο δυναμοσειρές, $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, συγκλίνουν για αυτό το z, και λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ αποκλίνει για κάποιο z σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, δηλαδή αν τουλάχιστον μία από τις δύο δυναμοσειρές που την απαρτίζουν αποκλίνει για αυτό το z.

Μια δυναμοσειρά τρίτου τύπου με κέντρο z_0 δεν έχει νόημα στα σημεία z_0 και ∞.

Αν R_1 είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ και R_2 είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, τότε ο ανοικτός δίσκος $D(z_0;R_2)$ και ο ανοικτός δακτύλιος $D(z_0;R_1,+\infty)$ τέμνονται μόνο όταν $R_1<R_2$. Στην περίπτωση αυτή η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως) σε κάθε σημείο της τομής του δίσκου $D(z_0;R_2)$ και του δακτυλίου $D(z_0;R_1,+\infty)$, δηλαδή σε κάθε σημείο του ανοικτού δακτυλίου $D(z_0;R_1,R_2)$. Ο δακτύλιος αυτός ονομάζεται **δακτύλιος σύγκλισης** της $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. Το R_1 είναι η *εσωτερική ακτίνα σύγκλισης* και το R_2 είναι η *εξωτερική ακτίνα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Φυσικά, τα αποτελέσματα για τις δυναμοσειρές πρώτου και δεύτερου τύπου συνδυάζονται στα εξής:

Μια δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με ακτίνες σύγκλισης R_1,R_2, όπου $R_1<R_2$, συγκλίνει στο άθροισμά της ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δακτύλιο $\overline{D}(z_0;r_1,r_2)$, με $R_1<r_1<r_2<R_2$, και επομένως και σε κάθε κλειστό δίσκο ο οποίος περιέχεται στον ανοικτό δακτύλιο $D(z_0;R_1,R_2)$.

και

Το άθροισμα $s(z)$ μιας δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με ακτίνες σύγκλισης R_1,R_2, όπου $R_1<R_2$, είναι αναλυτική συνάρτηση στον δακτύλιο σύγκλισης $D(z_0;R_1,R_2)$, και για κάθε $m\geq 1$ ισχύει

$$\begin{aligned}s^{(m)}(z)&=\sum_{-\infty}^{n=-1} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}\\&\quad+\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m} \quad \text{για } z\in D(z_0;R_1,R_2).\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3.14. Η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{2^n}{-n}z^n+1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}z^n$ έχει κέντρο το 0.
Η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{2^n}{-n}z^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}\frac{1}{z^n}$ έχει δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;\frac{1}{2},+\infty)$, και η δυναμοσειρά $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}z^n$ έχει δίσκο σύγκλισης τον $D(0;1)$. Άρα ο δακτύλιος σύγκλισης της αρχικής δυναμοσειράς τρίτου τύπου είναι ο $D(0;\frac{1}{2},1)$.

Ασκήσεις.

7.3.1. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.9, βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης και τους δίσκους σύγκλισης των δυναμοσειρών:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} z^n.$$

Κατόπιν βρείτε τα αθροίσματά τους στους αντίστοιχους δίσκους σύγκλισης, χρησιμοποιώντας κάποια γνωστά αθροίσματα δυναμοσειρών.

7.3.2. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.9, βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης και τους δίσκους σύγκλισης των δυναμοσειρών:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{13} z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^5} z^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\ln n} z^n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^n z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n.$$

7.3.3. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.9, βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης και τους δακτυλίους σύγκλισης των δυναμοσειρών:

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{2^n} z^n, \quad \sum_{-\infty}^{n=-1} 3^n z^n, \quad \sum_{-\infty}^{n=-1} n^3 z^n, \quad \sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{n^2} z^n, \quad \sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{(-n)!n^n} z^n.$$

Βρείτε τα αθροίσματα των δύο πρώτων στους αντίστοιχους δακτυλίους σύγκλισης.

7.3.4. Βρείτε τον δακτύλιο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)^n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2i})^{n+1} z^n$ και υπολογίστε το άθροισμά της στον δακτύλιο σύγκλισης.

7.3.5. (i) Γιατί δεν μπορεί να εφαρμοστεί η Πρόταση 7.9 για τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^{2n}$;
(ii) Εφαρμόστε την Πρόταση 7.9 αφού πρώτα κάνετε μια κατάλληλη απλή αλλαγή μεταβλητής στην δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^{2n}$ και βρείτε την ακτίνα σύγκλισής της. Κατόπιν βρείτε το άθροισμά της στον δίσκο σύγκλισής της.
(iii) Εφαρμόστε κατ' ευθείαν τα κριτήρια λόγου και ρίζας στην δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^{2n}$ για να βρείτε την ακτίνα σύγκλισής της.

7.3.6. (i) Γράψτε την συνάρτηση $\frac{1}{z-1}$ ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D(0;1)$, και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;1,+\infty)$.
(ii) Γράψτε την συνάρτηση $\frac{1}{(z-3)(z-4)}$ ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D(0;3)$, και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;3,4)$, και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;4,+\infty)$.

7.3.7. Θεωρούμε αριθμούς a, b, c με $c \neq 0, -1, -2, \dots$ και την δυναμοσειρά

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)} z^n,$$

η οποία ονομάζεται **υπεργεωμετρική σειρά** με παραμέτρους a, b, c. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της υπεργεωμετρικής σειράς, και αποδείξτε ότι η συνάρτηση $w = F(z;a,b,c)$, η οποία είναι το άθροισμα της υπεργεωμετρικής σειρά στον δίσκο σύγκλισής της, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$z(1-z)w'' + (c-(a+b+1)z)w' - abw = 0.$$

7.3.8. (i) Έστω $D(z_0;R')$ και $D(z_0;R'')$ οι δίσκοι σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{+\infty} a'_n(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a''_n(z-z_0)^n$, και έστω $0<R'\leq R''$. Αν οι δυο δυναμοσειρές έχουν το ίδιο άθροισμα σε κάθε σημείο του δίσκου $D(z_0;R')$, αποδείξτε ότι οι δυναμοσειρές είναι ίδιες, δηλαδή ότι ισχύει $a'_n=a''_n$ για κάθε n.
(ii) Διατυπώστε και αποδείξτε το αντίστοιχο του (i) για δυναμοσειρές $\sum_{-\infty}^{n=-1} a'_n(z-z_0)^n$ και $\sum_{-\infty}^{n=-1} a''_n(z-z_0)^n$.

7.3.9. Έστω $0<r<+\infty$. Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει απολύτως για κάποιο $z\in C(z_0;r)$, αποδείξτε ότι συγκλίνει απολύτως για κάθε $z\in\overline{D}(z_0;r)$.

7.3.10. Έστω R', R'' και R οι ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{n=0}^{+\infty} a'_n(z-z_0)^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a''_n(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}(a'_n+a''_n)(z-z_0)^n$, αντιστοίχως.
(i) Αν $R'\neq R''$, αποδείξτε ότι $R=\min\{R',R''\}$.
(ii) Αν $R'=R''$, αποδείξτε ότι $R\geq R'=R''$.

7.3.11. Έστω $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. Για ποιά z συγκλίνει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}z^{kn}$;

7.3.12. Για ποιά z συγκλίνει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n!}$;

7.3.13. Έστω $0<b<1$. Βρείτε τον δακτύλιο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{+\infty} b^{n^2}z^n$.

7.3.14. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, και έστω $a=\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, οπότε $0\leq a\leq+\infty$. Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{a}$.

7.4 Σειρές Taylor.

Πρόταση 7.13. *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω, έστω $z_0\in\Omega$, και έστω $D(z_0;R)$ ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο Ω. Τότε υπάρχει μοναδική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ώστε να ισχύει*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{για κάθε } z\in D(z_0;R).$$

Οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \quad \text{για } 0<r<R.$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $z\in D(z_0;R)$, οπότε $|z-z_0|<R$. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε r με $|z-z_0|<r<R$. Τότε $z\in D(z_0;r)$ και, σύμφωνα με τον τύπο Cauchy, ισχύει

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{7.13}$$

Τώρα, για κάθε $\zeta\in C(z_0;r)$ γράφουμε

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\Big)^n$$

βάσει της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ με $w=\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, αφού $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{r}<1$.
Έτσι ο τύπος (7.13) γίνεται

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\Big)^n\,d\zeta. \tag{7.14}$$

Κατόπιν βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$ συγκλίνει, ως σειρά συναρτήσεων του ζ, ομοιόμορφα στο $C(z_0;r)$. Αυτό ισχύει λόγω του κριτηρίου Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση, αφού ισχύει $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n=\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n$ για κάθε $\zeta\in C(z_0;r)$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n<+\infty$. Από την Πρόταση 7.7 συνεπάγεται ότι μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης στον τύπο (7.14) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(z)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\Big(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\Big)^n\,d\zeta\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\,(z-z_0)^n. \end{aligned}\tag{7.15}$$

Από τους τύπους Cauchy για τις παραγώγους μιας αναλυτικής συνάρτησης έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\tag{7.16}$$

οπότε η σχέση (7.15) γίνεται

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n.$$

Άρα ισχύει $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ για κάθε $z\in D(z_0;R)$ με $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Και, φυσικά, ισχύει

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\quad\text{για } 0<r<R$$

λόγω της (7.16).
Το μόνο που απομένει είναι να αποδειχτεί η μοναδικότητα της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ ώστε να ισχύει

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n\quad\text{για κάθε } z\in D(z_0;R).\tag{7.17}$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε r με $0<r<R$. Από τα αποτελέσματα που έχουμε για δυναμοσειρές, γνωρίζουμε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον δίσκο $\overline{D}(z_0;r)$ και άρα και στο υποσύνολό του, τον κύκλο $C(z_0;r)$. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 7.7 καθώς και με τους τύπους του παραδείγματος 6.4.1 (και της άσκησης 4.4.8), για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ με $k\geq 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} \oint_{C(z_0;r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta&=\oint_{C(z_0;r)}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(\zeta-z_0)^n\,d\zeta\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\oint_{C(z_0;r)}(\zeta-z_0)^{n-k-1}\,d\zeta=2\pi i a_k. \end{aligned}$$

Άρα οι συντελεστές της δυναμοσειράς ταυτίζονται με τους συντελεστές της δυναμοσειράς που βρήκαμε στο πρώτο μέρος της απόδειξης (στο μέρος που αφορά την ύπαρξη μιας δυναμοσειράς), οπότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ για την οποία ισχύει η (7.17) είναι μοναδική. □

Ορισμός. *Η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ *με κέντρο* z_0 *και με συντελεστές*

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(z_0;r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\quad\text{για } 0<r<R,$$

όπου $D(z_0;R)$ *είναι ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος κέντρου* z_0 *ο οποίος περιέχεται στο χωρίο αναλυτικότητας της* f*, ονομάζεται* **σειρά Taylor** *της* f *στο σημείο* z_0.

Επομένως το βασικό περιεχόμενο της Πρότασης 7.13 είναι:

Η συνάρτηση f ταυτίζεται με την σειρά Taylor της στο σημείο z_0 στον μεγαλύτερο ανοικτό δίσκο με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο χωρίο αναλυτικότητας της f.

Παράδειγμα 7.4.1. Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1-z}$ είναι αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ είναι ο $D(0;1)$. Για να βρούμε τη σειρά Taylor της f στο σημείο 0 υπολογίζουμε τις διαδοχικές παραγώγους:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3}, \quad f'''(z) = \frac{2 \cdot 3}{(1-z)^4}$$

και, γενικότερα,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad \text{για } n \geq 0.$$

Άρα οι συντελεστές της σειράς Taylor της f στο σημείο 0 είναι τα

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 \quad \text{για } n \geq 0.$$

Δηλαδή η σειρά Taylor της f στο σημείο 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, οπότε

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \text{για κάθε } z \in D(0;1).$$

Ο τύπος αυτός είναι, φυσικά, γνωστός! Μάλιστα, ξεκινώντας από αυτόν τον τύπο, και χωρίς να ακολουθήσουμε την προηγούμενη διαδικασία, συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ *πρέπει* να είναι η σειρά Taylor της $\frac{1}{1-z}$ στο 0. Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 7.13 και ειδικά από την μοναδικότητα της δυναμοσειράς η οποία ταυτίζεται με μια συνάρτηση στον μεγαλύτερο δίσκο με δεδομένο κέντρο ο οποίος περιέχεται στο χωρίο αναλυτικότητας της συνάρτησης.

Παράδειγμα 7.4.2. Η $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ είναι αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ είναι ο $D(0;1)$. Για να βρούμε τη σειρά Taylor της f στο σημείο 0 υπολογίζουμε τις παραγώγους της f. Κατ' αρχάς γράφουμε την f ως άθροισμα "απλών κλασμάτων":

$$f(z) = -\frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{i-z} + \frac{1}{i+z}\Big).$$

Επομένως,

$$f^{(n)}(z) = -\frac{1}{2i}\Big(\frac{n!}{(i-z)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(i+z)^{n+1}}\Big) \quad \text{για } n \geq 0.$$

Άρα οι συντελεστές της σειράς Taylor της f στο σημείο 0 είναι τα

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1+(-1)^n}{2i^n} = \begin{cases} \frac{1}{i^n} = (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{για άρτιο } n \geq 0 \\ 0 & \text{για περιττό } n \geq 0 \end{cases}$$

Άρα η σειρά Taylor της f στο σημείο 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k}$, οπότε

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k} \quad \text{για κάθε } z \in D(0;1).$$

Φυσικά, τον ίδιο τύπο μπορούμε να βρούμε πιο εύκολα, χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor της $\frac{1}{1-z}$ στο σημείο 0, δηλαδή την γεωμετρική σειρά: στη θέση του z στον τύπο $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ χρησιμοποιούμε το $-z^2$, και βρίσκουμε $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$. Είναι απαραίτητο να παρατηρήσουμε ότι $-z^2 \in D(0;1)$ αν και μόνο αν $z \in D(0;1)$. Από τη στιγμή που έχουμε βρει *κάποια* δυναμοσειρά κέντρου 0 η οποία ταυτίζεται με τη συνάρτησή μας στον δίσκο $D(0;1)$, αυτή η σειρά *πρέπει* να είναι η σειρά Taylor της συνάρτησης. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αυτό προκύπτει από την μοναδικότητα της δυναμοσειράς η οποία ταυτίζεται με μια συνάρτηση στον μεγαλύτερο δίσκο με δεδομένο κέντρο ο οποίος περιέχεται στο χωρίο αναλυτικότητας της συνάρτησης.

Παράδειγμα 7.4.3. Η εκθετική συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C}$ και ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}$ είναι ο $D(0;+\infty) = \mathbb{C}$. Οι παράγωγοι της f είναι

$$f^{(n)}(z) = e^z \quad \text{για κάθε } n \geq 0,$$

οπότε οι συντελεστές της σειράς Taylor της f στο σημείο 0 είναι τα

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Άρα η σειρά Taylor της f στο σημείο 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ και, επομένως,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{για κάθε } z.$$

Και αυτός ο τύπος μας είναι ήδη γνωστός από το παράδειγμα 7.3.8. Φυσικά, αν θεωρήσουε αυτόν τον τύπο γνωστό (όπως έχει προκύψει στο παράδεγμα 7.3.8), τότε πάλι, λόγω μοναδικότητας, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ *πρέπει* να είναι η σειρά Taylor της συνάρτησης e^z στο σημείο 0.

Παράδειγμα 7.4.4. Η συνάρτηση $f(z) = \cos z$, που την είδαμε στο παράδειγμα 5.2.7 (και στην άσκηση 1.5.3), είναι αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C}$ και ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}$ είναι ο $D(0;+\infty) = \mathbb{C}$. Οι παράγωγοι της f είναι

$$f^{(n)}(z) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos z & \text{για άρτιο } n \geq 0 \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin z & \text{για περιττό } n \geq 0 \end{cases}$$

Άρα οι συντελεστές της σειράς Taylor της f στο σημείο 0 είναι τα

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} & \text{για άρτιο } n \geq 0 \\ 0 & \text{για περιττό } n \geq 0 \end{cases}$$

Άρα η σειρά Taylor της f στο σημείο 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ και, επομένως,

$$\boxed{\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad \text{για κάθε } z.}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\boxed{\sin z = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} z^{2k-1} \quad \text{για κάθε } z.}$$

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε τις σειρές Taylor των $\cos z$ και $\sin z$ στο σημείο 0 είναι να χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς τους και τη σειρά Taylor της e^z στο σημείο 0. Για παράδειγμα, για κάθε z ισχύει:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-iz)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}(1-(-1)^n)}{2\,n!} z^n = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^{2k}}{(2k-1)!} z^{2k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} z^{2k-1}. \end{aligned}$$

Έτσι βρίσκουμε μια δυναμοσειρά με κέντρο 0 η οποία ταυτίζεται με την $\sin z$ στον μεγαλύτερο δίσκο με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο χωρίο αναλυτικότητας της $\sin z$, οπότε, λόγω μοναδικότητας, η σειρά αυτή είναι ακριβώς η σειρά Taylor της $\sin z$ στο σημείο 0.

Ασκήσεις.

7.4.1. Βρείτε τη σειρά Taylor της $\operatorname{Log}(1-z)$ στο σημείο 0.

7.4.2. Βρείτε τη σειρά Taylor της $\operatorname{Log} z$ στο σημείο 1.

7.4.3. Βρείτε τη σειρά Taylor της $\frac{1}{1-z}$ στο σημείο z_0, όπου $z_0 \neq 1$. Ποιός είναι ο δίσκος σύγκλισης αυτής της σειράς;

7.4.4. Βρείτε τη σειρά Taylor της e^z στο οποιοδήποτε σημείο z_0. Ποιός είναι ο δίσκος σύγκλισης αυτής της σειράς;

7.4.5. Βρείτε τις σειρές Taylor στο οποιοδήποτε σημείο z_0 των $\cos z$ και $\sin z$. Ποιοί είναι οι δίσκοι σύγκλισης αυτών των σειρών;

7.4.6. Βρείτε τις σειρές Taylor στο σημείο 0 των συναρτήσεων:

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Ποιοί είναι οι δίσκοι σύγκλισης αυτών των σειρών;

7.4.7. Βρείτε τη σειρά Taylor της $\frac{z}{9-z^2}$ στο σημείο 0. Ποιός είναι ο δίσκος σύγκλισης αυτής της σειράς;

7.4.8. Έστω f αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(z_0; R)$, και έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Taylor της f στο σημείο z_0.
(i) Αποδείξτε ότι

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad \text{για } 0 \le r < R.}$$

(ii) Αν η f είναι φραγμένη στον $D(z_0; R)$, δηλαδή ισχύει $|f(z)| \le M$ για κάθε $z \in D(z_0; R)$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 R^{2n} \le M^2.$$

(iii) Αν και η g είναι αναλυτική στον $D(z_0; R)$ με σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ στο σημείο z_0, αποδείξτε ότι

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,\overline{g(z_0 + re^{it})}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n} r^{2n} \quad \text{για } 0 \le r < R.}$$

7.5 Ρίζες, και Αρχή Ταυτότητας.

Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω, και έστω $z_0 \in \Omega$. Θεωρούμε τον μεγαλύτερο δίσκο $D(z_0; R)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω και την σειρά Taylor της f στο σημείο z_0, οπότε έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{για } z \in D(z_0; R).$$

Επειδή $a_0 = f(z_0)$, το z_0 είναι ρίζα της f αν και μόνο αν $a_0 = 0$.
Τώρα υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα της f, οπότε $a_0 = 0$, και διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: Ισχύει $a_n = 0$ για κάθε n.

Τότε, προφανώς, ισχύει $f(z) = 0$ για κάθε $z \in D(z_0; R)$, δηλαδή η f είναι ταυτοτικά 0 στον δίσκο $D(z_0; R)$. Βάσει των τύπων των a_n, η συνθήκη "$a_n = 0$ για κάθε n" ισοδυναμεί με την "$f^{(n)}(z_0) = 0$ για κάθε n".

Δεύτερη περίπτωση: Ισχύει $a_n \neq 0$ για τουλάχιστον ένα n.

Τότε θεωρούμε το ελάχιστο $n \geq 1$ για το οποίο ισχύει $a_n \neq 0$ και έστω ότι αυτό είναι το N. Δηλαδή έχουμε ότι $a_0 = a_1 = \ldots = a_{N-1} = 0$ και $a_N \neq 0$. Και πάλι, αυτό ισοδυναμεί με $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \ldots = f^{(N-1)}(z_0) = 0$ και $f^{(N)}(z_0) \neq 0$. Τότε έχουμε ότι

$$f(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{για } z \in D(z_0; R).$$

Η σχέση αυτή γράφεται

$$f(z) = (z - z_0)^N \sum_{n=N}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-N} = (z - z_0)^N \sum_{n=0}^{+\infty} a_{N+n} (z - z_0)^n \quad \text{για } z \in D(z_0; R).$$

Αφού η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{N+n}(z-z_0)^n = a_N + a_{N+1}(z-z_0) + a_{N+2}(z-z_0)^2 + \cdots$ συγκλίνει στον δίσκο $D(z_0; R)$, ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $g : D(z_0; R) \to \mathbb{C}$. Δηλαδή, ισχύει

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{N+n} (z - z_0)^n \quad \text{για } z \in D(z_0; R).$$

Επομένως,

$$f(z) = (z - z_0)^N g(z) \quad \text{για } z \in D(z_0; R), \tag{7.18}$$

οπότε

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Η τιμή της g στο z_0 είναι, φυσικά, $g(z_0) = a_N = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}$, οπότε έχουμε τον διπλό τύπο

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^N}, & \text{αν } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\} \\ \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}, & \text{αν } z = z_0 \end{cases} \tag{7.19}$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$ ορίζει αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\Omega \setminus \{z_0\}$ και όχι μόνο στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση g είναι ορισμένη σε ολόκληρο το Ω με τον διπλό τύπο

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^N}, & \text{αν } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}, & \text{αν } z = z_0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση g είναι αναλυτική σε ολόκληρο το Ω. Πράγματι, αφενός η $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$ είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z_0\}$, αφετέρου ο περιορισμός της g στον $D(z_0; R)$ είναι απλώς η αρχική συνάρτηση g του διπλού τύπου (7.19), πριν επεκταθεί στο Ω, η οποία είναι αναλυτική στον $D(z_0; R)$ και, επομένως, είναι αναλυτική και στο σημείο z_0.
Συνεχίζοντας στην ίδια περίπτωση, επειδή $g(z_0) = a_N \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο z_0, υπάρχει κάποιο r με $0 < r \leq R$ έτσι ώστε να ισχύει $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0; r)$, οπότε από την (7.18) έχουμε

$$f(z) \neq 0 \quad \text{για } z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}.$$

Βάσει των προηγουμένων, έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω, και έστω $z_0\in\Omega$ με $f(z_0)=0$. Επίσης, έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Taylor της f στο σημείο z_0.*

Αν $a_n=0$ για κάθε n, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **ρίζα άπειρης πολλαπλότητας** *της f.*

Αν $a_0=a_1=\ldots=a_{N-1}=0$ και $a_N\neq 0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **ρίζα πεπερασμένης πολλαπλότητας** *N της f.*

Αν $f(z_0)=a_0\neq 0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **ρίζα μηδενικής πολλαπλότητας** *$N=0$ της f.*

Συνοψίζουμε:

Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο χωρίο Ω, και $z_0\in\Omega$.
Αν το z_0 είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f, τότε η f είναι ταυτοτικά 0 σε έναν δίσκο με κέντρο z_0 και, μάλιστα, στον μεγαλύτερο τέτοιο δίσκο ο οποίος περιέχεται στο Ω.
Αν το z_0 είναι ρίζα πεπερασμένης πολλαπλότητας της f, τότε υπάρχει κάποιος δίσκος $D(z_0;r)$ στον οποίο η f δεν έχει καμία άλλη ρίζα εκτός του z_0, και γι αυτό λέμε ότι η ρίζα z_0 είναι **μεμονωμένη**. *Μάλιστα, αν η πολλαπλότητα της ρίζας z_0 είναι N, τότε η συνάρτηση $g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$, η οποία είναι αναλυτική στο $\Omega\setminus\{z_0\}$, μπορεί να οριστεί και στο z_0 με τιμή $g(z_0)=\frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}$, και τότε είναι αναλυτική στο Ω.*

Παράδειγμα 7.5.1. Αν στην γνωστή μας ταυτότητα

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,z^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,z^n$$

θέσουμε z^3 στη θέση του z, βρίσκουμε ότι για την συνάρτηση $e^{z^3}-1$, η οποία είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, ισχύει

$$e^{z^3}-1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,z^{3n}=z^3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,z^{3(n-1)}=z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,z^{3n}\quad\text{για κάθε } z.$$

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,z^{3n}$ συγκλίνει για κάθε z, δηλαδή ο δίσκος σύγκλισής της είναι ο $D(0;+\infty)=\mathbb{C}$. Η δυναμοσειρά αυτή ορίζει αναλυτική συνάρτηση, έστω g, στο $\mathbb{C}$:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,z^{3n}\quad\text{για κάθε } z.$$

Άρα ισχύει

$$e^{z^3}-1=z^3g(z)\quad\text{για κάθε } z.$$

Επειδή $g(0)=1\neq 0$, το 0 είναι ρίζα πολλαπλότητας 3 της συνάρτησης $e^{z^3}-1$.
Η g έχει και τον τύπο

$$g(z)=\begin{cases}(e^{z^3}-1)/z^3, & \text{αν } z\neq 0\\ 1, & \text{αν } z=0\end{cases}$$

εκτός από τον τύπο της ως δυναμοσειρά.

Πρόταση 7.14. *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω, και έστω $z_0\in\Omega$. Αν το z_0 είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f, τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο Ω.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε προηγουμένως, η f είναι ταυτοτικά ίση με 0 σε κάποιον ανοικτό δίσκο κέντρου z_0.
Τώρα ορίζουμε το σύνολο

$$B=\{z\in\Omega\,|\,\text{η } f \text{ είναι ταυτοτικά ίση με } 0 \text{ σε κάποιον ανοικτό δίσκο κέντρου } z\}$$

και το συμπληρωματικό σύνολο
$$C = \Omega \setminus B.$$
Προφανώς, τα σύνολα B, C είναι ξένα και η ένωσή τους είναι το Ω. Επίσης, το B δεν είναι κενό διότι περιέχει το z_0.

Έστω $z \in B$. Τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με 0 σε κάποιον δίσκο $D(z; r)$. Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε $w \in D(z; r)$, τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με 0 σε κάποιο δίσκο $D(w; r')$ ο οποίος είναι αρκετά μικρός ώστε να είναι $D(w; r') \subseteq D(z; r)$. Άρα κάθε $w \in D(z; r)$ ανήκει στο B, οπότε $D(z; r) \subseteq B$, και επομένως το z είναι εσωτερικό σημείο του B.

Άρα το B είναι ανοικτό σύνολο.

Τώρα, έστω $z \in C$. Τότε η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0 σε *κανένα* δίσκο κέντρου z, οπότε το z δεν είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f. Αφού το z είναι ρίζα πεπερασμένης (μπορεί και μηδενικής) πολλαπλότητας της f, υπάρχει κάποιος δίσκος $D(z; r)$ όπου το μοναδικό σημείο στο οποίο (ίσως) μηδενίζεται η f είναι το z. Προφανώς, αυτός ο δίσκος δεν περιέχει κανένα σημείο w του B, οπότε $D(z; r) \subseteq C$, και άρα το z είναι εσωτερικό σημείο του C.

Άρα το C είναι ανοικτό σύνολο.

Επειδή το Ω είναι χωρίο, από την Πρόταση 3.15 συνεπάγεται ότι ένα από τα B, C είναι κενό. Το B δεν είναι κενό, οπότε $C = \emptyset$. Άρα $\Omega = B$, οπότε η f μηδενίζεται ταυτοτικά στο Ω. □

Αρχή Ταυτότητας. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω. Έστω ότι το σύνολο των ριζών της f έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω, δηλαδή υπάρχει ακολουθία ριζών (z_n) της f ώστε $z_n \to z$ με $z \in \Omega$ και $z_n \neq z$ για κάθε n. Τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο Ω.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής στο z και $z_n \to z$, συνεπάγεται $f(z_n) \to f(z)$. Και, επειδή $f(z_n) = 0$ για κάθε n, συνεπάγεται $f(z) = 0$, οπότε και το z είναι ρίζα της f.

Αν το z ήταν ρίζα πεπερασμένης πολλαπλότητας της f, τότε θα υπήρχε κάποιος δίσκος $D(z; r)$ στον οποίο η μοναδική ρίζα της f θα ήταν το z. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι στον $D(z; r)$ ανήκουν τελικά οι ρίζες z_n που είναι όλες διαφορετικές από το z.

Άρα το z είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f, οπότε από την Πρόταση 7.14 συνεπάγεται ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο Ω. □

Σχόλιο. Μιλώντας για τις ρίζες μιας συνάρτησης f, δηλαδή για τις λύσεις της εξίσωσης $f(z) = 0$, προσδίδουμε "τεχνητά" ιδιαίτερη σημασία στην τιμή 0. Όμως, όσα είπαμε μπορούν να γενικευθούν πολύ απλά για οποιαδήποτε μιγαδική τιμή στη θέση του 0. Μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε σταθερό w και να μας απασχολήσουν οι λύσεις της εξίσωσης $f(z) = w$. Τα συμπεράσματα είναι ακριβώς ίδια με τα συμπεράσματα για τις ρίζες, και τα βρίσκουμε θεωρώντας την συνάρτηση $g(z) = f(z) - w$, οπότε οι λύσεις της $f(z) = w$ είναι οι ίδιες με τις ρίζες της g. Μερικά τέτοια συμπεράσματα είναι τα:

(i) Αν το z_0 είναι λύση άπειρης πολλαπλότητας της $f(z) = w$, τότε η f είναι σταθερή w σε έναν δίσκο $D(z_0; R)$, και μάλιστα στον μεγαλύτερο τέτοιο δίσκο ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.

(ii) Αν το z_0 είναι λύση πεπερασμένης πολλαπλότητας N της $f(z) = w$, τότε σε κάποιον δίσκο $D(z_0; r)$ η f παίρνει την τιμή w μόνο στο κέντρο z_0 του δίσκου.

(iii) Από την Πρόταση 7.14 προκύπτει ότι, αν η f είναι αναλυτική στο χωρίο Ω και αν το z_0 είναι λύση άπειρης πολλαπλότητας της $f(z) = w$, τότε η f είναι σταθερή w στο Ω.

(iv) Από την Αρχή Ταυτότητας προκύπτει ότι, αν η f είναι αναλυτική στο χωρίο Ω και αν το σύνολο των λύσεων της $f(z) = w$ έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω, τότε η f είναι σταθερή w στο Ω.

Παράδειγμα 7.5.2. Ας δούμε αν υπάρχουν συναρτήσεις f αναλυτικές στο $\mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μία τέτοια συνάρτηση είναι προφανώς η $f(z) = \sin z$.

Έστω τώρα οποιαδήποτε f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ για την οποία ισχύει η παραπάνω συνθήκη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(z) = f(z) - \sin z$, η οποία είναι αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C}$ και έχει ρίζες όλα τα σημεία $\frac{1}{n}$. Αυτές οι ρίζες της g έχουν σημείο συσσώρευσης το σημείο 0, το οποίο προφανώς ανήκει στο χωρίο $\mathbb{C}$. Από την Αρχή Ταυτότητας συνεπάγεται ότι η g είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή ισχύει $f(z) = \sin z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, οπότε η $\sin z$ είναι η μοναδική f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ για την οποία ισχύει η παραπάνω συνθήκη.

Παράδειγμα 7.5.3. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ η οποία ικανοποιεί την $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Γράφουμε $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, και συγκρίνουμε τις συναρτήσεις $f(z)$ και $\frac{1}{1+z}$. Και οι δύο συναρτήσεις είναι αναλυτικές στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, και η διαφορά τους $f(z) - \frac{1}{1+z}$ έχει ρίζες τα σημεία $\frac{1}{n}$ τα οποία έχουν σημείο συσσώρευσης το σημείο 0 το οποίο περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Συνεπάγεται ότι η $f(z) - \frac{1}{1+z}$ είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο σύνολο αυτό, και άρα ισχύει $f(z) = \frac{1}{1+z}$ για κάθε $z \neq -1$. Όμως, η f υποτίθεται ότι είναι αναλυτική στο -1, οπότε το όριο

$$\lim_{z \to -1} \frac{1}{1+z} = \lim_{z \to -1} f(z) = f(-1)$$

είναι μιγαδικός αριθμός, και καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 7.5.4. Ας δούμε αν υπάρχει f αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε να ισχύει $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \in (0, +\infty)$ ή έστω για x σε κάποιο υποδιάστημα (θετικού μήκους) (a, b) του $(0, +\infty)$.
Θεωρούμε τον αναλυτικό κλάδο g της τετραγωνικής ρίζας στο χωρίο $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ο οποίος έχει τιμή 1 στο σημείο $z = 1$. Η συνάρτηση g έχει τύπο

$$g(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{για } z = |z|e^{i\theta} \text{ με } -\pi < \theta < \pi.$$

Τώρα βλέπουμε ότι ισχύει $f(x) = \sqrt{x} = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Άρα η συνάρτηση $f - g$, η οποία είναι αναλυτική στο χωρίο A, έχει ως ρίζες όλα τα σημεία του (a, b). Επειδή κάθε σημείο του (a, b) είναι σημείο συσσώρευσής του και επειδή το (a, b) περιέχεται στο A, συμπεραίνουμε ότι η $f - g$ πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο A. Δηλαδή ισχύει

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{για } z = |z|e^{i\theta} \text{ με } -\pi < \theta < \pi.$$

Αν, όμως, η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(-\infty, 0)$, για παράδειγμα στο -1.
Θεωρούμε σημεία $z = |z|e^{i\theta}$ τα οποία τείνουν στο -1 από το άνω ημιεπίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι $|z| \to 1$ και $\theta \to \pi-$. Συνεπάγεται

$$f(-1) = \lim_{|z| \to 1, \theta \to \pi-} \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Κατόπιν, θεωρούμε σημεία $z = |z|e^{i\theta}$ τα οποία τείνουν στο -1 από το κάτω ημιεπίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι $|z| \to 1$ και $\theta \to -\pi+$. Συνεπάγεται

$$f(-1) = \lim_{|z| \to 1, \theta \to -\pi+} \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε δεν υπάρχει f η οποία ικανοποιεί τις αρχικές υποθέσεις.

Ασκήσεις.

7.5.1. Βρείτε την πολλαπλότητα του 0 ως ρίζα των παρακάτω συναρτήσεων

$$e^z - 1, \quad e^z - 1 - z, \quad e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}, \quad \sin z, \quad \sin z - z, \quad \sin z - z + \frac{z^3}{3!},$$

$$\cos z, \quad \cos z - 1, \quad \cos z - 1 + \frac{z^2}{2}, \quad \tan z, \quad \tan z - z, \quad e^z - e^{-z}.$$

7.5.2. Έστω f, g αναλυτικές στο χωρίο Ω, και έστω $z_0 \in \Omega$ ώστε $f(z_0) = g(z_0) = 0$ και $g'(z_0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται και είναι αναλυτική σε κάποιον ανοικτό δίσκο με κέντρο το z_0, και ότι ισχύει το όριο

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

7.5.3. Ποιές αναλυτικές συναρτήσεις f στο $\mathbb{C}$ ικανοποιούν την $f(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$;

7.5.4. Βρείτε, αν υπάρχει, f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ η οποία ικανοποιεί ένα από τα παρακάτω:
(i) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1+(-1)^n}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $f(\frac{1}{2k}) = f(\frac{1}{2k+1}) = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

7.5.5. Υπάρχει f αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε να ισχύει $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

7.5.6. Έστω f, g αναλυτικές στο χωρίο Ω, και έστω $0 \in \Omega$. Αν οι f, g δεν μηδενίζονται πουθενά στο Ω και αν ισχύει $f'(\frac{1}{n})/f(\frac{1}{n}) = g'(\frac{1}{n})/g(\frac{1}{n})$ για κάθε n, τί συμπεραίνετε για την σχέση ανάμεσα στις f, g;

7.6 Σειρές Laurent.

Πρόταση 7.15. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο χωρίο Ω, και έστω $D(z_0; R_1, R_2)$ ένας μέγιστος ανοικτός δακτύλιος με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο Ω. Τότε υπάρχει μοναδική δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ ώστε να ισχύει*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R_1, R_2).$$

Οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \quad \text{για } R_1 < r < R_2.$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν $z \in D(z_0; R_1, R_2)$, οπότε $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Επιλέγουμε δυο οποιαδήποτε r_1, r_2 ώστε $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$. Τότε $z \in D(z_0; r_1, r_2)$, και θα αποδείξουμε ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \tag{7.20}$$

Για να αποδείξουμε την (7.20), θεωρούμε έναν οποιονδήποτε κλειστό δίσκο $\overline{D}(z; r)$ ο οποίος περιέχεται στον ανοικτό δακτύλιο $D(z_0; r_1, r_2)$, και την συνάρτηση $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ (ως συνάρτηση του ζ), η οποία είναι αναλυτική στο χωρίο $\Omega \setminus \{z\}$ το οποίο περιέχει το κλειστό σύνολο $\overline{D}(z_0; r_1, r_2) \setminus D(z; r)$. Από το Πόρισμα 6.2 συνεπάγεται ότι

$$\oint_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \oint_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \oint_{C(z;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \tag{7.21}$$

Τώρα, ακριβώς όπως στην απόδειξη του τύπου Cauchy για κύκλους, έχουμε ότι

$$\lim_{r \to 0} \oint_{C(z;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = 2\pi i f(z).$$

Παίρνοντας $r \to 0$ στην (7.21), καταλήγουμε στην (7.20).
Τώρα, για κάθε $\zeta \in C(z_0; r_2)$ γράφουμε

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n$$

βάσει της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ με $w = \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}$, αφού $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$.
Επίσης, για κάθε $\zeta \in C(z_0; r_1)$ γράφουμε (προσέξτε την αλλαγή!)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^n$$

πάλι βάσει της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ με $w = \frac{\zeta-z_0}{z - z_0}$, αφού $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1$.
Έτσι ο τύπος (7.20) γίνεται

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n \, d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^n \, d\zeta. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Ακριβώς όπως στην απόδειξη της Πρότασης 7.13, βλέπουμε με το κριτήριο Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση ότι οι σειρές μέσα στα δυο ολοκληρώματα της σχέσης (7.22) συγκλίνουν ομοιόμορφα και, αφού εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n \, d\zeta + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^n \, d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \, (z - z_0)^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_1)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n \, d\zeta \, \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία σειρά αλλάζουμε το $n+1$ σε $-n$ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \, (z - z_0)^n \\ &\quad + \sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \, (z - z_0)^n. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Τώρα, επειδή η $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ είναι, ως συνάρτηση του ζ, αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$, ισχύει

$$\oint_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta = \oint_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \quad \text{για } R_1 < r_1 < r_2 < R_2.$$

Άρα οι συντελεστές των δυο σειρών στον τύπο (7.23) δεν εξαρτώνται από την τιμή που παίρνουν οι ακτίνες r_1, r_2, οπότε θεωρούμε στη θέση των r_1, r_2 οποιοδήποτε r με $R_1 < r < R_2$, και γράφουμε

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R_1, R_2)$$

με

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{για } R_1 < r < R_2.$$

Τώρα θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα της δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ώστε να ισχύει

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R_1, R_2). \tag{7.24}$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε r με $R_1 < r < R_2$. Η $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον κύκλο $C(z_0; r)$, οπότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta &= \oint_{C(z_0;r)} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(\zeta - z_0)^n\, d\zeta \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \oint_{C(z_0;r)} (\zeta - z_0)^{n-k-1}\, d\zeta = 2\pi i a_k. \end{aligned}$$

Άρα οι συντελεστές της δυναμοσειράς ταυτίζονται με τους συντελεστές της δυναμοσειράς που βρήκαμε στο πρώτο μέρος της απόδειξης, οπότε η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ για την οποία ισχύει η (7.24) είναι μοναδική. □

Ορισμός. *Η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με κέντρο z_0 και με συντελεστές*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{για } R_1 < r < R_2,$$

όπου $D(z_0; R_1, R_2)$ είναι μέγιστος ανοικτός δακτύλιος με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f, ονομάζεται **σειρά Laurent** *της f στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$.*

Παράδειγμα 7.6.1. Η $f(z) = \frac{1}{z}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ο δακτύλιος $D(0; 0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι μέγιστος ανοικτός δακτύλιος (και, μάλιστα, ο μόνος) με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Για να βρούμε τη σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0; 0, +\infty)$ υπολογίζουμε τους συντελεστές a_n. Θεωρούμε οποιοδήποτε r με $0 < r < +\infty$, και τότε

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0;r)} \frac{1/\zeta}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0;r)} \frac{1}{\zeta^{n+2}}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } n.$$

Αν $n \neq -1$, τότε $a_n = 0$ και, αν $n = -1$, τότε $a_{-1} = 1$. Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0; 0, +\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n = z^{-1}$ και, επομένως, ισχύει (το απολύτως προφανές) $\frac{1}{z} = z^{-1}$ για κάθε $z \in D(0; 0, +\infty)$.

Στα επόμενα παραδείγματα θα εκμεταλλευτούμε την μοναδικότητα της σειράς Laurent για να βρούμε τις σειρές Laurent διαφόρων συναρτήσεων χωρίς να προσφύγουμε στους υπολογισμούς με επικαμπύλια ολοκληρώματα: βρίσκουμε με έμμεσο τρόπο (μέσω βοηθητικών συναρτήσεων) μια δυναμοσειρά που ταυτίζεται με τη δεδομένη συνάρτηση σε κάποιον δακτύλιο, ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της συνάρτησης, οπότε η σειρά που βρήκαμε είναι ακριβώς η σειρά Laurent που ζητάμε.

Παράδειγμα 7.6.2. Η $f(z) = \frac{1}{1-z}$ είναι αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Έχουμε δει ότι ο μέγιστος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ είναι ο $D(0; 1)$ και ότι η σειρά Taylor της f σ' αυτόν τον δίσκο είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.
Ένας μέγιστος ανοικτός δακτύλιος κέντρου 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ είναι ο $D(0; 1, +\infty)$. Για να βρούμε τη σειρά Laurent της f στον δακτύλιο αυτόν, μπορούμε να υπολογίσουμε τους

συντελεστές a_n με τους τύπους με τα επικαμπύλια ολοκληρώματα. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε κάτι πιο απλό. Αν $z \in D(0;1,+\infty)$, τότε $|z|>1$, οπότε $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ και, επομένως,

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n.$$

Λόγω μοναδικότητας, η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;1,+\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n$.

Παράδειγμα 7.6.3. Η $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ είναι αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$. Υπάρχει ένας μέγιστος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 και δύο μέγιστοι ανοικτοί δακτύλιοι με κέντρο 0 οι οποίοι περιέχονται στο $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$: ο δίσκος $D(0;1)$ και οι δακτύλιοι $D(0;1,2)$ και $D(0;2,+\infty)$. Για να βρούμε τις αντίστοιχες σειρές Taylor και Laurent της f, γράφουμε την f ως άθροισμα "απλών κλασμάτων" ως εξής:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Αν $z \in D(0;1)$, τότε $|z|<1$ και $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, οπότε

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{2^{n+1}}\Big)z^n.$$

Άρα η σειρά Taylor της f στον δίσκο $D(0;1)$ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$.
Αν $z \in D(0;1,2)$, τότε $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ και $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, οπότε

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n \\ &= \sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{2^{n+1}}\Big)z^n. \end{aligned}$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;1,2)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$, με συντελεστές $a_n = -1$ αν $n \leq -1$, και $a_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$ αν $n \geq 0$.
Αν $z \in D(0;2,+\infty)$, τότε $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ και $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, οπότε

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{2}{z}\Big)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{-\infty}^{n=-2}\Big(\frac{1}{2^{n+1}}-1\Big)z^n.$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;2,+\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-2}(\frac{1}{2^{n+1}}-1)z^n$, με συντελεστές $a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - 1$ αν $n \leq -2$, και $a_n = 0$ αν $n \geq -1$.

Παράδειγμα 7.6.4. Η $f(z) = e^{1/z}$ είναι αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ο $D(0;0,+\infty) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι ο μόνος μέγιστος ανοικτός δακτύλιος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Βρίσκουμε τη σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)$ χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor της e^z στο $\mathbb{C}$. Στην ισότητα $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n$ αντικαθιστούμε το z με το $\frac{1}{z}$, και βρίσκουμε

$$e^{1/z} = \sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(-n)!}z^n + 1 \quad \text{για κάθε } z \neq 0.$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(-n)!}z^n + 1$, με συντελεστές $a_n = \frac{1}{(-n)!}$ αν $n \leq 0$, και $a_n = 0$ αν $n \geq 1$.

Ασκήσεις.

7.6.1. Βρείτε τις σειρές Laurent με κέντρο 0 των συναρτήσεων:

$$\frac{e^z}{z^3}, \quad \frac{e^z-1}{z^5}, \quad \frac{\sin z}{z^5}, \quad \frac{\sin z - z}{z^5}, \quad \frac{\mathrm{Log}(1-z)+z}{z^3}, \quad z(e^{\frac{1}{z}}-e^{-\frac{1}{z}}), \quad \sin\frac{1}{z}.$$

Πόσες τέτοιες σειρές Laurent έχει καθεμία από αυτές τις συναρτήσεις και ποιοί είναι οι δακτύλιοι σύγκλισής τους;

7.6.2. Έστω $0<|a|<|b|$. Βρείτε τις τρεις σειρές Laurent με κέντρο 0, τις δύο σειρές Laurent με κέντρο a, και τις δύο σειρές Laurent με κέντρο b της συνάρτησης $\frac{z}{(z-a)(z-b)}$.

7.6.3. Βρείτε τους τρεις αρχικούς όρους της σειράς Laurent σε δακτύλιο $D(0;0,R)$ καθεμιάς από τις συναρτήσεις:

$$\cot z, \quad \frac{1}{\sin z}, \quad \frac{z}{(\sin z)^2}, \quad \frac{1}{e^z-1}.$$

Ποιό είναι το κατάλληλο R για καθεμιά από αυτές;

7.6.4. Έστω f αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0;R_1,R_2)$. Χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη σειρά Laurent της f, αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο συναρτήσεις, f_1 και f_2, όπου η f_2 είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;R_2)$, και η f_1 είναι αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0;R_1,+\infty)$, ώστε να ισχύει

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z) \quad \text{για } z\in D(z_0;R_1,R_2).$$

7.7 Μεμονωμένες ανωμαλίες.

Ορισμός. *Λέμε ότι το σημείο z_0 είναι* **μεμονωμένη ανωμαλία** *της συνάρτησης f αν υπάρχει δίσκος $D(z_0;R)$ ώστε η f να είναι ορισμένη και αναλυτική στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$.*

Αν το z_0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f, τότε στον αντίστοιχο δακτύλιο $D(z_0;0,R)=D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$ η f παριστάνεται από την σειρά Laurent της:

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n \quad \text{για } z\in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις και τις κωδικοποιούμε με τον εξής ορισμό.

Ορισμός. *Έστω μεμονωμένη ανωμαλία z_0 της συνάρτησης f, και έστω $\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Laurent της f σε έναν δακτύλιο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$.*
Αν ισχύει $a_n=0$ για κάθε $n<0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **αιρόμενη ανωμαλία** *της f.*
Αν ισχύει $a_n\neq 0$ για τουλάχιστον ένα $n<0$ και το πλήθος των $n<0$ για τα οποία ισχύει $a_n\neq 0$ είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **πόλος** *της f.*
Αν ισχύει a_n για άπειρα $n<0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **ουσιώδης ανωμαλία** *της f.*

Τώρα θα εξετάσουμε καθεμιά από τις τρεις περιπτώσεις. Και αρχίζουμε με την περίπτωση που το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Σ' αυτήν την περίπτωση η f γράφεται

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n \quad \text{για } z\in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}.$$

Επομένως, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει για κάθε $z\in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$ και, φυσικά, συγκλίνει και για $z=z_0$, ανεξάρτητα από το αν η f είναι ορισμένη ή όχι στο σημείο z_0. Αυτό σημαίνει ότι η δυναμοσειρά ορίζει αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρο τον δίσκο $D(z_0;R)$. Αν συμβολίσουμε g αυτήν την συνάρτηση, τότε

$$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } z\in D(z_0;R).$$

Η τιμή της g στο z_0 είναι $g(z_0) = a_0$ και η g ταυτίζεται με την f στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$. Δηλαδή

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{αν } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\} \\ a_0, & \text{αν } z = z_0 \end{cases}$$

Αυτό, απλώς, μας λέει ότι *αν ορίσουμε την f στο σημείο z_0 με τιμή $f(z_0) = a_0$, τότε η f θα ταυτιστεί με την g σε ολόκληρο τον δίσκο $D(z_0; R)$ και, επομένως, θα γίνει αναλυτική σε ολόκληρο τον δίσκο $D(z_0; R)$*. Αν η f δεν είναι ήδη ορισμένη στο z_0, τότε την ορίζουμε εξ αρχής στο z_0 με τιμή a_0. Αν η f είναι ήδη ορισμένη στο z_0 και η τιμή της στο z_0 είναι ίση με a_0, τότε κρατάμε την τιμή a_0 στο z_0 χωρίς αλλαγή. Αν η f είναι ήδη ορισμένη στο z_0 και η τιμή της στο z_0 είναι διαφορετική από a_0, τότε αλλάζουμε την τιμή της στο z_0 και την εξισώνουμε με a_0. Συνοψίζουμε:

Αν το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, τότε η f μπορεί να οριστεί κατάλληλα στο z_0 και να γίνει αναλυτική σε ένα δίσκο με κέντρο z_0. Η σειρά Laurent της f στο z_0 εκφυλίζεται σε δυναμοσειρά (πρώτου τύπου), και αυτή η δυναμοσειρά είναι η σειρά Taylor της (επεκτεταμένης) f σε έναν δίσκο κέντρου z_0.

Τώρα θα δούμε ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να αποφασίζουμε αν μια μεμονωμένη ανωμαλία είναι αιρόμενη, χωρίς να πρέπει να υπολογίζουμε την σειρά Laurent της αντίστοιχης συνάρτησης.

Κριτήριο Riemann. *Εστω ότι το z_0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f. Αν υπάρχει το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ και είναι πεπερασμένο ή, πιο γενικά, αν η f είναι φραγμένη κοντά στο z_0 ή, ακόμη πιο γενικά, αν $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$, τότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Αντιστρόφως, αν το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, τότε το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Έστω

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$$

και υποθέτουμε ότι $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.
Θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$ και τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|z - z_0||f(z)| \leq \epsilon \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \text{ με } 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{7.25}$$

Θεωρούμε τυχόν r με $0 < r < \min\{\delta, R, 1\}$, και τυχόν $n < 0$. Τότε

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta,$$

οπότε από την (7.25) έχουμε

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{r^{n+2}} 2\pi r = \epsilon r^{-n-1} = \epsilon r^{|n|-1} \leq \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $a_n = 0$. Αυτό ισχύει για τυχόν $n < 0$, οπότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.
Αντιστρόφως, αν το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, τότε η f μπορεί να οριστεί κατάλληλα στο z_0 και να γίνει αναλυτική σε ένα δίσκο με κέντρο z_0 και, επομένως, συνεχής στο z_0. Άρα το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο αφού ισούται με την τιμή $f(z_0)$. $\square$

Προσέξτε μια εντυπωσιακή διαφορά με το τι συμβαίνει σε συναρτήσεις μιας *πραγματικής* μεταβλητής. Μπορεί μια συνάρτηση $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στην ένωση $(x_0 - R, x_0) \cup (x_0, x_0 + R)$ και να είναι ακόμη και συνεχής στο x_0, αλλά να μην είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Απλό παράδειγμα είναι η $f(x) = |x|$ με $x_0 = 0$.

Παράδειγμα 7.7.1. Η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2-3z+2}{z-2}$ είναι ορισμένη και αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Επειδή $\lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2}(z-1) = 1$, το 2 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Μάλιστα, αν ορίσουμε $f(2) = 1$, τότε η f, ορισμένη πια σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$, είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.
Ο τύπος της επεκτεταμένης f στο $\mathbb{C}$ είναι ο

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2-3z+2}{z-2}, & \text{αν } z \neq 2 \\ 1, & \text{αν } z = 2 \end{cases} = \begin{cases} z-1, & \text{αν } z \neq 2 \\ 1, & \text{αν } z = 2 \end{cases} = z - 1.$$

Δηλαδή, η επεκτεταμένη f είναι η απλή συνάρτηση $z-1$ σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$.
Αν θέλαμε να βρούμε εξ αρχής την σειρά Laurent της αρχικής f με κέντρο το 2 θα γράφαμε:

$$f(z) = \frac{z^2-3z+2}{z-2} = z - 1 = 1 + (z-2) \qquad \text{για } z \in D(2; 0, +\infty).$$

Άρα η σειρά Laurent δεν περιέχει αρνητικές δυνάμεις του $z-2$, οπότε το 2 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.

Τώρα πάμε στην περίπτωση που το z_0 είναι πόλος της f, και έστω $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Laurent της f σε έναν δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$. Επειδή το z_0 είναι πόλος, ισχύει $a_n \neq 0$ για τουλάχιστον ένα $n < 0$ και το πλήθος των $n < 0$ για τα οποία ισχύει $a_n \neq 0$ είναι πεπερασμένο. Τότε, προφανώς, υπάρχει κάποιος μέγιστος φυσικός αριθμός m ώστε να ισχύει $a_{-m} \neq 0$.

Ορισμός. *Έστω ότι το z_0 είναι πόλος της f, και έστω $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Laurent της f σε έναν δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$. Αν το N είναι ο μέγιστος φυσικός αριθμός m για τον οποίο ισχύει $a_{-m} \neq 0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι πόλος* **τάξης** *N της f.*

Πρόταση 7.16. *Έστω ότι το z_0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f. Τότε το z_0 είναι πόλος τάξης N της f αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση g η οποία είναι αναλυτική σε κάποιον δίσκο $D(z_0; R)$ και ισχύει*

$$g(z_0) \neq 0 \quad \textit{και} \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \textit{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}. \tag{7.26}$$

Απόδειξη. Έστω ότι το z_0 είναι πόλος τάξης N. Αν $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ είναι η σειρά Laurent της f σε έναν δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$, τότε είναι $a_n = 0$ για κάθε $n < -N$, και $a_{-N} \neq 0$. Επομένως,

$$f(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \frac{a_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$$

με $a_{-N} \neq 0$. Η τελευταία σχέση γράφεται, φυσικά,

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-N}(z-z_0)^n \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Αφού η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-N}(z-z_0)^n$ συγκλίνει στον δίσκο $D(z_0; R)$, ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση, έστω g, στον $D(z_0; R)$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-N}(z-z_0)^n \quad \text{για } z \in D(z_0; R).$$

Επομένως,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Επίσης, είναι $g(z_0) = a_{-N} \neq 0$, και άρα η g ικανοποιεί την (7.26).
Αντιστρόφως, έστω ότι η g είναι αναλυτική στο $D(z_0; R)$, και ότι ισχύουν αυτά που αναφέρονται στην (7.26). Θεωρούμε τη σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$ της g στο $D(z_0; R)$, και τότε για κάθε $z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} = \frac{1}{(z-z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n \\ &= \frac{b_0}{(z-z_0)^N} + \cdots + \frac{b_{N-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+N}(z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Επομένως, η τελευταία δυναμοσειρά είναι η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ και επειδή $b_0 = g(z_0) \neq 0$, το z_0 είναι πόλος τάξης N της f. □

Παράδειγμα 7.7.2. Πολλές φορές προκύπτουν συναρτήσεις της μορφής

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

όπου οι p, q είναι αναλυτικές σε κάποιο χωρίο Ω, και θέλουμε να δούμε πώς συμπεριφέρεται η f σε κάποιο $z_0 \in \Omega$. Ειδική περίπτωση: αν οι p, q είναι πολυώνυμα, τότε η f είναι ρητή συνάρτηση. Για καθεμιά από τις p, q θεωρούμε ότι το z_0 είναι ρίζα της, με την αντίστοιχη πολλαπλότητα M, N. Φυσικά, μπορεί το z_0 να μην είναι ρίζα κάποιας από τις p, q, οπότε το αντίστοιχο από τα M, N είναι ίσο με 0. Έχουμε δει ότι υπάρχουν αναλυτικές συναρτήσεις p_1, q_1 στο Ω ώστε

$$p(z) = (z-z_0)^M p_1(z), \;\; q(z) = (z-z_0)^N q_1(z) \quad \text{για } z \in \Omega$$

και

$$p_1(z_0) \neq 0, \quad q_1(z_0) \neq 0.$$

(Φυσικά, εξετάζουμε την περίπτωση που καμιά από τις p, q δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.)
Τότε υπάρχει κάποιο $R > 0$ ώστε να ισχύει $p_1(z) \neq 0$ και $q_1(z) \neq 0$ για $z \in D(z_0; R)$, οπότε έχουμε

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = (z-z_0)^{M-N} \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = (z-z_0)^{M-N} g(z) \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\},$$

όπου η συνάρτηση $g(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)}$ είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0; R)$ και $g(z_0) = \frac{p_1(z_0)}{q_1(z_0)} \neq 0$.
Και τώρα συμπεραίνουμε ότι
[α] αν $M \geq N$, τότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, οπότε η f (αφού επεκταθεί κατάλληλα στο z_0) είναι αναλυτική στο z_0, και το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας $M - N$ της f,
[β] αν $M < N$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $N - M$ της f.
Ας δούμε μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα.
(i) Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{(z-2)^2},$$

ορισμένη και αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.
Γράφουμε $z^2 - 3z + 2 = (z-2)(z-1)$, οπότε έχουμε ότι $f(z) = \frac{z-1}{z-2}$ για $z \neq 2$. Η συνάρτηση $g(z) = z - 1$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και $g(2) = 1 \neq 0$. Άρα το 2 είναι πόλος τάξης 1 της f.
Για να βρούμε την σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(2; 0, +\infty)$ γράφουμε

$$f(z) = \frac{z-1}{z-2} = \frac{g(z)}{z-2} = \frac{1 + (z-2)}{z-2} = \frac{1}{z-2} + 1 \quad \text{για } z \neq 2.$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(2;0,+\infty)$ είναι η $\frac{1}{z-2}+1$.
Προσέξτε ότι η παράσταση $1+(z-2)$ που εμφανίσαμε στον αριθμητή του $f(z)=\frac{z-1}{z-2}=\frac{g(z)}{z-2}$ είναι η σειρά Taylor της $g(z)=z-1$ στο σημείο 2.
(ii) Έστω η συνάρτηση
$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^3}$$
ορισμένη και αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Η σειρά Taylor της e^z-1 με κέντρο το 0 είναι η $z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$. Άρα έχουμε ότι
$$e^z-1=z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots=z\Big(1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots\Big)=zg(z)$$
με
$$g(z)=1+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^2+\cdots.$$
Η g είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ (διότι η δυναμοσειρά που την ορίζει συγκλίνει για κάθε z) και $g(0)=1\neq 0$, και ισχύει $f(z)=\frac{g(z)}{z^2}$ για $z\neq 0$. Άρα το 0 είναι πόλος τάξης 2 της f.
Τέλος,
$$f(z)=\frac{g(z)}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots \quad \text{για } z\neq 0,$$
οπότε η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)$ είναι η $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots$.
(iii) Έστω η συνάρτηση
$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$$
ορισμένη και αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.
Τα σημεία $k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$ είναι μεμονωμένες ανωμαλίες της $\cot z$ και θα δούμε ότι όλα είναι πόλοι τάξης 1.
Έστω, λοιπόν, τυχόν (σταθερό) $k\in\mathbb{Z}$. Η σειρά Taylor της $\sin z$ με κέντρο το σημείο $k\pi$ προκύπτει από την γνωστή σειρά Taylor της $\sin z$ με κέντρο το σημείο 0, γράφοντας
$$\begin{aligned}\sin z&=\sin((z-k\pi)+k\pi)=\cos(k\pi)\sin(z-k\pi)+\sin(k\pi)\cos(z-k\pi)\\&=(-1)^k\sin(z-k\pi)=(-1)^k\Big((z-k\pi)-\frac{1}{3!}(z-k\pi)^3+\cdots\Big)\\&=(-1)^k(z-k\pi)-\frac{(-1)^k}{3!}(z-k\pi)^3+\cdots\\&=(z-k\pi)\Big((-1)^k-\frac{(-1)^k}{3!}(z-k\pi)^2+\cdots\Big)\\&=(z-k\pi)q_1(z)\end{aligned}$$
με
$$q_1(z)=(-1)^k-\frac{(-1)^k}{3!}(z-k\pi)^2+\cdots.$$
Άρα ισχύει $\sin z=(z-k\pi)q_1(z)$ για κάθε z, όπου η συνάρτηση q_1 είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ (διότι η δυναμοσειρά που την ορίζει συγκλίνει για κάθε z) με $q_1(k\pi)=(-1)^k$. Παρατηρούμε ότι η q_1 είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ αλλά μηδενίζεται σε κάθε $l\pi$ με $l\in\mathbb{Z}$, $l\neq k$. Επομένως, ισχύει
$$\cot z=\frac{\cos z}{(z-k\pi)q_1(z)}=\frac{g(z)}{z-k\pi}$$
με
$$g(z)=\frac{\cos z}{q_1(z)}$$

και η g είναι αναλυτική στον δίσκο $D(k\pi;\pi)$ και $g(k\pi) = \frac{\cos(k\pi)}{q_1(k\pi)} = \frac{(-1)^k}{(-1)^k} = 1$.
Προσέξτε: ο δίσκος $D(k\pi;\pi)$ είναι ο μέγιστος δίσκος κέντρου $k\pi$ ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της g διότι είναι ο μέγιστος δίσκος κέντρου $k\pi$ ο οποίος δεν περιέχει καμία ρίζα της q_1.
Άρα το $k\pi$ είναι πόλος τάξης 1 της $\cot z$.
Για να βρούμε την σειρά Laurent της $\cot z$ στον δακτύλιο $D(k\pi;0,\pi)$ γράφουμε πρώτα την σειρά Taylor της g στο σημείο $k\pi$, δηλαδή

$$g(z) = 1 + g'(k\pi)(z-k\pi) + \frac{g''(k\pi)}{2!}(z-k\pi)^2 + \cdots \quad \text{για } z \in D(k\pi;\pi),$$

και μετά έχουμε

$$\cot z = \frac{g(z)}{z-k\pi} = \frac{1}{z-k\pi} + g'(k\pi) + \frac{g''(k\pi)}{2!}(z-k\pi) + \cdots \quad \text{για } z \in D(k\pi;0,\pi).$$

Άρα η $\frac{1}{z-k\pi} + g'(k\pi) + \frac{g''(k\pi)}{2!}(z-k\pi) + \cdots$ είναι η σειρά Laurent της $\cot z$ στον δακτύλιο $D(k\pi;0,\pi)$. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε ακριβώς τους συντελεστές πρέπει να βρούμε τις παραγώγους της g στο $k\pi$, αλλά αυτό δεν είναι εύκολο παρά μόνο για κάποιους αρχικούς συντελεστές.

Για τους πόλους έχουμε ένα κριτήριο παρόμοιο με το κριτήριο Riemann για τις αιρόμενες ανωμαλίες.

Πρόταση 7.17. *Έστω ότι το z_0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f. Τότε το z_0 είναι πόλος της f αν και μόνο αν $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*

Απόδειξη. Αν το z_0 είναι πόλος τάξης N της f, τότε από την Πρόταση 7.16 συνεπάγεται ότι υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική σε δίσκο $D(z_0;R)$, ώστε να ισχύει

$$g(z_0) \neq 0 \quad \text{και} \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}.$$

Από αυτό συνεπάγεται αμέσως ότι $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
Τότε υπάρχει r με $0 < r \leq R$ ώστε να ισχύει $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0;r)\setminus\{z_0\}$. Άρα η συνάρτηση

$$h(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \text{για } z \in D(z_0;r)\setminus\{z_0\} \tag{7.27}$$

είναι αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0;r)\setminus\{z_0\}$. Επειδή $\lim_{z\to z_0} h(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, από το κριτήριο Riemann έχουμε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της h, οπότε, αν ορίσουμε κατάλληλα την h στο z_0 θα γίνει αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;r)$. Επειδή η h θα πρέπει να είναι τουλάχιστον συνεχής στο z_0, θα πρέπει να ορίσουμε $h(z_0) = \lim_{z\to z_0} h(z) = 0$. Άρα η

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & \text{αν } z \in D(z_0;r)\setminus\{z_0\} \\ 0, & \text{αν } z = z_0 \end{cases}$$

είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;r)$.
Είναι προφανές ότι το z_0 είναι η μοναδική ρίζα της h στο $D(z_0;r)$ και, αν N είναι η πολλαπλότητα αυτής της ρίζας, τότε έχουμε

$$h(z) = (z-z_0)^N h_1(z) \quad \text{για } z \in D(z_0;r), \tag{7.28}$$

όπου η h_1 είναι αναλυτική στο $D(z_0;r)$ και δεν έχει καμία ρίζα στο $D(z_0;r)$. Άρα η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1}{h_1(z)} \quad \text{για } z \in D(z_0;r) \tag{7.29}$$

είναι αναλυτική στο $D(z_0;r)$ και, προφανώς, δεν μηδενίζεται πουθενά στο $D(z_0;r)$.
Τώρα, όμως, από τις (7.27), (7.28) και (7.29) έχουμε

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^N}\quad \text{για } z\in D(z_0;r)\setminus\{z_0\}$$

με $g(z_0)\neq 0$. Από την Πρόταση 7.16 προκύπτει ότι το z_0 είναι πόλος τάξης N της f. □

Υπάρχει ένα ακόμη κριτήριο για την περίπτωση πόλου, το οποίο, μάλιστα, καθορίζει και την τάξη του πόλου.

Πρόταση 7.18. *Έστω ότι το z_0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f. Τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $N\geq 1$ της f αν και μόνο αν το $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z)$ υπάρχει και είναι μιγαδικός $\neq 0$.*

Απόδειξη. Αν το z_0 είναι πόλος τάξης N της f, τότε, ακριβώς όπως στην αρχή της απόδειξης της Πρότασης 7.17, έχουμε ότι $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z)=\lim_{z\to z_0} g(z)=g(z_0)\neq 0$.
Αντιστρόφως, έστω ότι το $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z)$ είναι μιγαδικός $\neq 0$.
Τότε, βάσει του κριτηρίου Riemann, η συνάρτηση $g(z)=(z-z_0)^N f(z)$, η οποία είναι αναλυτική σε κάποιον δακτύλιο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$, επεκτείνεται και στο z_0, θέτοντας $g(z_0)=\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z)$, και η επεκτεταμένη g είναι αναλυτική στο $D(z_0;R)$.
Επομένως, υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική στο $D(z_0;R)$ με $g(z_0)\neq 0$ ώστε να ισχύει $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^N}$ για κάθε $z\in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$. Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 7.16, το z_0 είναι πόλος τάξης N της f. □

Και, τέλος, για την περίπτωση ουσιώδους ανωμαλίας έχουμε το εξής.

Πρόταση 7.19. *Έστω ότι το z_0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f. Τότε το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f αν και μόνο αν το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ δεν υπάρχει.*

Απόδειξη. Από το κριτήριο Riemann έχουμε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία αν και μόνο αν το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Στην Πρόταση 7.16 είδαμε ότι το z_0 είναι πόλος αν και μόνο αν το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι ∞. Άρα το συμπέρασμα είναι άμεσο. □

Παράδειγμα 7.7.3. Στο παράδειγμα 7.6.4 είδαμε ότι η $\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(-n)!}z^n+1$ είναι η σειρά Laurent της συνάρτησης $e^{1/z}$ στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)$. Άρα το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της $e^{1/z}$.
Επομένως, το $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$ δεν υπάρχει. Αυτό μπορούμε να το δούμε χωρίς να χρειάζεται να αποδείξουμε ότι το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της $e^{1/z}$. Μάλιστα, αν δούμε πρώτα ότι το $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$ δεν υπάρχει, τότε θα έχουμε μια άλλη απόδειξη του ότι το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της $e^{1/z}$.
Ας δούμε, λοιπόν. Αν το $z=x$ τείνει στο 0 πάνω στον θετικό πραγματικό ημιάξονα, τότε $|e^{1/z}|=e^{1/x}\to+\infty$, οπότε $e^{1/z}\to\infty$. Ενώ, αν το $z=x$ τείνει στο 0 πάνω στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα, τότε $|e^{1/z}|=e^{1/x}\to 0$, οπότε $e^{1/z}\to 0$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$.

Ασκήσεις.

7.7.1. Είναι το σημείο 0 μεμονωμένη ανωμαλία της $\frac{1}{\sin(1/z)}$;

7.7.2. Αποδείξτε ότι το 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\frac{\sin z}{z},\quad \frac{\sin z-z}{z^3},\quad \frac{z}{e^z-1},\quad z\cot z,\quad \frac{\mathrm{Log}(1-z)}{z}.$$

Πώς πρέπει να οριστούν αυτές οι συναρτήσεις στο σημείο 0 ώστε να είναι αναλυτικές σε ανοικτό δίσκο με κέντρο το 0, και ποιός είναι ο μεγαλύτερος τέτοιος δίσκος; Αφού οριστούν κατάλληλα στο 0 αυτές οι συναρτήσεις, ποιό είναι το μεγαλύτερο χωρίο στο οποίο θα είναι αναλυτικές;

7.7.3. Βρείτε τα σημεία μεμονωμένης (μη-αιρόμενης) ανωμαλίας των συναρτήσεων:

$$\frac{1}{z^2-1},\quad \frac{1}{(z^2-1)^2},\quad \frac{e^z-1}{z},\quad \frac{e^z-1}{z^3},\quad \frac{z^2}{\sin z},\quad \frac{1}{\cos z},\quad \frac{1}{(\sin z)^2},\quad e^z+e^{\frac{1}{z}},\quad \frac{1}{e^z-1}.$$

Κατατάξτε τα σημεία αυτά σε πόλους και σε ουσιώδεις ανωμαλίες. Σε περίπτωση πόλου βρείτε την τάξη του.

7.7.4. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$, και έστω u,v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f. Αν μία τουλάχιστον από τις u,v είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$, αποδείξτε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.

Υπόδειξη. Έστω $u(z)\le M$ για $0<|z-z_0|<R$. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο Riemann στη συνάρτηση $\frac{f(z)-M+1}{f(z)-M-1}$.

7.7.5. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $D(0;R)\setminus\{z_0\}$, όπου $R>1$ και $|z_0|=1$, και έστω ότι το z_0 είναι πόλος της f. Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ είναι η σειρά Taylor της f στον δίσκο $D(0;1)$, αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{a_{n+1}}\to z_0$.

Υπόδειξη. Είναι $f(z)=$ πολυώνυμο του $\frac{1}{z-z_0}+$ αναλυτική συνάρτηση στο $D(0;R)$.

7.7.6. Έστω ότι κάθε σημείο του χωρίου Ω είναι είτε σημείο αναλυτικότητας είτε μεμονωμένη ανωμαλία της συνάρτησης f. Αν το σύνολο των ριζών της f έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω, το οποίο δεν είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο Ω (και επομένως δεν υπάρχει καμιά μεμονωμένη ανωμαλία της f.)

7.7.7. Έστω ότι το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της συνάρτησης f και έστω τυχόν $w\in\mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r>0$ η συνάρτηση $\frac{1}{f-w}$ *δεν* είναι φραγμένη στον δακτύλιο $D(z_0;r)\setminus\{z_0\}$. Να συμπεράνετε ότι για κάθε w υπάρχει ακολουθία (z_n) με $z_n\to z_0$ και με $z_n\ne z_0$ για κάθε n ώστε να είναι $f(z_n)\to w$.

Κεφάλαιο 8

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

8.1 Δείκτης στροφής καμπύλης ως προς σημείο.

Θεωρούμε καμπύλη γ, δηλαδή συνεχή συνάρτηση

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C},$$

και υποθέτουμε, όπως έχουμε συμφωνήσει, ότι η γ είναι τμηματικά ομαλή. Ειδικώτερα, υπάρχουν σημεία $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$ ώστε $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, και ώστε η παράγωγος γ' να είναι συνεχής σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα (t_{k-1}, t_k) και τα πλευρικά όριά της σε κάθε t_k να είναι αριθμοί.

Θεωρούμε, επίσης, οποιοδήποτε σημείο

$$z \notin \gamma^* = \{\gamma(t) \,|\, t \in [a, b]\},$$

δηλαδή τέτοιο ώστε $z \neq \gamma(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$.

Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \quad \text{για } t \in [a, b].$$

Η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι τμηματικά συνεχής (ο αριθμητής είναι τμηματικά συνεχής και ο παρονομαστής είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται). Άρα το ολοκλήρωμα ορίζεται και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο t στο οποίο η $\frac{\gamma'}{\gamma - z}$ είναι συνεχής, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα (t_{k-1}, t_k). Επίσης, σε κάθε τέτοιο ανοικτό υποδιάστημα ισχύει

$$f'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

Εργαζόμενοι σε ένα τέτοιο υποδιάστημα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\big((\gamma(t) - z)e^{-f(t)}\big) = \gamma'(t)e^{-f(t)} - (\gamma(t) - z)f'(t)e^{-f(t)} = 0.$$

Άρα η συνάρτηση $(\gamma(t) - z)e^{-f(t)}$ είναι σταθερή σε κάθε υποδιάστημα (t_{k-1}, t_k) και η σταθερή τιμή της εξαρτάται από το k. Αλλά, επειδή η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής σε *ολόκληρο* το $[a, b]$, είναι σταθερή σε ολόκληρο το $[a, b]$. Δηλαδή, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{C}$ ώστε

$$(\gamma(t) - z)e^{-f(t)} = c \quad \text{για } t \in [a, b].$$

Αυτό το γράφουμε

$$ce^{f(t)} = \gamma(t) - z \quad \text{για } t \in [a, b]$$

και, επειδή πρέπει να είναι $c \neq 0$, οπότε υπάρχει $d \in \mathbb{C}$ ώστε $e^d = c$, έχουμε

$$e^{f(t)+d} = \gamma(t) - z \quad \text{για } \ t \in [a,b].$$

Τέλος, ορίζουμε την $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$g(t) = f(t) + d = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds + d \quad \text{για } t \in [a,b] \tag{8.1}$$

και έχουμε ότι

$$e^{g(t)} = \gamma(t) - z \quad \text{για } t \in [a,b].$$

Ο άμεσος στόχος μας είναι να καταλάβουμε το γεωμετρικό περιεχόμενο της συνάρτησης g.

Το πραγματικό μέρος του $g(t)$ είναι ίσο με $\ln|\gamma(t) - z|$ και, αν συμβολίσουμε $\theta(t)$ το φανταστικό μέρος του $g(t)$, έχουμε

$$g(t) = \ln|\gamma(t) - z| + i\theta(t), \tag{8.2}$$

όπου, για κάθε $t \in [a,b]$,

$\theta(t)$ είναι ένα από τα ορίσματα του μη-μηδενικού μιγαδικού αριθμού $\gamma(t) - z$.

Δηλαδή, για κάθε $t \in [a,b]$, το $\theta(t)$ είναι μία από τις γωνίες του διανύσματος $\gamma(t) - z$, το οποίο έχει αρχή το σταθερό σημείο z και καταλήγει στο σημείο $\gamma(t)$ πάνω στην τροχιά της καμπύλης.

Το σημαντικό είναι ότι *η συνάρτηση* $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[a,b]$, διότι είναι το φανταστικό μέρος της συνεχούς συνάρτησης $g : [a,b] \to \mathbb{C}$. Αυτό σημαίνει ότι: καθώς το t μεταβάλλεται στο $[a,b]$ και, επομένως, το σημείο $\gamma(t)$ μεταβάλλεται πάνω στην τροχιά της καμπύλης και, επομένως, το διάνυσμα $\gamma(t) - z$ περιστρέφεται γύρω από τη σταθερή αρχή του (δηλαδή το σημείο z) ακολουθώντας το σημείο $\gamma(t)$, τότε η γωνία $\theta(t)$ του $\gamma(t) - z$ μεταβάλλεται *με συνεχή τρόπο* (δηλαδή, χωρίς απότομα άλματα).

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι η συνάρτηση

$$\theta : [a,b] \to \mathbb{R},$$

η οποία ορίζεται μέσω των τύπων (8.1) και (8.2), είναι ένας **συνεχής κλάδος της γωνίας** της διανυσματικής συνάρτησης $\gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Επειδή το $\theta(t)$ είναι μία από τις γωνίες του διανύσματος $\gamma(t) - z$, αν πάρουμε οποιοδήποτε $k \in \mathbb{Z}$, τότε και το $\phi(t) = \theta(t) + 2k\pi$ είναι μία από τις γωνίες του διανύσματος $\gamma(t) - z$. Μάλιστα, αν το $k \in \mathbb{Z}$ δεν εξαρτάται από το $t \in [a,b]$ (δηλαδή, είναι σταθερό ως συνάρτηση του $t \in [a,b]$), τότε η συνάρτηση $\phi = \theta + 2k\pi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι κι αυτή ένας *συνεχής κλάδος της γωνίας* της διανυσματικής συνάρτησης $\gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}$. Αντιστρόφως, έστω ότι η συνάρτηση $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ένας *συνεχής κλάδος της γωνίας* της διανυσματικής συνάρτησης $\gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}$. Τότε για κάθε $t \in [a,b]$ η διαφορά $\phi(t) - \theta(t)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $k(t) = \frac{\phi(t) - \theta(t)}{2\pi}$. Η k είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ με πραγματικές τιμές, οπότε έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής. Επειδή οι τιμές της είναι ακέραιοι, συνεπάγεται ότι είναι σταθερή. Άρα υπάρχει ένα σταθερό $k \in \mathbb{Z}$ (δηλαδή ανεξάρτητο του $t \in [a,b]$) ώστε να ισχύει $\phi(t) - \theta(t) = 2k\pi$ για κάθε $t \in [a,b]$, και επομένως $\phi = \theta + 2k\pi$.

Επομένως, κάθε συνεχής κλάδος της γωνίας της διανυσματικής συνάρτησης $\gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι της μορφής

$$\phi = \theta + 2k\pi : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Τώρα προσέξτε: η διαφορά "τελική γωνία μείον αρχική γωνία" για τον συνεχή κλάδο θ και η διαφορά "τελική γωνία μείον αρχική γωνία" για οποιονδήποτε άλλο συνεχή κλάδο $\phi = \theta + 2k\pi$ είναι ίσες! Πράγματι:

$$\phi(b) - \phi(a) = (\theta(b) + 2k\pi) - (\theta(a) + 2k\pi) = \theta(b) - \theta(a).$$

Συνοψίζουμε:

Μέσω των τύπων (8.1) και (8.2) ορίζεται συνάρτηση $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής κλάδος της γωνίας της διανυσματικής συνάρτησης $\gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}$.
Ένας οποιοσδήποτε τέτοιος συνεχής κλάδος $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ της γωνίας της διανυσματικής συνάρτησης $\gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}$ διαφέρει από την $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ κατά σταθερό ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.
Η διαφορά $\phi(b) - \phi(a)$ είναι ανεξάρτητη της συγκεκριμένης επιλογής $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχούς κλάδου της γωνίας της διανυσματικής συνάρτησης $\gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Ορισμός. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και σημείο $z \notin \gamma^*$. Αν η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής κλάδος της γωνίας της διανυσματικής συνάρτησης $\gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}$, τότε η διαφορά $\phi(b) - \phi(a)$, δηλαδή η διαφορά "τελική γωνία μείον αρχική γωνία", αποτελεί ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z. Η διαφορά αυτή ονομάζεται* **συνολική μεταβολή γωνίας** *κατά μήκος της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z.*

Ας θεωρήσουμε τώρα την σημαντική ειδική περίπτωση που η καμπύλη γ είναι κλειστή, δηλαδή όταν $\gamma(b) = \gamma(a)$. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\gamma(b) - z$ και $\gamma(a) - z$ ταυτίζονται, οπότε $\ln|\gamma(b) - z| = \ln|\gamma(a) - z|$ και οι γωνίες $\theta(b)$ και $\theta(a)$ διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή, σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, η συνολική μεταβολή γωνίας κατά μήκος της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

Ορισμός. *Έστω κλειστή καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και σημείο $z \notin \gamma^*$. Αν η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής κλάδος της γωνίας της διανυσματικής συνάρτησης $\gamma - z : [a,b] \to \mathbb{C}$, τότε συμβολίζουμε*

$$\mathrm{ind}(\gamma; z) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi}.$$

Ο αριθμός $\mathrm{ind}(\gamma; z)$ είναι ακέραιος και δηλώνει με ποιό ακριβώς πολλαπλάσιο του 2π είναι ίση η συνολική μεταβολή γωνίας κατά μήκος της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z ή, με άλλα λόγια, τον αριθμό περιστροφών της καμπύλης γ γύρω από το z. Ο αριθμός $\mathrm{ind}(\gamma; z)$ ονομάζεται **δείκτης στροφής** *της γ ως προς το z.*

Αυτό το τελευταίο σχετικά με τον αριθμό περιστροφών της καμπύλης γ γύρω από το z μπορεί να το κατανοήσει κανείς αν δει απλά παραδείγματα, όπως μια κυκλική καμπύλη γύρω από ένα εσωτερικό της σημείο ή γύρω από ένα εξωτερικό της σημείο.

Τώρα θα εκμεταλευτούμε τους τύπους (8.1) και (8.2) για να βρούμε έναν απλό τύπο για τον δείκτη στροφής $\mathrm{ind}(\gamma; z)$ στην περίπτωση που η γ είναι κλειστή. Επειδή η γ είναι κλειστή και, επομένως, όπως είπαμε πιο πάνω, ισχύει $\ln|\gamma(b) - z| = \ln|\gamma(a) - z|$, από τον τύπο (8.2) έχουμε

$$g(b) - g(a) = i(\theta(b) - \theta(a)).$$

Επίσης, από τον τύπο (8.1) έχουμε

$$g(a) = \int_a^a \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds + d = d, \qquad g(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds + d,$$

οπότε

$$\mathrm{ind}(\gamma; z) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{g(b) - g(a)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds.$$

Τέλος, από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος έχουμε

$$\boxed{\mathrm{ind}(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta.}$$

Παράδειγμα 8.1.1. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και $r_0 > 0$, και έστω η κλειστή καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με τύπο $\gamma(t) = z_0 + r_0 e^{int}$.
Είναι σαφές ότι, αν $n \neq 0$ και το t διατρέχει το διάστημα $[0, 2\pi]$, τότε το $\gamma(t)$ διατρέχει $|n|$ φορές τον κύκλο $C(z_0; r_0)$, με τη θετική φορά αν $n > 0$, και με την αρνητική φορά αν $n < 0$. Αν $n = 0$, τότε το $\gamma(t)$ διατρέχει $|n| = 0$ φορές τον κύκλο $C(z_0; r_0)$, αφού μένει σταθερό στο ίδιο σημείο $z_0 + r_0$. Όλα αυτά πιστοποιούνται με τον εξής υπολογισμό:

$$\operatorname{ind}(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(z_0 + r_0 e^{int}) - z_0}\, r_0 i n e^{int}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\, in 2\pi = n.$$

Ορισμός. *Έστω κλειστή καμπύλη γ και $z \notin \gamma^*$. Λέμε ότι η γ* **περικλείει** *το z αν* $\operatorname{ind}(\gamma; z) \neq 0$.

Τρεις χρήσιμες ιδιότητες του δείκτη στροφής περιγράφονται στις επόμενες τρεις προτάσεις.

Πρόταση 8.1. *Έστω κλειστές καμπύλες γ_1 και γ_2 με τα ίδια άκρα, οπότε ορίζεται η κλειστή καμπύλη $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Έστω, επίσης, σημείο z το οποίο δεν ανήκει στις τροχιές των δύο καμπυλών, οπότε δεν ανήκει ούτε στην τροχιά της $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Τότε*

$$\operatorname{ind}(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2; z) = \operatorname{ind}(\gamma_1; z) + \operatorname{ind}(\gamma_2; z).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή:

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2; z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \operatorname{ind}(\gamma_1; z) + \operatorname{ind}(\gamma_2; z).\end{aligned}$$

□

Πρόταση 8.2. *Έστω κλειστή καμπύλη γ και η αντίθετη κλειστή καμπύλη $\neg\gamma$. Έστω, επίσης, σημείο z το οποίο δεν ανήκει στην κοινή τροχιά των δύο καμπυλών. Τότε*

$$\operatorname{ind}(\neg\gamma; z) = -\operatorname{ind}(\gamma; z).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι κι αυτή απλή:

$$\operatorname{ind}(\neg\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\neg\gamma} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = -\operatorname{ind}(\gamma; z).$$

□

Πρόταση 8.3. *Έστω γ μια κλειστή καμπύλη. Τότε η συνάρτηση* $\operatorname{ind}(\gamma; z)$, *ως συνάρτηση του z, είναι συνεχής στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, και είναι σταθερή σε κάθε χωρίο Ω το οποίο περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Απόδειξη. Είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 5.13 ότι η συνάρτηση

$$\operatorname{ind}(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

είναι συνεχής. Μάλιστα η συνάρτηση αυτή είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, και η παράγωγός της έχει τύπο

$$\frac{d \operatorname{ind}(\gamma; z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Επειδή η συνάρτηση $n(\gamma; z)$ έχει ακέραιες τιμές, το τελευταίο συμπέρασμα είναι άμεσο από το Πόρισμα 3.2. Το συμπέρασμα προκύπτει και από τον τύπο της παραγώγου: επειδή η $\frac{1}{(\zeta-z)^2}$, ως συνάρτηση του ζ, έχει παράγουσα την $-\frac{1}{\zeta-z}$, συνεπάγεται ότι

$$\frac{d\ \mathrm{ind}(\gamma; z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{(\zeta-z)^2}\, d\zeta = 0.$$

Έτσι η συνάρτηση $\mathrm{ind}(\gamma; z)$ έχει μηδενική παράγωγο στο χωρίο Ω, οπότε είναι σταθερή στο Ω. $\square$

Το τελευταίο συμπέρασμα της Πρότασης 8.3 διαβάζεται ως εξής:

Αν τα σημεία z_1, z_2 βρίσκονται στο ίδιο χωρίο το οποίο περιέχεται στο συμπλήρωμα της τροχιάς της κλειστής καμπύλης γ, τότε ο αριθμός περιστροφών της γ γύρω από το z_1 είναι ίδιος με τον αριθμό περιστροφών της γ γύρω από το z_2.

Η Πρόταση 8.3 είναι πολύ χρήσιμη όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τον δείκτη στροφής μιας κλειστής καμπύλης γ ως προς ένα σημείο z που δεν ανήκει στην τροχιά της. Αν μπορούμε να βρούμε ένα άλλο σημείο z' έτσι ώστε τα δυο σημεία z, z' να βρίσκονται στο ίδιο χωρίο το οποίο περιέχεται στο συμπλήρωμα της τροχιάς της γ και έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί εύκολα ο δείκτης στροφής της γ ως προς το z', τότε $\mathrm{ind}(\gamma; z) = \mathrm{ind}(\gamma; z')$. Έτσι, με έμμεσο τρόπο υπολογίζουμε εύκολα τον $\mathrm{ind}(\gamma; z)$.

Παράδειγμα 8.1.2. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και η κλειστή καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με τύπο $\gamma(t) = z_0 + r_0 e^{int}$ που είδαμε στο παράδειγμα 8.1.1. Αν $n \neq 0$, η τροχιά της γ είναι ο κύκλος $C(z_0; r_0)$ και το συμπλήρωμα της τροχιάς αποτελείται από ακριβώς δύο χωρία: τον δίσκο $D(z_0; r_0)$ και τον εξωτερικό δακτύλιο $D(z_0; r_0, +\infty)$.
Τότε

$$\mathrm{ind}(\gamma; z) = \mathrm{ind}(\gamma; z_0) = n \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0).$$

Παρατηρήστε ότι, αν πάρουμε $z \neq z_0$ και προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον δείκτη στροφής $\mathrm{ind}(\gamma; z)$ μέσω του τύπου $\mathrm{ind}(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{\zeta-z}\, d\zeta$ χρησιμοποιώντας την παραμετρική εξίσωση της γ, θα δυσκολευτούμε αρκετά. Όμως, ο ίδιος υπολογισμός στην περίπτωση του σημείου $z = z_0$ είναι απλούστατος και έγινε στο παράδειγμα 8.1.1.
Παρεμπιπτόντως, αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε z στον εξωτερικό δακτύλιο $D(z_0; r_0, +\infty)$, τότε ο υπολογισμός του $\mathrm{ind}(\gamma; z)$ μέσω του επικαμπύλιου ολοκληρώματος και της παραμετρικής εξίσωσης της γ δεν είναι απλός. Όμως, τώρα βλέπουμε ότι υπάρχει κάποια ημιευθεία L με κορυφή το z η οποία δεν τέμνει την τροχιά της γ. Δηλαδή η τροχιά της γ περιέχεται στο αστρόμορφο χωρίο $\mathbb{C} \setminus L$. Τώρα, το παράδειγμα 6.3.1, το οποίο είναι εφαρμογή του Γενικού Θεωρήματος Cauchy για αστρόμορφα χωρία, μας λέει χωρίς κανέναν υπολογισμό(!!) ότι

$$\mathrm{ind}(\gamma; z) = 0 \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r_0, +\infty).$$

Ασκήσεις.

8.1.1. Έστω ημιευθεία l με κορυφή το σημείο z, και ημιευθείες m_1, m_2 με κορυφή το z οι οποίες είναι αντίθετες και διαφορετικές από την l. Θεωρήστε οποιαδήποτε καμπύλη γ με αρχικό άκρο ένα σημείο $a_1 \in m_1$, $a_1 \neq z$, και τελικό άκρο ένα σημείο $a_2 \in m_2$, $a_2 \neq z$, η τροχιά της οποίας δεν τέμνει την ημιευθεία l. Βρείτε την συνολική μεταβολή γωνίας κατά μήκος της γ σε σχέση με το z.

8.1.2. Ποιές είναι όλες οι δυνατές τιμές του $\mathrm{ind}(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{\zeta-z}\, d\zeta$, όταν η γ είναι τυχούσα κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{z\}$;

8.1.3. Υπολογίστε όλες τις δυνατές τιμές του $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{2\zeta-1}{\zeta^2-\zeta}\, d\zeta$, όπου γ είναι τυχούσα κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

8.1.4. Θεωρήστε σημείο z και δυο (διαφορετικές) ημιευθείες l και m με κορυφή z. Θεωρήστε και σημείο a μέσα στη μία από τις δυο γωνίες που σχηματίζουν οι l, m, και σημείο b μέσα στην άλλη από τις δυο γωνίες που σχηματίζουν οι l, m. Θεωρήστε καμπύλη γ_1 με αρχικό άκρο a και τελικό άκρο b, η τροχιά της οποίας δεν τέμνει την ημιευθεια l, και καμπύλη γ_2 με αρχικό άκρο b και τελικό άκρο a, η τροχιά της οποίας δεν τέμνει την ημιευθεία m. Τέλος, θεωρήστε την κλειστή καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$, και αποδείξτε ότι

$$\mathrm{ind}(\gamma; z) = \pm 1.$$

Το πρόσημο εξαρτάται από το ποιά γωνία περιέχει το a και ποιά το b.

8.1.5. Έστω κλειστές καμπύλες γ_1 και γ_2 και σημείο z το οποίο δεν ανήκει στις τροχιές των δυο καμπυλών. Υποθέτουμε τα εξής: υπάρχουν διαδοχικά σημεία $w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, w_{n+1}^{(1)} = w_1^{(1)}$ της γ_1 και (ίδιου πλήθους) "αντίστοιχα" διαδοχικά σημεία $w_1^{(2)}, \ldots, w_n^{(2)}, w_{n+1}^{(2)} = w_1^{(2)}$ της γ_2 και καμπύλες $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1} = \sigma_1$ έτσι ώστε κάθε σ_j να έχει αρχικό σημείο το $w_j^{(1)}$ και τελικό σημείο το $w_j^{(2)}$ και έτσι ώστε, για κάθε $j = 1, \ldots, n$, το τμήμα της γ_1 που είναι ανάμεσα στα $w_j^{(1)}, w_{j+1}^{(1)}$ και το τμήμα της γ_2 που είναι ανάμεσα στα $w_j^{(2)}, w_{j+1}^{(2)}$ και η σ_j και η σ_{j+1} να είναι όλες μαζί σε ένα αντίστοιχο αστρόμορφο υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus \{z\}$.
Μετά από όλες αυτές τις υποθέσεις, αποδείξτε ότι

$$\mathrm{ind}(\gamma_1; z) = \mathrm{ind}(\gamma_2; z).$$

8.1.6. Έστω χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αποδείξτε ότι στο Ω ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου αν και μόνο αν ισχύει $\mathrm{ind}(\gamma; 0) = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω.

8.2 Οι τύποι Cauchy για γενικές καμπύλες σε αστρόμορφα χωρία.

Τύπος Cauchy για γενικές καμπύλες σε αστρόμορφα χωρία. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο αστρόμορφο χωρίο Ω. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω ισχύει*

$$\mathrm{ind}(\gamma; z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in \Omega \setminus \gamma^*.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη γ στο Ω και ένα σημείο z στο Ω και όχι πάνω στην τροχιά της γ.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{αν } \zeta \in \Omega, \zeta \neq z \\ f'(z), & \text{αν } \zeta = z \end{cases}$$

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο Ω και είναι αναλυτική στο Ω εκτός, ίσως, στο σημείο z. Πράγματι, οι $f(\zeta) - f(z)$ και $\zeta - z$ είναι, ως συναρτήσεις του ζ, αναλυτικές στο $\Omega \setminus \{z\}$ και η δεύτερη δεν μηδενίζεται στο $\Omega \setminus \{z\}$. Άρα και η $g(\zeta)$ είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z\}$.
Τώρα, στο z η $g(\zeta)$ είναι συνεχής, διότι

$$\lim_{\zeta \to z} g(\zeta) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z) = g(z).$$

Από το κριτήριο Riemann για αιρόμενες ανωμαλίες συνεπάγεται ότι η συνάρτηση g είναι αναλυτική στο Ω. Τώρα από το Γενικό Θεώρημα Cauchy για αστρόμορφα χωρία συνεπάγεται

$$\oint_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{8.3}$$

Επειδή το z δεν ανήκει στην τροχιά της γ, όταν το σημείο ζ διατρέχει την τροχιά της γ οι αντίστοιχες τιμές $g(\zeta)$ δίνονται από τον τύπο $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$, οπότε η (8.3) γίνεται

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Συνεπάγεται

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \,\operatorname{ind}(\gamma; z)\, f(z).$$

$\square$

Τύπος Cauchy για παραγώγους και γενικές καμπύλες σε αστρόμορφα χωρία. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο αστρόμορφο χωρίο Ω. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\operatorname{ind}(\gamma; z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \textit{για κάθε } z \in \Omega \setminus \gamma^*.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη γ στο Ω και ένα σημείο z_0 στο Ω και όχι πάνω στην τροχιά της γ. Θεωρούμε και έναν ανοικτό δίσκο $D(z_0; r)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω και δεν τέμνει την τροχιά γ^* της γ. Τότε

$$\operatorname{ind}(\gamma; z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Ο δίσκος $D(z_0; r)$ είναι χωρίο και, επειδή περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, από την Πρόταση 8.3 συνεπάγεται ότι ο δείκτης στροφής $\operatorname{ind}(\gamma; z)$ είναι σταθερός στον δίσκο $D(z_0; r)$, οπότε $\operatorname{ind}(\gamma; z) = \operatorname{ind}(\gamma; z_0)$ για κάθε $z \in D(z_0; r)$. Άρα

$$\operatorname{ind}(\gamma; z_0)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Τώρα παραγωγίζουμε την τελευταία σχέση ως προς z, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.13, και βρίσκουμε

$$\operatorname{ind}(\gamma; z_0)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Αυτό ισχύει ειδικώτερα για $z = z_0$, οπότε

$$n(\gamma; z_0)\, f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Επειδή το z_0 είναι τυχόν σημείο του $\Omega \setminus \gamma^*$, η απόδειξη έχει τελειώσει. $\square$

Ασκήσεις.

8.2.1. Χρησιμοποιώντας τους τύπους Cauchy, υπολογίστε συναρτήσει του $\operatorname{ind}(\gamma; 0)$ τα ολοκληρώματα:

$$\oint_\gamma \frac{e^{i\zeta}}{\zeta^2}\, d\zeta, \quad \oint_\gamma \frac{\sin\zeta}{\zeta^4}\, d\zeta, \quad \oint_\gamma \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{\zeta^4}\, d\zeta.$$

8.2.2. Έστω $f(z) = (\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3})e^z$ για $z \neq 0$, όπου a είναι σταθερά. Βρείτε όλες τις τιμές του a ώστε να είναι $\oint_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

8.3 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

Ορισμός. *Έστω μεμονωμένη ανωμαλία* z_0 *της* f*, και έστω* $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *η σειρά Laurent της* f *σε δακτύλιο* $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$*. Τότε ο συντελεστής* a_{-1} *ονομάζεται* **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** *της* f *στο* z_0*, και συμβολίζεται* $\mathrm{Res}(f; z_0)$*. Δηλαδή,*

$$\boxed{\mathrm{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} f(\zeta)\, d\zeta \quad \text{για } 0 < r < R.}$$

Αν το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, οπότε η f μπορεί να θεωρηθεί, εκ των υστέρων, αναλυτική στο z_0, τότε ισχύει $a_n = 0$ για κάθε $n < 0$ και, επομένως και για $n = -1$, οπότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 είναι μηδέν. Μπορεί, όμως, το z_0 να είναι πόλος ή και ουσιώδης ανωμαλία της f και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο να είναι μηδέν.

Παράδειγμα 8.3.1. Κάθε συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^N}$ με $N \geq 2$ έχει ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με 0 στο z_0.
Αυτό ισχύει διότι είναι προφανές ότι η σειρά Laurent της f στο z_0 αποτελείται από έναν μόνο όρο, τον $\frac{1}{(z-z_0)^N}$, οπότε ο συντελεστής του $\frac{1}{z-z_0}$ είναι ίσος με 0. Αλλά και από το παράδειγμα 6.1.3 καθώς και την άσκηση 4.4.8 γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0;r)} \frac{1}{(\zeta - z_0)^N}\, d\zeta = 0.$$

Παράδειγμα 8.3.2. Αν το z_0 είναι πόλος της f, τότε μπορούμε να βρούμε "σχετικά εύκολα" το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0. Είδαμε ότι, αν το z_0 είναι πόλος τάξης N, τότε υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική σε κάποιον δίσκο $D(z_0; R)$ ώστε να ισχύει

$$g(z_0) \neq 0 \quad \text{και} \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Αν η f δίνεται σ' αυτήν την μορφή, τότε αναπτύσσοντας την σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ της g, όπως κάναμε μέσα στην απόδειξη της Πρότασης 7.16, βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = b_{N-1} = \frac{g^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!}.$$

Για παράδειγμα, αν το z_0 είναι πόλος τάξης 1, τότε $\mathrm{Res}(f; z_0) = g(z_0)$ και, αν το z_0 είναι πόλος τάξης 2, τότε $\mathrm{Res}(f; z_0) = g'(z_0)$.

Παράδειγμα 8.3.3. Ειδική περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε στο παράδειγμα 7.7.2 όταν $M = 0$, δηλαδή όταν στην συνάρτηση $f = \frac{p}{q}$ το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας N της αναλυτικής συνάρτησης q και ρίζα μηδενικής πολλαπλότητας της αναλυτικής συνάρτησης p (δηλαδή $p(z_0) \neq 0$). Τότε είναι $q(z) = (z-z_0)^N q_1(z)$, όπου q_1 είναι μια άλλη αναλυτική συνάρτηση με $q_1(z_0) \neq 0$. Η συνάρτηση $g = \frac{p}{q_1}$ είναι αναλυτική στο z_0 και δεν μηδενίζεται στο z_0, και για κάποιο $R > 0$ ισχύει

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, είναι

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{g^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!}.$$

Αν $N = 1$ (οπότε το z_0 είναι πόλος τάξης 1 της f), τότε

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = g(z_0) = \frac{p(z_0)}{q_1(z_0)}.$$

Παραγωγίζοντας την ισότητα $q(z) = (z - z_0)q_1(z)$ βρίσκουμε

$$q'(z) = q_1(z) + (z - z_0)q_1'(z),$$

οπότε με $z = z_0$ έχουμε ότι $q_1(z_0) = q'(z_0)$, και άρα

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Αν $N = 2$ (οπότε το z_0 είναι πόλος τάξης 2 της f), τότε

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = g'(z_0) = \frac{p'(z_0)q_1(z_0) - p(z_0)q_1'(z_0)}{(q_1(z_0))^2}.$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές την $q(z) = (z - z_0)^2 q_1(z)$, βρίσκουμε

$$q''(z) = 2q_1(z) + 4(z - z_0)q_1'(z) + (z - z_0)^2 q_1''(z),$$

οπότε με $z = z_0$ έχουμε $q_1(z_0) = (1/2)q''(z_0)$. Παραγωγίζοντας και τρίτη φορά την $q(z) = (z - z_0)^2 q_1(z)$, βρίσκουμε ότι

$$q'''(z) = 6q_1'(z) + 6(z - z_0)q_1''(z) + (z - z_0)^2 q_1'''(z)$$

και με $z = z_0$ παίρνουμε $q_1'(z_0) = (1/6)q'''(z_0)$. Άρα

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{(1/2)p'(z_0)q''(z_0) - (1/6)p(z_0)q'''(z_0)}{(1/4)q''(z_0)^2}.$$

Παρόμοιους τύπους έχουμε για $N \geq 3$. Εννοείται ότι δεν αποστηθίζουμε κανέναν από αυτούς τους τύπους.

Ας υποθέσουμε, όπως στον ορισμό, ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f, και έστω $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ η σειρά Laurent της f σε δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$. Συμβολίζουμε

$$s(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n, \quad h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{8.4}$$

οπότε ισχύει

$$f(z) = s(z) + h(z) \quad \text{για } z \in D(z_0; 0, R).$$

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς που ορίζει την s είναι η εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου $D(z_0; 0, R)$, και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς που ορίζει την h είναι η εξωτερική ακτίνα του $D(z_0; 0, R)$. Άρα η συνάρτηση s είναι αναλυτική στο $D(z_0; 0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, και η συνάρτηση h είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0; R)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι οι συναρτήσεις f και s έχουν και οι δύο μεμονωμένη ανωμαλία το σημείο z_0, και ότι η διαφορά τους, δηλαδή η $f - s = h$, ορίζεται μεν στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$, αλλά η ανωμαλία που παρουσιάζει στο z_0 είναι αιρόμενη.

Ορισμός. *Η συνάρτηση s ονομάζεται* **ιδιάζον μέρος** *της f στην μεμονωμένη ανωμαλία z_0.*

Και κάτι ακόμη. Έστω ότι έχουμε και μια κλειστή καμπύλη γ η τροχιά της οποίας δεν περιέχει το z_0. Τότε, επειδή ακριβώς η τροχιά γ^* είναι συμπαγές σύνολο και περιέχεται στον δακτύλιο σύγκλισης της δυναμοσειράς που ορίζει την s, το γ^* περιέχεται σε κάποιον κλειστό δακτύλιο γνήσια μικρότερο από τον δακτύλιο σύγκλισης, οπότε η δυναμοσειρά της s στην (8.4) συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο γ^*. Άρα η εναλλαγή σειράς και ολοκληρώματος στον παρακάτω υπολογισμό είναι επιτρεπτή, και βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma s(z)\,dz = \sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{a_n}{2\pi i}\oint_\gamma (z - z_0)^n\,dz = \frac{a_{-1}}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = \mathrm{ind}(\gamma; z_0)a_{-1}.$$

Άρα

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma s(z)\,dz = \mathrm{ind}(\gamma; z_0)\ \mathrm{Res}(f; z_0).} \tag{8.5}$$

Ασκήσεις.

8.3.1. Βρείτε τα ιδιάζοντα μέρη των σειρών Laurent καθώς και τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων

$$\frac{1}{z^2+5z+6}, \quad \frac{1}{(z^2-1)^2}, \quad e^z+e^{1/z}, \quad \frac{\cos z-1}{z^3}, \quad \frac{\cos z-1}{z^4},$$
$$\frac{\sin z}{z^4}, \quad \frac{\cos z}{z^4}, \quad \frac{1-e^{2z}}{z^5}, \quad \frac{e^{3z}}{(z-1)^4}, \quad z^5e^{1/z}+e^{1/(z-1)}.$$

στις μεμονωμένες (μη-αιρόμενες) ανωμαλίες τους.

8.3.2. Βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων

$$\frac{1}{\sin z}, \quad \tan z, \quad \frac{1}{\sin^2 z}, \quad \frac{1}{e^z-1}, \quad \frac{1}{z^2(e^z-e^{-z})}.$$

στις μεμονωμένες (μη-αιρόμενες) ανωμαλίες τους.

8.4 Το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων.

Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων. *Έστω αστρόμορφο χωρίο Ω, και $z_1, \dots, z_N \in \Omega$, και έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$. Δηλαδή τα $z_1, \dots, z_N$ είναι μεμονωμένες ανωμαλίες της f στο Ω. Επίσης, έστω κλειστή καμπύλη γ στο Ω η τροχιά της οποίας δεν περιέχει καμία μεμονωμένη ανωμαλία της f. Τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{ind}(\gamma; z_k)\ \mathrm{Res}(f; z_k).$$

Απόδειξη. Παίρνουμε την τυχούσα μεμονωμένη ανωμαλία z_k της f και το αντίστοιχο ιδιάζον μέρος s_k της f. Αυτό σημαίνει ότι το z_k είναι αιρόμενη ανωμαλία της $f-s_k$ και ότι η s_k είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ και άρα και στο $\Omega \setminus \{z_k\}$.
Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση

$$F = f - (s_1 + \cdots + s_N).$$

Είναι σαφές ότι η F είναι αναλυτική στο Ω εκτός από τα σημεία $z_1, \dots, z_N$.
Αν γράψουμε

$$F = (f-s_k) - (s_1 + \cdots + s_{k-1} + s_{k+1} + \cdots + s_N),$$

βλέπουμε ότι η F παρουσιάζει αιρόμενη ανωμαλία στο z_k, αφού η $f-s_k$ παρουσιάζει αιρόμενη ανωμαλία στο z_k και όλες οι $s_1, \dots, s_N$ εκτός της s_k είναι αναλυτικές στο z_k.
Άρα η F μπορεί να ορισθεί και στα σημεία $z_1, \dots, z_N$ έτσι ώστε να είναι αναλυτική στο Ω. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε ότι η F είναι αναλυτική στο Ω.
Τώρα, επειδή το Ω είναι αστρόμορφο, ισχύει

$$\oint_\gamma F(z)\,dz = 0.$$

Συνεπάγεται

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma s_1(z)\,dz + \cdots + \oint_\gamma s_N(z)\,dz.$$

Τώρα, εφαρμόζοντας την (8.5) στις $s_1, \dots, s_N$ και στα αντίστοιχα σημεία $z_1, \dots, z_N$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\,dz = \mathrm{ind}(\gamma; z_1)\ \mathrm{Res}(f; z_1) + \cdots + \mathrm{ind}(\gamma; z_N)\ \mathrm{Res}(f; z_N).$$

□

Ανεξάρτητα από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, αλλά χρησιμοποιώντας την τεχνική της απόδειξής του, θα αναφερθούμε στην γνωστή μας ανάλυση ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα.

Ανάλυση ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα. *Έστω ρητή συνάρτηση $r = \frac{p}{q}$, όπου τα πολυώνυμα p, q δεν έχουν κοινούς παράγοντες, ο βαθμός του p είναι N, ο βαθμός του q είναι M, και $z_1, \dots, z_n$ είναι οι ρίζες του q με αντίστοιχες πολλαπλότητες $m_1, \dots, m_n$. Τότε είναι*

$$r(z) = p_1\Big(\frac{1}{z - z_1}\Big) + \cdots + p_n\Big(\frac{1}{z - z_n}\Big) + p_0(z),$$

όπου $p_1, \dots, p_n$ είναι πολυώνυμα βαθμών $m_1, \dots, m_n$ αντιστοίχως και χωρίς σταθερούς όρους, και το p_0 είναι, είτε το μηδενικό πολυώνυμο αν $N < M$, είτε ένα πολυώνυμο βαθμού $N - M$ αν $N \geq M$.

Απόδειξη. Κάθε ρίζα z_k αποτελεί πόλο τάξης m_k της r. Πράγματι, ισχύει $q(z) = (z-z_k)^{m_k} q_k(z)$, όπου το q_k είναι πολυώνυμο με $q_k(z_k) \neq 0$. Λόγω συνέχειας, το q_k δεν μηδενίζεται κοντά στο z_k, οπότε η $g_k = \frac{p}{q_k}$ είναι αναλυτική στο z_k και ισχύει $r(z) = \frac{g_k(z)}{(z-z_k)^{m_k}}$ κοντά στο z_k καθώς και $g_k(z_k) = \frac{p(z_k)}{q_k(z_k)} \neq 0$.
Άρα η σειρά Laurent της r κοντά στο z_k έχει τη μορφή

$$\frac{a_{-m_k}}{(z - z_k)^{m_k}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_k} + a_0 + a_1(z - z_k) + \cdots = p_k\Big(\frac{1}{z - z_k}\Big) + h_k(z),$$

όπου $p_k(w)$ είναι το πολυώνυμο $a_{-m_k} w^{m_k} + \cdots + a_{-1} w$ και η συνάρτηση h_k είναι αναλυτική στο z_k. Επειδή $a_{-m_k} \neq 0$, το πολυώνυμο p_k είναι βαθμού m_k και, επίσης, το p_k δεν έχει σταθερό όρο.
Το ιδιάζον μέρος της f στο z_k είναι η συνάρτηση $s_k(z) = p_k\big(\frac{1}{z-z_k}\big)$.
Τώρα, ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων, βλέπουμε ότι η συνάρτηση

$$p_0 = r - (s_1 + \cdots + s_n)$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.
Όμως, όλες οι συναρτήσεις $r, s_1, \dots, s_n$ είναι ρητές και άρα η p_0 είναι κι αυτή ρητή συνάρτηση. Μάλιστα, επειδή η p_0 είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, είναι πολυώνυμο. Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις.
Αν $N < M$, τότε $\lim_{z\to\infty} r(z) = 0$ και, επειδή $\lim_{z\to\infty} s_k(z) = 0$ για κάθε k, συνεπάγεται ότι $\lim_{z\to\infty} p_0(z) = 0$. Άρα το p_0 είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
Αν $N \geq M$, τότε το $c = \lim_{z\to\infty} \frac{r(z)}{z^{N-M}}$ είναι μιγαδικός $\neq 0$. Επειδή $\lim_{z\to\infty} \frac{s_k(z)}{z^{N-M}} = 0$ για κάθε k, συνεπάγεται ότι το $\lim_{z\to\infty} \frac{p_0(z)}{z^{N-M}}$ είναι ίσο με c, δηλαδή μιγαδικός $\neq 0$. Άρα το πολυώνυμο p_0 έχει βαθμό $N - M$. $\square$

Ασκήσεις.

8.4.1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\oint_{C(0;1)} e^{1/z}\, dz, \quad \oint_{C(0;2)} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)}\, dz, \quad \oint_{C(0;1)} z^4 e^{1/z}\, dz, \quad \oint_{C(0;2)} \frac{z^4}{1 - z^3}\, dz,$$

$$\oint_{C(0;\pi)} \tan z\, dz, \quad \oint_{C(0;3\pi/2)} \frac{1}{e^z - e^{-z}}\, dz.$$

8.4.2. Αν $z_1, \dots, z_N \in D(0; R)$, και η f είναι αναλυτική σε ένα χωρίο το οποίο περιέχει τον δίσκο $\overline{D}(0; R)$, υπολογίστε το

$$\oint_{C(0;R)} \frac{f(z)}{(z - z_1)\cdots(z - z_N)}\, dz.$$

8.4.3. Έστω ρητή συνάρτηση $r = \frac{p}{q}$ και έστω ότι ο βαθμός του πολυωνύμου q υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου p κατά τουλάχιστον δύο μονάδες. Αν $z_1, \dots, z_N$ είναι οι (ανά δύο διαφορετικές) ρίζες του q αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(r; z_k) = 0.$$

Με τί ισούται το $\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(r; z_k)$ αν ο βαθμός του q υπερβαίνει τον βαθμό του p κατά μία μονάδα;
Υπόδειξη. Θεωρήστε κύκλο $C(0; R)$ με μεγάλο R ώστε οι ρίζες του q να περιέχονται στον $D(0; R)$, και εφαρμόστε το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων. Μετά πάρτε όριο όταν $R \to +\infty$.

8.4.4. Αν $f(z) = e^{z+(1/z)}$, αποδείξτε ότι $\mathrm{Res}(f; 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$.
Υπόδειξη. Γράψτε $\mathrm{Res}(f; 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0;1)} f(z)\, dz$ και σκεφτείτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $e^{1/z}$ στον κύκλο $C(0; 1)$.

8.4.5. (i) Αν $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $M \geq 0$ *ανεξάρτητο του* n ώστε να ισχύει $|\cot z| \leq M$ για κάθε $z \in R_n$, όπου R_n είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $\pm(n + \frac{1}{2})\pi \pm i(n + \frac{1}{2})\pi$.
(ii) Αν γ_n είναι η κλειστή καμπύλη η οποία διαγράφει μία φορά με την θετική φορά διαγραφής το τετράγωνο R_n, αποδείξτε ότι $\oint_{\gamma_n} \frac{\cot z}{z^2}\, dz \to 0$ όταν $n \to +\infty$.
Αποδείξτε ότι

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

(iii) Έστω f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ εκτός από πόλους $z_1, \dots, z_N$ κανένας από τους οποίους δεν είναι ακέραιος. Έστω επίσης $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(k) = -\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f(z) \cot z; z_j).$$

Αν $a \neq 0$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}.$$

Αν $a \notin \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k + a)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi a))^2}.$$

8.5 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων.

Το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων είναι ένα ισχυρότατο εργαλείο υπολογισμού ολοκληρωμάτων, διότι ανάγει αυτόν τον υπολογισμό στην εύρεση των μεμονωμένων ανωμαλιών της ολοκληρωτέας συνάρτησης, στον υπολογισμό των αντίστοιχων ολοκληρωτικών υπολοίπων και στον εντοπισμό του αριθμού περιστροφών μιας καμπύλης γύρω από κάθε μεμονωμένη ανωμαλία. Σε αρκετές περιπτώσεις όλα αυτά είναι αρκετά εύκολα. Ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.5.1. *Υπολογισμός του γενικευμένου ολοκληρώματος* $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\, dx$ *ρητής συνάρτησης* $r = \frac{p}{q}$ *όταν ο βαθμός του πολυωνύμου* q *υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου* p *κατά τουλάχιστον δύο μονάδες, και το* q *δεν έχει πραγματικές ρίζες.*
Έστω, λοιπόν, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$, και $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ με

$b_m \neq 0$, και έστω $m \geq n+2$.
Η r είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμά της στο $\mathbb{R}$ συγκλίνει. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to\infty} \frac{p(z)}{a_n z^n} = 1,$$

οπότε υπάρχει $R_0' > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{2} \leq |\frac{p(z)}{a_n z^n}| \leq 2$ ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n \quad \text{για } |z| \geq R_0'.$$

Ομοίως, υπάρχει $R_0'' > 0$ ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{2}|b_m||z|^m \leq |q(z)| \leq 2|b_m||z|^m \quad \text{για } |z| \geq R_0''.$$

Παίρνοντας $R_0 = \max\{R_0', R_0''\}$, έχουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}|b_m||z|^m \leq |q(z)| \leq 2|b_m||z|^m \quad \text{για } |z| \geq R_0,$$

και άρα ισχύει

$$|r(z)| \leq 4\frac{|a_n|}{|b_m|}\frac{1}{|z|^{m-n}} = \frac{C}{|z|^{m-n}} \quad \text{για } |z| \geq R_0, \tag{8.6}$$

όπου $C = 4\frac{|a_n|}{|b_m|}$ είναι μια σταθερά.
Επομένως, για πραγματικό $z = x$ και επειδή $m - n \geq 2$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{-R_0} |r(x)|\,dx \leq C\int_{-\infty}^{-R_0} \frac{1}{|x|^{m-n}}\,dx < +\infty,$$

$$\int_{R_0}^{+\infty} |r(x)|\,dx \leq C\int_{R_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{m-n}}\,dx < +\infty.$$

Άρα τα $\int_{-\infty}^{-R_0} r(x)\,dx$, $\int_{R_0}^{+\infty} r(x)\,dx$ συγκλίνουν απολύτως και, επομένως, συγκλίνουν. Επίσης η r είναι συνεχής στο $[-R_0, R_0]$ και άρα το $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ συγκλίνει.
Οι ρίζες του πολυωνύμου q περιέχονται είτε στο άνω είτε στο κάτω ημιεπίπεδο (που ορίζονται από τον x-άξονα). Στα επόμενα λαμβάνουμε υπ' όψη μόνο τις ρίζες που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο, και έστω ότι αυτές είναι οι $z_1, \ldots, z_M$. Κατόπιν, θεωρούμε τυχόν R έτσι ώστε να είναι $R > R_0$ και ώστε όλες οι ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ να βρίσκονται στον δίσκο $D(0; R)$. Θεωρούμε, λοιπόν,

$$R > \max\{R_0, |z_1|, \ldots, |z_M|\}.$$

Τώρα εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων στο αστρόμορφο χωρίο $\mathbb{C}$, στην συνάρτηση $r = \frac{p}{q}$, η οποία είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ αν από αυτό αφαιρέσουμε όλες τις ρίζες του q, και στην κλειστή καμπύλη γ_R η οποία αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$ με παραμετρική εξίσωση $z = x$ για $x \in [-R, R]$ και από το τόξο $\mathrm{arc}(R, -R)$ με παραμετρική εξίσωση $z = Re^{it}$ για $t \in [0, \pi]$.
Στην τροχιά της γ_R δεν περιέχεται καμία από τις μεμονωμένες ανωμαλίες της r. Όταν υπολογίσουμε το άθροισμα των $\mathrm{ind}(\gamma_R; z)\,\mathrm{Res}(r; z)$ για όλες τις μεμονωμένες ανωμαλίες z της r, θα λάβουμε υπ' όψη μόνο τις μεμονωμένες ανωμαλίες με $\mathrm{ind}(\gamma_R; z) \neq 0$. Αυτές, όμως, είναι ακριβώς οι ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ του q που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Μάλιστα η γ_R περιστρέφεται ακριβώς μία φορά γύρω από καθεμιά από αυτές τις ρίζες:

$$\mathrm{ind}(\gamma_R; z_1) = \ldots = \mathrm{ind}(\gamma_R; z_M) = 1.$$

Άρα το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων λέει ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R} r(z)\,dz = \mathrm{Res}(r;z_1)+\cdots+\mathrm{Res}(r;z_M).$$

Κατόπιν, γράφουμε

$$\oint_{\gamma_R} r(z)\,dz = \int_{[-R,R]} r(z)\,dz + \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\,dz$$

και άρα

$$\int_{-R}^{R} r(x)\,dx = \int_{[-R,R]} r(z)\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(r;z_1)+\cdots+\mathrm{Res}(r;z_M)\big) - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\,dz. \quad (8.7)$$

Και τώρα, επειδή $R > R_0$, εκτιμάμε το τελευταίο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας την (8.6), ως εξής:

$$\Big|\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\,dz\Big| \leq \frac{C}{R^{m-n}}\,\pi R = \frac{C\pi}{R^{m-n-1}}.$$

Επειδή $m-n-1 \geq 1$, έχουμε ότι

$$\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\,dz \to 0 \quad \text{όταν } R \to +\infty.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $R \to +\infty$ στην (8.7) και επειδή το $2\pi i(\mathrm{Res}(r;z_1)+\cdots+\mathrm{Res}(r;z_M))$ είναι ανεξάρτητο του $R > \max\{R_0, |z_1|, \ldots, |z_M|\}$, βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(r;z_1)+\cdots+\mathrm{Res}(r;z_M)\big).}$$

Άρα το μόνο που απομένει είναι να βρούμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της r στις ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ του q οι οποίες βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο.
Παρεμπιπτόντως, η $r = \frac{p}{q}$ είναι ρητή συνάρτηση και, όπως είδαμε στο παράδειγμα 7.7.2, όλες οι μεμονωμένες ανωμαλίες της (δηλαδή οι ρίζες του q) είναι πόλοι.
Ας δούμε μερικά πολύ συγκεκριμένα παραδείγματα.
(i) Έστω $r(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Οι ρίζες του πολυωνύμου $q(z) = z^2+1$ είναι τα $\pm i$, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το $\mathrm{Res}(r;i)$.
Είναι $r(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$, οπότε το i είναι πόλος τάξης 1 της r. Γράφουμε $r(z) = \frac{1/(z+i)}{z-i} = \frac{g(z)}{z-i}$, και τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε κατ' ευθείαν το αποτέλεσμα του παραδείγματος 8.3.2 με την $g(z) = \frac{1}{z+i}$, και να βρούμε ότι $\mathrm{Res}(r;i) = g(i) = \frac{1}{2i}$. Προτιμώ να μην θυμάμαι αυτόν τον τύπο και να καταφεύγω στο ανάπτυγμα της g ως δυναμοσειρά. Η σειρά Taylor της $g(z) = \frac{1}{z+i}$ με κέντρο το i είναι η

$$g(z) = g(i) + g'(i)(z-i) + \frac{g''(i)}{2}(z-i)^2 + \cdots.$$

Επομένως, η σειρά Laurent της r με κέντρο το i γράφεται

$$r(z) = \frac{g(z)}{z-i} = \frac{g(i)}{z-i} + g'(i) + \frac{g''(i)}{2}(z-i) + \cdots.$$

Άρα $\mathrm{Res}(r;i) = g(i) = \frac{1}{2i}$ και, επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(r;i) = \pi.$$

(ii) Έστω $r(x)=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$. Οι ρίζες του πολυωνύμου $q(z)=(z^2+1)(z^2+4)$ είναι τα $\pm i$ και τα $\pm 2i$, οπότε πρέπει να βρούμε τα $\mathrm{Res}(r;i)$ και $\mathrm{Res}(r;2i)$.
Είναι $r(z)=\frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$, οπότε τα $i,2i$ είναι πόλοι τάξης 1 της r. Γράφουμε $r(z)=\frac{g(z)}{z-i}$ και, αν θέλουμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 8.3.2 με την $g(z)=\frac{1}{(z+i)(z-2i)(z+2i)}$, βρίσκουμε αμέσως ότι $\mathrm{Res}(r;i)=g(i)=\frac{1}{6i}$. Ομοίως, γράφουμε $r(z)=\frac{g(z)}{z-2i}$ με την $g(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)(z+2i)}$ και βρίσκουμε ότι $\mathrm{Res}(r;2i)=g(2i)=-\frac{1}{12i}$.
Δουλεύοντας, εναλλακτικά, με τις σειρές Taylor των δύο συναρτήσεων g κάνουμε τα εξής. Γράφουμε $r(z)=\frac{g(z)}{z-i}$ με $g(z)=\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}$, και η σειρά Taylor της g με κέντρο το i είναι η

$$g(z)=g(i)+g'(i)(z-i)+\frac{g''(i)}{2}(z-i)^2+\cdots.$$

Επομένως, η σειρά Laurent της r με κέντρο το i γράφεται

$$r(z)=\frac{g(z)}{z-i}=\frac{g(i)}{z-i}+g'(i)+\frac{g''(i)}{2}(z-i)+\cdots.$$

Άρα $\mathrm{Res}(r;i)=g(i)=\frac{1}{6i}$.
Ομοίως, γράφουμε $r(z)=\frac{g(z)}{z-2i}$ με $g(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)}$ και η σειρά Taylor της g με κέντρο το $2i$ είναι η

$$g(z)=g(2i)+g'(2i)(z-2i)+\frac{g''(2i)}{2}(z-2i)^2+\cdots.$$

Επομένως, η σειρά Laurent της r με κέντρο το $2i$ γράφεται

$$r(z)=\frac{g(z)}{z-2i}=\frac{g(2i)}{z-2i}+g'(2i)+\frac{g''(2i)}{2}(z-2i)+\cdots.$$

Άρα $\mathrm{Res}(r;2i)=g(2i)=-\frac{1}{12i}$.
Τελικά έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx=2\pi i\big(\mathrm{Res}(r;i)+\mathrm{Res}(r;2i)\big)=2\pi i\Big(\frac{1}{6i}-\frac{1}{12i}\Big)=\frac{\pi}{6}.$$

(iii) Έστω $r(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$. Οι ρίζες του πολυωνύμου $q(z)=(z^2+1)^2$ είναι τα $\pm i$, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το $\mathrm{Res}(r;i)$.
Είναι $r(z)=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$, οπότε το i είναι πόλος τάξης 2 της r. Γράφουμε $r(z)=\frac{g(z)}{(z-i)^2}$ με $g(z)=\frac{1}{(z+i)^2}$ και από το παράδειγμα 8.3.2 βρίσκουμε ότι $\mathrm{Res}(r;i)=g'(i)=\frac{1}{4i}$.
Εναλλακτικά, η σειρά Taylor της $g(z)=\frac{1}{(z+i)^2}$ με κέντρο το i είναι η

$$g(z)=g(i)+g'(i)(z-i)+\frac{g''(i)}{2}(z-i)^2+\cdots,$$

οπότε η σειρά Laurent της r με κέντρο το i είναι η

$$r(z)=\frac{g(z)}{(z-i)^2}=\frac{g(i)}{(z-i)^2}+\frac{g'(i)}{z-i}+\frac{g''(i)}{2}+\cdots.$$

Άρα $\mathrm{Res}(r;i)=g'(i)=\frac{1}{4i}$ και, επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx=2\pi i\,\mathrm{Res}(r;i)=\frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 8.5.2. *Υπολογισμός της πρωτεύουσας τιμής* pv $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ *του γενικευμένου ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης* $r = \frac{p}{q}$ *όταν ο βαθμός του πολυωνύμου* q *υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου* p *κατά μία μονάδα, και το* q *δεν έχει πραγματικές ρίζες.*

Έστω, λοιπόν, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ και $q(x) = b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_1 x + b_0$ με $b_{n+1} \neq 0$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ δεν συγκλίνει. Πράγματι, αν επαναλάβουμε τους αρχικούς υπολογισμούς του προηγούμενου παραδείγματος με $m = n+1$, βλέπουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}|b_{n+1}||z|^{n+1} \leq |q(z)| \leq 2|b_{n+1}||z|^{n+1} \quad \text{για } |z| \geq R_0,$$

και άρα ισχύει

$$|r(z)| \geq \frac{1}{4}\,\frac{|a_n|}{|b_{n+1}|}\,\frac{1}{|z|} = \frac{c}{|z|} \quad \text{για } |z| \geq R_0,$$

όπου $c = \frac{1}{4}\,\frac{|a_n|}{|b_{n+1}|} > 0$. Τότε για πραγματικό $z = x$ έχουμε ότι ισχύει

$$|r(x)| \geq \frac{c}{x} \quad \text{για } x \geq R_0.$$

Η r είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[R_0, +\infty)$, οπότε έχει σταθερό πρόσημο σ' αυτό το διάστημα. Αν η r είναι θετική στο $[R_0, +\infty)$, τότε

$$\int_{R_0}^{+\infty} r(x)\,dx \geq c\int_{R_0}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

ενώ, αν η r είναι αρνητική στο $[R_0, +\infty)$, τότε

$$\int_{R_0}^{+\infty} r(x)\,dx \leq -c\int_{R_0}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = -\infty.$$

Ομοίως, το $\int_{-\infty}^{-R_0} r(x)\,dx$ είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.

Αφού το γενικευμένο ολοκλήρωμά στο $\mathbb{R}$ δεν συγκλίνει, μελετάμε την πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος, δηλαδή το όριο

$$\text{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx := \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} r(x)\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\,\frac{1}{z} = \frac{(a_{n-1}b_{n+1} - a_n b_n)z^n + \cdots + (a_0 b_{n+1} - a_n b_1)z - a_n b_0}{b_{n+1}z^{n+2} + \cdots + b_1 z^2 + b_0 z}.$$

Αυτή είναι ρητή συνάρτηση στην οποία ο βαθμός του παρονομαστή υπερβαίνει κατά δύο μονάδες τον βαθμό του αριθμητή και, σύμφωνα με όσα είπαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχει κάποιο $R_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left| r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\,\frac{1}{z}\right| \leq 4\frac{|a_{n-1}b_{n+1} - a_n b_n|}{|b_{n+1}|}\,\frac{1}{|z|^2} = \frac{C}{|z|} \qquad \text{για } |z| \geq R_0, \tag{8.8}$$

με $C = 4\frac{|a_{n-1}b_{n+1} - a_n b_n|}{|b_{n+1}|}$.

Τώρα, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, θεωρούμε τις ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ του q οι οποίες βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο, και παίρνουμε πάλι

$$R > \max\{R_0, |z_1|, \ldots, |z_M|\}.$$

Εφαρμόζουμε πάλι, ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων στην $r = \frac{p}{q}$ και στην ίδια κλειστή καμπύλη γ_R, και βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R} r(z)\,dz = \mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M).$$

Κατόπιν, γράφουμε

$$\oint_{\gamma_R} r(z)\,dz = \int_{[-R,R]} r(z)\,dz + \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\,dz$$

και άρα

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} r(x)\,dx &= 2\pi i\big(\mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M)\big) - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} r(z)\,dz\\ &= 2\pi i\big(\mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M)\big) - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \Big(r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\,\frac{1}{z}\Big)\,dz \qquad (8.9)\\ &\quad - \frac{a_n}{b_{n+1}}\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{1}{z}\,dz.\end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος αυτής της σχέσης είναι

$$\frac{a_n}{b_{n+1}}\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{1}{z}\,dz = \frac{a_n}{b_{n+1}}\int_0^{\pi} \frac{1}{Re^{it}}\,iRe^{it}\,dt = i\pi\,\frac{a_n}{b_{n+1}}.$$

Και τώρα, επειδή $R > R_0$, εκτιμάμε τον προτελευταίο όρο, χρησιμοποιώντας την (8.8), ως εξής:

$$\Big|\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \Big(r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\,\frac{1}{z}\Big)\,dz\Big| \leq \frac{C}{R^2}\,\pi R = \frac{C\pi}{R}.$$

Επομένως,

$$\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \Big(r(z) - \frac{a_n}{b_{n+1}}\,\frac{1}{z}\Big)\,dz \to 0 \quad \text{όταν } R \to +\infty.$$

Άρα, παίρνοντας όριο καθώς $R \to +\infty$ στην (8.9), βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(r; z_1) + \cdots + \mathrm{Res}(r; z_M)\big) - i\pi\,\frac{a_n}{b_{n+1}}.}$$

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.
Έστω $r(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Οι ρίζες του πολυωνύμου $q(z) = z^2 + 1$ είναι τα $\pm i$, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το $\mathrm{Res}(r; i)$.
Είναι $r(z) = \frac{z+1}{(z-i)(z+i)}$, οπότε το i είναι πόλος τάξης 1 της r. Γράφουμε $r(z) = \frac{(z+1)/(z+i)}{z-i} = \frac{g(z)}{z-i}$ με $g(z) = \frac{z+1}{z+i}$ και έχουμε ότι $\mathrm{Res}(r; i) = g(i) = \frac{i+1}{2i}$. Άρα

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(r; i) - i\pi = \pi.$$

Παράδειγμα 8.5.3. *Υπολογισμός της πρωτεύουσας τιμής* pv $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx$ *του γενικευμένου ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης* $r = \frac{p}{q}$ *όταν ο βαθμός του πολυωνύμου* q *υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου* p *κατά τουλάχιστον μία μονάδα, και το* q *έχει πραγματικές ρίζες οι οποίες έχουν όλες πολλαπλότητα* 1.

Έστω, λοιπόν, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ και $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ με $b_m \neq 0$, και έστω $m \geq n+1$.
Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές ρίζες του q είναι οι $x_1, \ldots, x_N$ με $x_1 < \ldots < x_N$ και υποθέτουμε,

επίσης, ότι αυτές δεν είναι ρίζες και του p. Αν κάποια από αυτές, έστω η x_k, είναι ρίζα του p, τότε απλοποιούμε το $\frac{p}{q}$ απαλείφοντας τον κοινό παράγοντα $x - x_k$ και άρα μπορούμε να αγνοήσουμε την x_k ως ρίζα του q.
Παίρνουμε $\epsilon_0 > 0$ έτσι ώστε τα συμμετρικά διαστήματα $[x_1 - \epsilon_0, x_1 + \epsilon_0], \ldots, [x_N - \epsilon_0, x_N + \epsilon_0]$ γύρω από τις πραγματικές ρίζες του q να είναι ξένα.
Για να συγκλίνει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\, dx$ θα πρέπει για κάθε ρίζα x_k να συγκλίνουν τα αντίστοιχα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{x_k-\epsilon_0}^{x_k} r(x)\, dx$ και $\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_0} r(x)\, dx$. Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό. Πράγματι, γράφουμε $r(z) = \frac{p(z)}{(z-x_k)q_k(z)} = \frac{g_k(z)}{z-x_k}$, όπου q_k είναι πολυώνυμο με $q_k(x_k) \neq 0$ και όπου η $g_k = \frac{p}{q_k}$ είναι ρητή συνάρτηση αναλυτική στο x_k. Επειδή $\lim_{z\to x_k} g_k(z) = g_k(x_k) \neq 0$, υπάρχει ϵ_k με $0 < \epsilon_k \leq \epsilon_0$ ώστε να ισχύει

$$|g_k(z)| \geq \frac{1}{2}\,|g_k(x_k)| \quad \text{όταν } |z - x_k| \leq \epsilon_k.$$

Δηλαδή ισχύει

$$|r(z)| \geq \frac{1}{2}\,\frac{|g_k(x_k)|}{|z - x_k|} \quad \text{όταν } 0 < |z - x_k| \leq \epsilon_k.$$

Στο διάστημα $(x_k, x_k + \epsilon_k]$ η r είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, όποτε έχει σταθερό πρόσημο. Αν η r είναι θετική στο $(x_k, x_k + \epsilon_k]$, τότε

$$\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k} r(x)\, dx \geq \frac{|g_k(x_k)|}{2} \int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k} \frac{1}{x - x_k}\, dx = +\infty$$

και, ομοίως, αν η r είναι αρνητική στο $(x_k, x_k + \epsilon_k]$, τότε

$$\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k} r(x)\, dx \leq -\frac{|g_k(x_k)|}{2} \int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k} \frac{1}{x - x_k}\, dx = -\infty.$$

Επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{x_k}^{x_k+\epsilon_k} r(x)\, dx$ δεν συγκλίνει. Ομοίως, και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{x_k-\epsilon_k}^{x_k} r(x)\, dx$ δεν συγκλίνει.
Γι αυτό μελετάμε την πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\, dx$, δηλαδή το όριο

$$\begin{aligned}
\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\, dx :&= \lim_{R\to+\infty,\epsilon\to 0+} \Big(\int_{-R}^{x_1-\epsilon} r(x)\, dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} r(x)\, dx + \cdots \\
&\qquad \cdots + \int_{x_{N-1}+\epsilon}^{x_N-\epsilon} r(x)\, dx + \int_{x_N+\epsilon}^{R} r(x)\, dx \Big) \\
&= \lim_{R\to+\infty,\epsilon\to 0+} I(R,\epsilon),
\end{aligned} \tag{8.10}$$

όπου με $I(R,\epsilon)$ συμβολίζουμε απλώς το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στην παρένθεση.
Προσέξτε: ολοκληρώνουμε την r στο συμμετρικό διάστημα $[-R, R]$, αφαιρώντας από αυτό τα συμμετρικά διαστήματα $[x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon], \ldots, [x_N - \epsilon, x_N + \epsilon]$ (με $\epsilon \leq \epsilon_0$), και μετά παίρνουμε το όριο καθώς $R \to +\infty$ και $\epsilon \to 0+$.
Για να υπολογίσουμε το $I(R,\epsilon)$ χρησιμοποιούμε μια παραλλαγή της καμπύλης γ_R των παραδειγμάτων 8.5.1, 8.5.2. Θεωρούμε R και ϵ ώστε

$$R > \max\{R_0, |z_1|, \ldots, |z_M|, x_N + 1, -x_1 + 1\}, \quad \epsilon < \min\{1, \epsilon_0, \mathrm{Im}(z_1), \ldots, \mathrm{Im}(z_M)\}.$$

Επίσης, θεωρούμε και την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ η οποία αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα $[-R, x_1 - \epsilon], [x_1 + \epsilon, x_2 - \epsilon], \ldots, [x_{N-1} + \epsilon, x_N - \epsilon], [x_N + \epsilon, R]$, από το τόξο $\mathrm{arc}(R, -R)$ του κύκλου $C(0; R)$, και από τα τόξα $\neg\,\mathrm{arc}(x_1 + \epsilon, x_1 - \epsilon), \ldots, \neg\,\mathrm{arc}(x_N + \epsilon, x_N - \epsilon)$ (με τις αρνητικές φορές περιστροφής) των αντίστοιχων κύκλων $C(x_1; \epsilon), \ldots, C(x_N; \epsilon)$. Η καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$

περιστρέφεται μία φορά γύρω από καθεμιά από τις ρίζες $z_1, \ldots, z_M$ του q, και δεν περιστρέφεται καμία φορά γύρω από καθεμιά από τις υπόλοιπες ρίζες του q. Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} r(z)\,dz = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(r; z_1) + \cdots + \operatorname{Res}(r; z_M)\big),$$

οπότε

$$\begin{aligned} I(R,\epsilon) &= 2\pi i\big(\operatorname{Res}(r; z_1) + \cdots + \operatorname{Res}(r; z_M)\big) - \int_{\operatorname{arc}(R,-R)} r(z)\,dz \\ &\quad + \int_{\operatorname{arc}(x_1+\epsilon,x_1-\epsilon)} r(z)\,dz + \cdots + \int_{\operatorname{arc}(x_N+\epsilon,x_N-\epsilon)} r(z)\,dz. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Το x_k είναι πόλος τάξης 1 της r και η σειρά Laurent της r με κέντρο το x_k είναι η

$$r(z) = \frac{g_k(z)}{z - x_k} = \frac{g_k(x_k)}{z - x_k} + g_k'(x_k) + \frac{g_k''(x_k)}{2}(z - x_k) + \cdots.$$

Στο παράδειγμα 8.3.3 είχαμε δει ότι

$$\operatorname{Res}(r; x_k) = g_k(x_k) = \frac{p(x_k)}{q'(x_k)}.$$

Επομένως, η r γράφεται

$$r(z) = \frac{c_k}{z - x_k} + f_k(z) \quad \text{για } z \neq x_k \text{ σε έναν δίσκο κέντρου } x_k,$$

όπου η f_k είναι αναλυτική στο x_k και $c_k = \operatorname{Res}(r; x_k)$. Άρα η f_k είναι φραγμένη σε έναν δίσκο κέντρου x_k, οπότε υπάρχει $M_k \geq 0$ και $\epsilon_k' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f_k(z)| \leq M_k \quad \text{για } |z - x_k| \leq \epsilon_k'.$$

Άρα όταν $0 < \epsilon \leq \epsilon_k'$ έχουμε

$$\Big|\int_{\operatorname{arc}(x_k+\epsilon,x_k-\epsilon)} f_k(z)\,dz\Big| \leq M_k \pi \epsilon$$

και, επομένως,

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\operatorname{arc}(x_k+\epsilon,x_k-\epsilon)} f_k(z)\,dz = 0.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{arc}(x_k+\epsilon,x_k-\epsilon)} r(z)\,dz &= c_k \int_{\operatorname{arc}(x_k+\epsilon,x_k-\epsilon)} \frac{1}{z - x_k}\,dz + \int_{\operatorname{arc}(x_k+\epsilon,x_k-\epsilon)} f_k(z)\,dz \\ &= c_k \int_0^{\pi} \frac{1}{\epsilon e^{it}} \epsilon i e^{it}\,dt + \int_{\operatorname{arc}(x_k+\epsilon,x_k-\epsilon)} f_k(z)\,dz \\ &= \pi i c_k + \int_{\operatorname{arc}(x_k+\epsilon,x_k-\epsilon)} f_k(z)\,dz \to \pi i c_k \quad \text{όταν } \epsilon \to 0+. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Το όριο του $\int_{\operatorname{arc}(R,-R)} r(z)\,dz$ όταν $R \to +\infty$ υπάρχει έτοιμο στα παραδείγματα 8.5.1 και 8.5.2:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\operatorname{arc}(R,-R)} r(z)\,dz = \begin{cases} 0, & \text{αν } m \geq n+2 \\ i\pi\, \frac{a_n}{b_{n+1}}, & \text{αν } m = n+1 \end{cases} \tag{8.13}$$

Από τις (8.10), (8.11), (8.12) και (8.13) συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\,dx = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(r;z_1)+\cdots+\operatorname{Res}(r;z_M)\big)\\ +\pi i\big(\operatorname{Res}(r;x_1)+\cdots+\operatorname{Res}(r;x_N)\big)\\ -\begin{cases}0, & \text{αν } m\geq n+2\\ i\pi\,\frac{a_n}{b_{n+1}}, & \text{αν } m=n+1\end{cases}\end{aligned}}$$

Κι ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.
Έστω $r(x)=\frac{x^2+3}{(x+1)(x^2+1)}$. Οι ρίζες του $(z+1)(z^2+1)$ είναι το -1 και τα $\pm i$.
Γράφουμε $r(z)=\frac{(z^2+3)/z(z+i)}{z-i}=\frac{g(z)}{z-i}$ με $g(z)=\frac{z^2+3}{(z+1)(z+i)}$, οπότε $\operatorname{Res}(r;i)=g(i)=-\frac{1+i}{2}$.
Κατόπιν, $r(z)=\frac{(z^2+3)/(z^2+1)}{z+1}=\frac{g(z)}{z+1}$ με $g(z)=\frac{z^2+3}{z^2+1}$ και τότε $\operatorname{Res}(r;-1)=g(-1)=2$.
Άρα

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{x(x^2+1)}\,dx = 2\pi i\operatorname{Res}(r;i)+\pi i\operatorname{Res}(r;0)-i\pi = -\pi i(1+i)+2\pi i-\pi i=\pi.$$

Παράδειγμα 8.5.4. *Υπολογισμός των γενικευμένων ολοκληρωμάτων (ή πρωτευουσών τιμών τέτοιων ολοκληρωμάτων) $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\cos x\,dx$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\sin x\,dx$, όπου η $r=\frac{p}{q}$ είναι ρητή συνάρτηση, ο βαθμός του πολυωνύμου q υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου p κατά τουλάχιστον μία μονάδα, οι πραγματικές ρίζες του q (αν υπάρχουν) έχουν όλες πολλαπλότητα 1, και οι συντελεστές των p, q είναι πραγματικοί αριθμοί.*

Επειδή οι συντελεστές των p, q είναι πραγματικοί, ισχύει $r(x)\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι ρίζα του q. Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\cos x\,dx=\operatorname{Re}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)e^{ix}\,dx\Big),\quad \int_{-\infty}^{+\infty} r(x)\sin x\,dx=\operatorname{Im}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)e^{ix}\,dx\Big)$$

και υπολογίζουμε το $\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)e^{ix}\,dx$ (ή την πρωτεύουσα τιμή του).
Η μέθοδος υπολογισμού έχει ήδη περιγραφεί στα παραδείγματα 8.5.1, 8.5.2 και 8.5.3. Χρησιμοποιούμε την καμπύλη γ_R των δύο πρώτων παραδειγμάτων ή την καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ του τρίτου παραδείγματος, ανάλογα με το αν το q δεν έχει ή έχει πραγματικές ρίζες, και υπολογίζουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης $r(z)e^{iz}$ στις ρίζες του πολυωνύμου q.
Ως συγκεκριμένο παράδειγμα θα υπολογίσουμε το πολύ σημαντικό γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. (Η ισότητα ισχύει επειδή η $\frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια.)
Θα υπολογίσουμε την πρωτεύουσα τιμή $\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx$ αντί του $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. Όμως, πριν προχωρήσουμε προσέξτε τη διαφορά: η συνάρτηση $\frac{e^{ix}}{x}=\frac{\cos x}{x}+i\frac{\sin x}{x}$ απειρίζεται στο 0 επειδή το πραγματικό μέρος $\frac{\cos x}{x}$ απειρίζεται στο 0 ενώ το φανταστικό μέρος $\frac{\sin x}{x}$ δεν απειρίζεται στο 0. Μάλιστα, αν ορίσουμε την συνάρτηση αυτή και στο 0 έτσι ώστε να έχει τιμή ίση με το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, τότε γίνεται συνεχής στο 0.
Η συνάρτηση $\frac{e^{iz}}{z}$ είναι αναλυτική στο χωρίο $\mathbb{C}$ εκτός του σημείου 0 στο οποίο έχει πόλο τάξης 1. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor της e^{iz} με κέντρο το 0, βρίσκουμε ότι η σειρά Laurent της $\frac{e^{iz}}{z}$ στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι η:

$$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}+i+\frac{i^2}{2}\,z+\frac{i^3}{6}\,z^2+\cdots\quad \text{για } z\neq 0.$$

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$, η οποία αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα $[-R,-\epsilon]$ και $[\epsilon,R]$, το τόξο $\operatorname{arc}(R,-R)$ του κύκλου $C(0;R)$, και το τόξο $\neg\operatorname{arc}(\epsilon,-\epsilon)$ (με την αρνητική φορά περιστροφής) του κύκλου $C(0;\epsilon)$. Η καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ δεν περιστρέφεται καμία φορά γύρω από τον πόλο 0 της $\frac{e^{iz}}{z}$. Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0,$$

οπότε

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = -\int_{\text{arc}(R,-R)} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\text{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\,dz. \tag{8.14}$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε

$$\int_{\text{arc}(R,-R)} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\, iRe^{it}\,dt = i\int_0^{\pi} e^{-R\sin t + iR\cos t}\,dt$$

και, επομένως,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\text{arc}(R,-R)} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\Big| &\le \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}t}\,dt \\ &= \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) \to 0 \quad \text{όταν } R\to+\infty.\end{aligned} \tag{8.15}$$

Στην δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ανισότητα $\sin t \ge \frac{2t}{\pi}$ για $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Από την σειρά Laurent της $\frac{e^{iz}}{z}$ που βρήκαμε προηγουμένως βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z)$ για $z \neq 0$, όπου η h είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Τώρα, η h είναι φραγμένη σε μια περιοχή του 0, δηλαδή υπάρχει $M \ge 0$ ώστε να ισχύει $|h(z)| \le 1$ για $|z| \le 1$. Άρα για $\epsilon \le 1$ έχουμε

$$\Big|\int_{\text{arc}(\epsilon,-\epsilon)} h(z)\,dz\Big| \le M\pi\epsilon \to 0 \quad \text{όταν } \epsilon \to 0+\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{\text{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\,dz &= \int_{\text{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\text{arc}(\epsilon,-\epsilon)} h(z)\,dz \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\epsilon e^{it}}\, i\epsilon e^{it}\,dt + \int_{\text{arc}(\epsilon,-\epsilon)} h(z)\,dz \\ &= \pi i + \int_{\text{arc}(\epsilon,-\epsilon)} h(z)\,dz \to \pi i \quad \text{όταν } \epsilon\to 0+\,.\end{aligned} \tag{8.16}$$

Από τις (8.14), (8.15) και (8.16) συνεπάγεται

$$\text{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to0+,R\to+\infty} \Big(\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\Big) = \pi i.$$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\cos x}{x}$ είναι περιττή, το πραγματικό μέρος της σχέσης αυτής μηδενίζεται και, επειδή η $\frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια, έχουμε ότι

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = 2i\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

και, επομένως,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Παράδειγμα 8.5.5. Θα υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx$.
Θεωρούμε τον αναλυτικό κλάδο του λογαρίθμου, που θα τον συμβολίσουμε $\log z$, στο αστρόμορφο χωρίο A το οποίο προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε την ημιευθεία του αρνητικού y-άξονα (μαζί με το 0) και ο οποίος έχει την τιμή 0 στο σημείο 1. Αυτός ο κλάδος έχει τύπο

$$\log z = \ln|z| + i\theta \quad \text{για } z = |z|e^{i\theta} \text{ με } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Η συνάρτηση $\frac{\log z}{z^2+4}$ είναι αναλυτική στο A εκτός του σημείου $2i$ στο οποίο έχει πόλο τάξης 1. Πράγματι, γράφουμε $\frac{\log z}{z^2+4} = \frac{(\log z)/(z+2i)}{z-2i} = \frac{g(z)}{z-2i}$ και έχουμε ότι η $g(z) = \frac{\log z}{z+2i}$ είναι αναλυτική στο A με $g(2i) = \frac{\pi}{8} - i\frac{\ln 2}{4}$. Επίσης, είναι $\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+4}; 2i\right) = g(2i) = \frac{\pi}{8} - i\frac{\ln 2}{4}$.
Τώρα θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ από το προηγούμενο παράδειγμα. Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{\log z}{z^2+4}; 2i\right) = \frac{\pi\ln 2}{2} + i\frac{\pi^2}{4},$$

οπότε

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\ln|x| + i\pi}{x^2+4}\, dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi\ln 2}{2} + i\frac{\pi^2}{4} - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz$$

και, επομένως,

$$2\int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx + i\pi \int_{\epsilon}^{R} \frac{1}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi\ln 2}{2} + i\frac{\pi^2}{4} - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz.$$

Θεωρούμε μόνο το πραγματικό μέρος των δύο πλευρών της τελευταίας σχέσης και καταλήγουμε στην

$$2\int_{\epsilon}^{R} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi\ln 2}{2} - \mathrm{Re}\left(\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz\right) + \mathrm{Re}\left(\int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz\right). \tag{8.17}$$

Τώρα εκτιμάμε:

$$\left|\int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz\right| \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2 - 4}\pi R \to 0 \quad \text{όταν } R \to +\infty \tag{8.18}$$

και

$$\left|\int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{\log z}{z^2+4}\, dz\right| \leq \frac{\ln\epsilon + \pi}{4 - \epsilon^2}\pi\epsilon \to 0 \quad \text{όταν } \epsilon \to 0+\,. \tag{8.19}$$

Από τις (8.17), (8.18) και (8.19) συνεπάγεται

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi\ln 2}{4}.$$

Παράδειγμα 8.5.6. Θα υπολογίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\, dx$ με $0 < a < 1$.
Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = t^2$ και (αφού θέσουμε x στην θέση του t) έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^{2a-1}}{x^2+1}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^b}{x^2+1}\, dx \tag{8.20}$$

με $b = 2a - 1$ και $-1 < b < 1$.
Θεωρούμε τον αναλυτικό κλάδο του λογαρίθμου του προηγούμενου παραδείγματος, που θα τον

συμβολίσουμε και πάλι $\log z$, στο ίδιο αστρόμορφο χωρίο A.
Η συνάρτηση
$$h(z) = e^{b \log z}$$
είναι αναλυτική στο A, και για πραγματικό $z = x$ γράφεται $h(x) = e^{b \ln x} = x^b$.
Η συνάρτηση $\frac{h(z)}{z^2+1}$ είναι αναλυτική στο A εκτός του σημείου i στο οποίο έχει πόλο τάξης 1. Πράγματι, γράφουμε $\frac{h(z)}{z^2+1} = \frac{h(z)/(z+i)}{z-i} = \frac{g(z)}{z-i}$ και έχουμε ότι η $g(z) = \frac{h(z)}{z+i}$ είναι αναλυτική στο A με $g(i) = \frac{h(i)}{2i} = \frac{e^{\frac{b\pi}{2} i}}{2i}$. Επίσης, είναι $\operatorname{Res}\big(\frac{h(z)}{z^2+1}; i\big) = g(i) = \frac{e^{\frac{b\pi}{2} i}}{2i}$.
Τώρα θεωρούμε πάλι την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon}$ του προηγούμενου παραδείγματος. Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι
$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon}} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\Big(\frac{h(z)}{z^2+1}; i\Big) = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i},$$
οπότε
$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{h(x)}{x^2+1}\, dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{h(x)}{x^2+1}\, dx = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i} - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz$$
και, επομένως,
$$\int_{\epsilon}^{R} \frac{h(-x)}{x^2+1}\, dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{h(x)}{x^2+1}\, dx = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i} - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz$$
και άρα
$$(e^{b\pi i} + 1) \int_{\epsilon}^{R} \frac{x^b}{x^2+1}\, dx = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i} - \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz + \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz. \qquad (8.21)$$
Τώρα εκτιμάμε:
$$\Big| \int_{\mathrm{arc}(R,-R)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz \Big| \le \frac{R^b}{R^2-1}\, \pi R \to 0 \quad \text{όταν } R \to +\infty \qquad (8.22)$$
και
$$\Big| \int_{\mathrm{arc}(\epsilon,-\epsilon)} \frac{h(z)}{z^2+1}\, dz \Big| \le \frac{\epsilon^b}{1-\epsilon^2}\, \pi\epsilon \to 0 \quad \text{όταν } \epsilon \to 0+. \qquad (8.23)$$
Από τις (8.21), (8.22) και (8.23) συνεπάγεται
$$(e^{b\pi i} + 1) \lim_{\epsilon \to 0+, R \to +\infty} \int_{\epsilon}^{R} \frac{x^b}{x^2+1}\, dx = \pi e^{\frac{b\pi}{2} i}$$
και άρα
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^b}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi e^{\frac{b\pi}{2} i}}{e^{b\pi i} + 1} = \frac{\pi}{2\cos(\frac{b\pi}{2})}.$$
Τέλος, λόγω της (8.20) είναι
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.}$$
Τώρα θα υπολογίσουμε το $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\, dx$ με δεύτερο τρόπο.
Θεωρούμε τον αναλυτικό κλάδο του λογαρίθμου, που θα τον συμβολίσουμε και πάλι $\log z$, στο

αστρόμορφο χωρίο B που προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε την ημιευθεία του θετικού x-άξονα (μαζί με το 0) και ο οποίος έχει την τιμή $i\pi$ στο σημείο -1. Αυτός ο κλάδος έχει τύπο

$$\log z = \ln|z| + i\theta \quad \text{για } z = |z|e^{i\theta} \text{ με } 0 < \theta < 2\pi.$$

Η συνάρτηση

$$h(z) = e^{(a-1)\log z}$$

είναι αναλυτική στο B, οπότε η συνάρτηση $\frac{h(z)}{z+1}$ είναι αναλυτική στο B εκτός του σημείου -1 στο οποίο έχει πόλο τάξης 1. Πράγματι, είναι $\operatorname{Res}\big(\frac{h(z)}{z+1}; -1\big) = h(-1) = e^{(a-1)\pi i}$.
Τώρα θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma_{R,\epsilon,\delta}$ στο σχήμα 39. Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται ότι

$$\oint_{\gamma_{R,\epsilon,\delta}} \frac{h(z)}{z+1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\Big(\frac{h(z)}{z+1}; -1\Big) = 2\pi i e^{(a-1)\pi i},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_{[\epsilon e^{i\delta}, Re^{i\delta}]} \frac{h(z)}{z+1}\, dz &- \int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\delta)}, Re^{i(2\pi-\delta)}]} \frac{h(z)}{z+1}\, dz \\ &= 2\pi i e^{(a-1)\pi i} - \int_{\operatorname{arc}(Re^{i\delta}, Re^{i(2\pi-\delta)})} \frac{h(z)}{z+1}\, dz \\ &\quad + \int_{\operatorname{arc}(\epsilon e^{i\delta}, \epsilon e^{i(2\pi-\delta)})} \frac{h(z)}{z+1}\, dz. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_{[\epsilon e^{i\delta}, Re^{i\delta}]} \frac{h(z)}{z+1}\, dz = e^{ia\delta} \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{i\delta}+1}\, dr.$$

Με σταθερά ϵ και R, παίρνουμε όριο όταν $\delta \to 0+$. Προφανώς, $e^{ia\delta} \to 1$. Επίσης,

$$\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{i\delta}+1}\, dr \to \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\, dr.$$

Αυτό φαίνεται εύκολα ως εξής:

$$\begin{aligned} \Big| \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{i\delta}+1}\, dr - \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\, dr \Big| &\le \int_\epsilon^R \Big| \frac{r^{a-1}}{re^{i\delta}+1} - \frac{r^{a-1}}{r+1} \Big|\, dr \\ &= |e^{i\delta}-1| \int_\epsilon^R \frac{r^a}{|re^{i\delta}+1|(r+1)}\, dr \\ &\le |e^{i\delta}-1| \int_\epsilon^R r^a\, dr \to 0 \quad \text{όταν } \delta \to 0+\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{[\epsilon e^{i\delta}, Re^{i\delta}]} \frac{h(z)}{z+1}\, dz \to \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\, dr \quad \text{όταν } \delta \to 0+\,. \tag{8.25}$$

Κατόπιν βλέπουμε ότι

$$\int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\delta)}, Re^{i(2\pi-\delta)}]} \frac{h(z)}{z+1}\, dz = e^{ia(2\pi-\delta)} \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{-i\delta}+1}\, dr.$$

Πάλι με σταθερά ϵ και R, παίρνουμε όριο όταν $\delta \to 0+$. Προφανώς, $e^{ia(2\pi-\delta)} \to e^{i2a\pi}$. Επίσης,

$$\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{re^{-i\delta}+1}\, dr \to \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\, dr.$$

Αυτό αποδεικνύεται ακριβώς όπως και το προηγούμενο ανάλογο όριο.
Άρα
$$\int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\delta)},Re^{i(2\pi-\delta)}]} \frac{h(z)}{z+1}\,dz \to e^{i2a\pi}\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\,dr \quad \text{όταν } \delta\to 0+\,. \tag{8.26}$$
Τώρα εκτιμάμε:
$$\Big|\int_{\text{arc}(Re^{i\delta},Re^{i(2\pi-\delta)})} \frac{h(z)}{z+1}\,dz\Big| \le \frac{R^{a-1}}{R-1}(2\pi-2\delta)R \le \frac{2\pi R^a}{R-1}. \tag{8.27}$$
και
$$\Big|\int_{\text{arc}(\epsilon e^{i\delta},\epsilon e^{i(2\pi-\delta)})} \frac{h(z)}{z+1}\,dz\Big| \le \frac{\epsilon^{a-1}}{1-\epsilon}(2\pi-2\delta)\epsilon \le \frac{2\pi \epsilon^a}{1-\epsilon}. \tag{8.28}$$
Χρησιμοποιώντας τις (8.27) και (8.28), από την (8.24) βρίσκουμε ότι
$$\Big|\int_{[\epsilon e^{i\delta},Re^{i\delta}]} \frac{h(z)}{z+1}\,dz - \int_{[\epsilon e^{i(2\pi-\delta)},Re^{i(2\pi-\delta)}]} \frac{h(z)}{z+1}\,dz - 2\pi i e^{(a-1)\pi i}\Big| \le \frac{2\pi R^a}{R-1}+\frac{2\pi\epsilon^a}{1-\epsilon}.$$
Επομένως, βάσει των (8.25) και (8.26), παίρνοντας όριο καθώς $\delta\to 0+$, έχουμε
$$\Big|(1-e^{i2a\pi})\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\,dr - 2\pi i e^{(a-1)\pi i}\Big| \le \frac{2\pi R^a}{R-1}+\frac{2\pi\epsilon^a}{1-\epsilon}.$$
Τέλος, παίρνουμε όριο καθώς $\epsilon\to 0+$ και $R\to+\infty$ και καταλήγουμε στο ότι
$$(1-e^{i2a\pi})\lim_{\epsilon\to 0+,R\to+\infty}\int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{r+1}\,dr = 2\pi i e^{(a-1)\pi i}$$
και άρα
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = \frac{2\pi i e^{(a-1)\pi i}}{1-e^{i2a\pi}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$
Παράδειγμα 8.5.7. *Υπολογισμός ολοκληρωμάτων $\int_0^{2\pi} r(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta$, όπου $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών.*
Αρχίζουμε παραμετρικοποιώντας τον κύκλο $C(0;1)$ με την παραμετρική εξίσωση
$$z=\gamma(\theta)=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \quad \text{για } 0\le\theta\le 2\pi$$
και έχουμε ότι
$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big),\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)$$
και
$$\frac{dz}{d\theta}=\gamma'(\theta)=ie^{i\theta}=iz.$$
Επομένως,
$$\int_0^{2\pi} r(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{i}\oint_{C(0;1)} r\Big(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\Big)\frac{1}{z}\,dz.$$
Η συνάρτηση $s(z)=r\big(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\big)\frac{1}{z}$ είναι ρητή συνάρτηση του z κι έτσι έχουμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης στην κλειστή καμπύλη $C(0;1)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων αφού υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της s στους πόλους της οι οποίοι περικλείονται από τον κύκλο $C(0;1)$.
Ως παράδειγμα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta$.
Μετά από τα προκαταρκτικά καταλήγουμε στο ότι
$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{i}\oint_{C(0;1)}\frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{z}\,dz = -2i\oint_{C(0;1)}\frac{1}{z^2+4z+1}\,dz. \tag{8.29}$$

Η $\frac{1}{z^2+4z+1}$ είναι αναλυτική στο αστρόμορφο χωρίο $\mathbb{C}$ εκτός των σημείων $-2 \pm \sqrt{3}$. Ο κύκλος $C(0;1)$ (με την θετική φορά διαγραφής του) περιστρέφεται μία φορά γύρω από το $z_1 = -2+\sqrt{3}$ και καμία φορά γύρω από το $z_2 = -2-\sqrt{3}$. Το z_1 είναι πόλος της $\frac{1}{z^2+4z+1}$ τάξης 1, αφού είναι $\frac{1}{z^2+4z+1} = \frac{1/(z-z_2)}{z-z_1}$, και $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}; z_1\right) = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Άρα από την (8.29) και το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων έχουμε

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta = 4\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}; z_1\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ασκήσεις.

8.5.1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^8}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx,$$

$$\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{x^4-4x^2+5}\,dx, \quad \mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$$

με τις μεθόδους των παραδειγμάτων 8.5.1, 8.5.2 και 8.5.3.

8.5.2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+1}\,dx, \quad \mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

με την μέθοδο του παραδείγματος 8.5.4.

8.5.3. Αν $0 < a < 1$, υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-a\cos\theta)^2}\,d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta$$

με την μέθοδο του παραδείγματος 8.5.7.

8.5.4. Αν $-1 < a < 1$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{x^2+3x+2}\,dx$$

με τις μεθόδους του παραδείγματος 8.5.6.

8.5.5. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx$$

με την μέθοδο του παραδείγματος 8.5.5.

8.5.6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

8.5.7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+8}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+16}\,dx$$

μέσω του τύπου $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$ για $0 < a < 1$.

8.6 Η Αρχή Ορίσματος.

Αν η $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο χωρίο Ω και αν $\gamma : [a, b] \to \Omega$ είναι καμπύλη στο Ω (δηλαδή η τροχιά γ^* περιέχεται στο Ω), τότε ορίζεται η καμπύλη $f(\gamma) : [a, b] \to \mathbb{C}$ με τύπο:

$$f(\gamma)(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) \quad \text{για } t \in [a, b].$$

Με άλλα λόγια, η $f(\gamma)$ είναι η σύνθεση της f και της γ.

Αρχή Ορίσματος. *Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο αστρόμορφο χωρίο Ω εκτός από πόλους $z_1, \dots, z_N$ στο Ω. Επίσης, έστω ότι $\zeta_1, \dots, \zeta_M$ είναι οι ρίζες της f στο Ω. Τέλος, έστω κλειστή καμπύλη γ στο Ω στην τροχιά της οποίας δεν βρίσκεται κανένας πόλος και καμία ρίζα της f. Τότε*

$$\operatorname{ind}(f(\gamma); 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{M} \operatorname{ind}(\gamma; \zeta_j)\, n_j - \sum_{k=1}^{N} \operatorname{ind}(\gamma; z_k)\, m_k, \qquad (8.30)$$

όπου n_j είναι η πολλαπλότητα της ρίζας ζ_j και m_k είναι η τάξη του πόλου z_k.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων στην συνάρτηση $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Οι μεμονωμένες ανωμαλίες αυτής της συνάρτησης είναι οι πόλοι και οι ρίζες της f.
Αν n_j είναι η πολλαπλότητα της ρίζας ζ_j, τότε υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο Ω ώστε να ισχύει

$$f(z) = (z - \zeta_j)^{n_j} g(z), \quad g(\zeta_j) \neq 0.$$

Συνεπάγεται

$$f'(z) = n_j (z - \zeta_j)^{n_j - 1} g(z) + (z - \zeta_j)^{n_j} g'(z).$$

Επίσης, επειδή $g(\zeta_j) \neq 0$, υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει $g(z) \neq 0$ για $z \in D(\zeta_j; r)$. Άρα

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j}{z - \zeta_j} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{για } z \in D(\zeta_j; r) \setminus \{\zeta_j\}.$$

Επειδή η $\frac{g'(z)}{g(z)}$ είναι αναλυτική στον δίσκο $D(\zeta_j; r)$, το ζ_j είναι πόλος τάξης 1 της $\frac{f'(z)}{f(z)}$ με αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με n_j.
Αν m_k είναι η τάξη του πόλου z_k, τότε υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο Ω ώστε να ισχύει

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_k)^{m_k}}, \quad g(z_k) \neq 0.$$

Συνεπάγεται

$$f'(z) = -m_k \frac{g(z)}{(z - z_k)^{m_k + 1}} + \frac{g'(z)}{(z - z_k)^{m_k}}.$$

Επίσης, επειδή $g(z_k) \neq 0$, υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει $g(z) \neq 0$ για $z \in D(z_k; r)$. Άρα

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m_k}{z - z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \text{για } z \in D(z_k; r) \setminus \{z_k\}.$$

Επειδή η $\frac{g'(z)}{g(z)}$ είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_k; r)$, το z_k είναι πόλος τάξης 1 της $\frac{f'(z)}{f(z)}$ με αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με $-m_k$.
Τώρα, από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων συνεπάγεται η δεξιά ισότητα στην (8.30).
Η αριστερή ισότητα προκύπτει με μια απλή αλλαγή μεταβλητής. Αν θεωρήσουμε την παραμετρική εξίσωση $z = \gamma(t)$ με $t \in [a, b]$ της καμπύλης γ, τότε η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης $f(\gamma)$ είναι $w = f(\gamma(t))$ με $t \in [a, b]$, και άρα:

$$\operatorname{ind}(f(\gamma); 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f(\gamma)} \frac{1}{w}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

□

Το γεωμετρικό περιεχόμενο της Αρχής Ορίσματος είναι το εξής:

Ο αριθμός των περιστροφών της καμπύλης $f(\gamma)$ γύρω από το 0 ισούται με τον συνολικό αριθμό περιστροφών της γ γύρω από τις ρίζες της f μείον τον συνολικό αριθμό περιστροφών της γ γύρω από τους πόλους της f.

Εδώ πρέπει να ξεκαθαρίσουμε το εξής. Όταν μετράμε τις ρίζες και τους πόλους της f παίρνουμε υπ' όψη μας τις πολλαπλότητές τους. Θεωρούμε ότι στη θέση μιας ρίζας ζ_j με πολλαπλότητα n_j βρίσκονται n_j ίδιες ρίζες. Το ίδιο ισχύει και για τους πόλους: θεωρούμε ότι στη θέση ενός πόλου z_k με πολλαπλότητα m_k βρίσκονται m_k ίδιοι πόλοι.

Αν η f δεν έχει πόλους στο αστρόμορφο χωρίο Ω, δηλαδή αν είναι αναλυτική στο Ω, τότε η Αρχή Ορίσματος λέει ότι *ο αριθμός των περιστροφών της καμπύλης $f(\gamma)$ γύρω από το 0 ισούται με τον συνολικό αριθμό περιστροφών της γ γύρω από τις ρίζες της f*. Αν μάλιστα η καμπύλη γ είναι τέτοια ώστε για κάθε z που δεν ανήκει στην τροχιά της να ισχύει είτε $\mathrm{ind}(\gamma; z) = 1$ είτε $\mathrm{ind}(\gamma; z) = 0$, τότε η αρχή ορίσματος λέει ότι *ο αριθμός των περιστροφών της καμπύλης $f(\gamma)$ γύρω από το 0 ισούται με το πλήθος των ριζών της f οι οποίες περικλείονται από την γ*.

Θεώρημα Rouché. *Έστω ότι οι f, g είναι αναλυτικές στο αστρόμορφο χωρίο Ω, και έστω κλειστή καμπύλη γ στο Ω. Αν ισχύει $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ για κάθε $z \in \gamma^*$, τότε ο συνολικός αριθμός περιστροφών της γ γύρω από τις ρίζες της f είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό περιστροφών της γ γύρω από τις ρίζες της g.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι, λόγω της σχέσης $|f(z)-g(z)| < |g(z)|$ για κάθε $z \in \gamma^*$, καμία από τις ρίζες των f, g δεν βρίσκεται πάνω στην τροχιά της γ.
Αν $\zeta_1, \dots, \zeta_M$ είναι οι ρίζες της f με πολλαπλότητες $n_1, \dots, n_M$ και $\eta_1, \dots, \eta_N$ είναι οι ρίζες της g με πολλαπλότητες $m_1, \dots, m_N$, τότε από την (8.30) συνεπάγεται

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{M} \mathrm{ind}(\gamma; \zeta_j)\, n_j, \qquad \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \sum_{l=1}^{N} \mathrm{ind}(\gamma; \eta_l)\, m_l.$$

Επομένως,

$$\sum_{j=1}^{M} \mathrm{ind}(\gamma; \zeta_j)\, n_j - \sum_{l=1}^{N} \mathrm{ind}(\gamma; \eta_l)\, m_l = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \Big(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\Big)\,dz \tag{8.31}$$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$ η οποία είναι αναλυτική στο Ω εκτός των ριζών της g οι οποίες είναι είτε πόλοι είτε αιρόμενες ανωμαλίες της h. Άρα η (8.30) συνεπάγεται

$$\mathrm{ind}(h(\gamma); 0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz. \tag{8.32}$$

Επειδή $\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$, από τις (8.31) και (8.32) έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{M} \mathrm{ind}(\gamma; \zeta_j)\, n_j - \sum_{l=1}^{N} \mathrm{ind}(\gamma; \eta_l)\, m_l = \mathrm{ind}(h(\gamma); 0). \tag{8.33}$$

Όμως, από την υπόθεση έχουμε ότι ισχύει $|h(z) - 1| < 1$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Δηλαδή η τροχιά της καμπύλης $h(\gamma)$ βρίσκεται μέσα στον δίσκο $D(1; 1)$ και επομένως δεν περιστρέφεται καμία φορά γύρω από το 0. Άρα η (8.33) λέει ότι $\sum_{j=1}^{M} \mathrm{ind}(\gamma; \zeta_j)\, n_j = \sum_{l=1}^{N} \mathrm{ind}(\gamma; \eta_l)\, m_l$. □

Ασκήσεις.

8.6.1. Έστω ότι η f είναι αναλυτική σε δίσκο $D(0; R)$ με $R > 1$ και ότι ισχύει $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in C(0; 1)$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(z) = z^n$ έχει ακριβώς n λύσεις στον δίσκο $D(0; 1)$.

8.6.2. Βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα χωρία:
(i) Της συνάρτησης $z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ στον δίσκο $D(0;1)$.
(ii) Της συνάρτησης $2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$ στον δίσκο $D(0;1)$.
(iii) Της συνάρτησης $z^4 - 6z + 3$ στον δακτύλιο $D(0;1,2)$.
(iv) Της συνάρτησης $2z^5 - 6z^2 + z + 1$ στον δακτύλιο $D(0;1,2)$.
(v) Της συνάρτησης $z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3$ στο ημιεπίπεδο $\{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.