Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις παρακάτω ασκήσεις από το πρώτο κεφάλαιο των σημειώσεών μου.
Ενότητα 1.2: 1-6, 9-21, 23-24.
Ενότητα 1.3: 1-8.
Ενότητα 1.4: 1-4.
Ενότητα 1.5: 1, 3.
Ενότητα 1.6: 1-5.

Υποδείξεις/απαντήσεις.

1.2.1 Πολλαπλασιάστε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή.

1.2.2 Γράψτε το z στην μιγαδική μορφή του: $z = x + iy$.

1.2.3 Ομοίως.

1.2.4 Ομοίως.

1.2.5 Ομοίως.

1.2.6 Ομοίως.
Οι λύσεις της $|z| = z$ είναι οι $z = x$ με $x \geq 0$.
Οι λύσεις της $|z| = iz$ είναι οι $z = iy$ με $y \leq 0$.

1.2.9 Γράψτε το z στην μιγαδική μορφή του: $z = x + iy$. Αναπτύξτε το $z^2 + z + 1$ και βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του.
Απάντηση: $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.2.10 Γράψτε το z στην μιγαδική μορφή του: $z = x + iy$. Υψώστε την ανισότητα στο τετράγωνο.

1.2.11 Αυξήστε τον αριθμητή και μειώστε τον παρονομαστή του αριστερού λόγου, χρησιμοποιώντας την ανισότητα της άσκησης 1.2.8.

1.2.12 Χρησιμοποιήστε την $\operatorname{Im}(z_1 + z_2 + z_3) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_3$, την τριγωνική ανισότητα, και την $|\operatorname{Im} w| \leq |w|$.

1.2.13 Και στις δύο περιπτώσεις η μέγιστη τιμή είναι 35 και πιάνεται για $z = \pm 2i$.
Στην περίπτωση της $|z| = 2$ η ελάχιστη τιμή είναι 3 και πιάνεται για $z = \pm 2$.
Στην περίπτωση της $|z| \leq 2$ η ελάχιστη τιμή είναι 0 και πιάνεται για $z = \pm 1$ και για $z = \pm\sqrt{3}$.

1.2.14 Χρησιμοποιήστε την γνωστή ταυτότητα για την αριστερή μεριά και πολλαπλασιάστε τις παρενθέσεις στην δεξιά μεριά.

1.2.15 Υψώστε στο τετράγωνο χρησιμοποιώντας την γνωστή ταυτότητα για το τετράγωνο του μέτρου αθροίσματος.

1.2.16 Ομοίως.

1.2.17 Για την $z + \overline{z} = w$ το w πρέπει να είναι πραγματικό και οι λύσεις είναι $z = \frac{w}{2} + iy$ με $y \in \mathbb{R}$.
Για την $z - \overline{z} = w$ το w πρέπει να είναι φανταστικό και οι λύσεις είναι $z = x + \frac{w}{2}$ με $x \in \mathbb{R}$.

1.2.18 Ο x-άξονας.
Ο y-άξονας.
Η ευθεία με εξίσωση $y = x$.
Η ευθεία με εξίσωση $y = -x$.

1.2.19 Η τομή των ανοικτών δίσκων $D(0, 1)$ και $D(i, 1)$.
Το μέρος του ανοικτού δίσκου $D(0, 1)$ που βρίσκεται έξω από τον κλειστό δίσκο $\overline{D}(i, 1)$ και μέσα στο ανοικτό άνω ημιεπίπεδο.

1.2.20 Η ευθεία με εξίσωση $x = \frac{1}{2}$.
Το κλειστό ημιεπίπεδο που βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y \geq -1$.
Ο κλειστός δίσκος με κέντρο $(0, -2)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$.
Η ευθεία με εξίσωση $2x + y = -1$.
Το κλειστό ημιεπίπεδο που βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $x + y = 1$.
Τα σημεία (x, y) που βρίσκονται είτε επί της παραβολής με εξίσωση $x = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}$ είτε δεξιά της.

1.2.21 Γράψτε τα z, w στην μιγαδική μορφή τους: $z = x+iy$, $w = u+iv$. Τότε $\operatorname{Re}(\overline{w}z) = xu+yv$ και αυτό είναι το εσωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{0z} = (x, y)$, $\overrightarrow{0w} = (u, v)$.

1.2.23 Αν $\alpha \neq 1$, είναι ο κύκλος με κέντρο το $(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}, 0)$ και ακτίνα $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$.
Αν $\alpha = 1$, είναι ο y-άξονας.
Όταν $\alpha = 0$, είναι το σημείο 1.
Όταν $\alpha = +\infty$, είναι το σημείο -1.

1.2.24 Σε κάθε περίπτωση είναι υπερβολή.
1.3.1 $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+i)=\frac{\pi}{6}$, $\arg(\sqrt{3}+i)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$.
$\mathrm{Arg}(-1-\sqrt{3}i)=-\frac{2\pi}{3}$, $\arg(-1-\sqrt{3}i)=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$.
$\mathrm{Arg}(1-i)=-\frac{\pi}{4}$, $\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$.
1.3.2 Χρησιμοποιήστε την $|z|=|z_1||z_2|$ και την $\arg z=\arg z_1+\arg z_2$.
1.3.3 Τα z που βρίσκονται στην ημιευθεία με κορυφή το 0 (χωρίς το 0) και σε γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον θετικό x-άξονα, και στην ημιευθεία με κορυφή το 0 (χωρίς το 0) και σε γωνία $-\frac{\pi}{4}$ με τον θετικό x-άξονα.
1.3.4 Για το $\arg(z^2)$ είναι τα z που βρίσκονται στον y-άξονα (εκτός του 0).
Για το $\arg(z^3)$ είναι τα z που βρίσκονται στον αρνητικό x-άξονα, στην ημιευθεία με κορυφή το 0 (χωρίς το 0) και σε γωνία $\frac{\pi}{3}$ με τον θετικό x-άξονα, και στην ημιευθεία με κορυφή το 0 (χωρίς το 0) και σε γωνία $-\frac{\pi}{3}$ με τον θετικό x-άξονα.
Για το $\arg(z^4)$ είναι τα z που βρίσκονται στις δύο ευθείες με εξισώσεις $y=x$ και $y=-x$ (εκτός του 0).
1.3.8 Στην $\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$ κάντε πράξεις στην δεξιά μεριά.
1.4.1 Χρησιμοποιήστε μια πολική αναπαράσταση του $1+i$ και του $1-i$.
Απάντηση: $128(1-i)$, -1024, $64(-1+i)$.
1.4.2 Για το i^n είναι οι: ±1, $\pm i$.
Για το $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\big)^n$ είναι οι: ±1, $\pm i$, $\pm\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\pm i\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$.
Για το $\big(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^n$ είναι οι: ±1, $\pm\big(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$.
1.4.3 $(-1)^{1/2}$: $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, $\cos\big(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}\big)=-i$.
$(-1)^{1/3}$: $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\big(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\big)=-1$, $\cos\big(\frac{\pi}{3}+2\frac{2\pi}{3}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{3}+2\frac{2\pi}{3}\big)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$(-1)^{1/4}$: $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\big(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\big)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\big(\frac{\pi}{4}+2\frac{2\pi}{4}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{4}+2\frac{2\pi}{4}\big)=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\big(\frac{\pi}{4}+3\frac{2\pi}{4}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{4}+3\frac{2\pi}{4}\big)=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$.
1.4.4 Αν $u>0$, $v=0$: $(x,y)=(\pm\sqrt{u},0)$.
Αν $u<0$, $v=0$: $(x,y)=(0,\pm\sqrt{u})$.
Αν $u=0$, $v=0$: $(x,y)=(0,0)$.
Αν $v>0$: $(x,y)=\pm\Big(\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}\Big)$.
Αν $v<0$: $(x,y)=\pm\Big(\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}},-\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}\Big)$.
1.5.1 Στην περίπτωση του $[\theta_0,\theta_0+2\pi)$: Το σημείο $e^{i\theta}$ περιστρέφεται με την θετική φορά πάνω στον κύκλο $C(0,1)$ ξεκινώντας από το σημείο $e^{i\theta_0}$ και, μετά από μία πλήρη περιστροφή, πλησιάζοντας το ίδιο σημείο $e^{i\theta_0}$.
Στην περίπτωση του $(-\infty,+\infty)$: Το σημείο $e^{i\theta}$ περιστρέφεται με την θετική φορά πάνω στον κύκλο $C(0,1)$ αενάως, χωρίς αρχή ούτε τέλος.
1.5.3 (i) Πεδίο ορισμού των $\cos z,\sin z$: το $\mathbb{C}$. Πεδίο ορισμού του $\tan z$: $\mathbb{C}\setminus\big\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\big\}$.
Πεδίο ορισμού του $\cot z$: $\mathbb{C}\setminus\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.
(ii) Κάντε πράξεις. Θυμηθείτε ότι $\sinh y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$.
1.6.1 $\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i)=\ln 2+i\frac{\pi}{6}$, $\log(\sqrt{3}+i)=\ln 2+i\frac{\pi}{6}+i2k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$.
$\mathrm{Log}(1-i\sqrt{3})=\ln 2-i\frac{\pi}{3}$, $\log(1-i\sqrt{3})=\ln 2-i\frac{\pi}{3}+i2k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$.
$\mathrm{Log}(-1+i)=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{3\pi}{4}$, $\log(-1+i)=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{3\pi}{4}+i2k\pi$ με $k\in\mathbb{Z}$.
1.6.2 Για το $e^{\log z}$: θυμηθείτε τον ορισμό του $\log z$.
Για το $\log(e^z)$: Ποιές είναι οι λύσεις της $e^{z'}=e^z$ με άγνωστο το z';