Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις παρακάτω ασκήσεις από το δεύτερο κεφάλαιο των σημειώσεών μου.
Ενότητα 2.1: 1, 2(i-v)
Ενότητα 2.3: 1, 2.
Ενότητα 2.4: 1, 2, 3, 6.
Ενότητα 2.5: 1, 2, 4.

Υποδείξεις/απαντήσεις.

2.1.1 Για τα ανοικτά σύνολα: πάρτε οποιοδήποτε σημείο του συνόλου και δείτε ότι υπάρχει ανοικτός δίσκος με κέντρο αυτό το σημείο ο οποίος περιέχεται στο σύνολο. Για τα κλειστά σύνολα: αποδείξτε (όπως πριν) ότι το συμπληρωματικό σύνολο είναι ανοικτό.

2.1.2 (i) Ούτε ανοικτό, ούτε κλειστό. Εσωτερικά σημεία: κανένα. Συνοριακά σημεία: τα σημεία του $[0, 1]$. Εξωτερικά σημεία: τα σημεία του $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$. Οριακά σημεία: τα σημεία του $[0, 1]$.

(ii) Κλειστό. Εσωτερικά σημεία: κανένα. Συνοριακά σημεία: τα σημεία του $[0, 1]$. Εξωτερικά σημεία: τα σημεία του $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$. Οριακά σημεία: τα σημεία του $[0, 1]$.

(iii) Ούτε ανοικτό, ούτε κλειστό. Εσωτερικά σημεία: κανένα. Συνοριακά σημεία: τα σημεία του $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Εξωτερικά σημεία: τα σημεία του $\mathbb{C} \setminus \big(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}\big)$. Οριακά σημεία: τα σημεία του $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(iv) Κλειστό. Εσωτερικά σημεία: κανένα. Συνοριακά σημεία: τα σημεία του $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Εξωτερικά σημεία: τα σημεία του $\mathbb{C} \setminus \big(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}\big)$. Οριακά σημεία: τα σημεία του $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(v) Ούτε ανοικτό, ούτε κλειστό. Εσωτερικά σημεία: κανένα. Συνοριακά σημεία: όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί. Εξωτερικά σημεία: κανένα. Οριακά σημεία: όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί.

2.3.1 Για την (n^2): Ως ακολουθία στο $\mathbb{R}$, όριο $= +\infty$. Ως ακολουθία στο $\mathbb{C}$, όριο $= \infty$.

2.3.2 Φτιάξτε προσεκτικά το σχήμα.

(i) Όταν το z_n είναι κοντά στο z, η ημιευθεία με κορυφή το 0 που διέρχεται από το z_n είναι κοντά στην ημιευθεία με κορυφή το 0 που διέρχεται από το z. Άρα η πρωτεύουσα γωνία του z_n είναι περίπου ίση με την πρωτεύουσα γωνία του z.

(ii) Κοινό όριο το -1. Πρωτεύον όρισμα του $-1 + \frac{i}{n}$ είναι το $\pi - \arctan \frac{1}{n}$ και τείνει στο π. Πρωτεύον όρισμα του $-1 - \frac{i}{n}$ είναι το $-\pi + \arctan \frac{1}{n}$ και τείνει στο $-\pi$. Προφανώς, το πρωτεύον όρισμα του $-1 + (-1)^n \frac{i}{n}$ δεν έχει όριο.

(iii) Το (i) συμβαίνει όταν τα z_n είναι τελικά στο άνω ημιεπίπεδο, και το (ii) όταν τα z_n είναι τελικά στο κάτω ημιεπίπεδο. Το (iii) συμβαίνει όταν δεν συμβαίνουν τα (i) και (ii), οπότε χωρίζουμε τα z_n σε εκείνα που είναι στο άνω ημιεπίπεδο και σε εκείνα που είναι στο κάτω ημιεπίπεδο.

2.4.1 Προφανώς, φραγμένο. Δείτε ότι το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό (με δίσκους).

2.4.2 Προφανώς, φραγμένο. Δείτε ότι το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό (με δίσκους).

2.4.3 Πρώτος τρόπος: K φραγμένο συνεπάγεται F φραγμένο.
Δεύτερος τρόπος. Πάρτε τυχαία ακολουθία στο F. Αυτή είναι και στο K. Άρα έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του K (γιατί;). Δείτε ότι στοιχείο αυτό είναι στοιχείο και του F (μήπως επειδή το F είναι κλειστό και η υπακολουθία είναι ακολουθία στο F;).

2.4.6 (i) Από τον ορισμό της $\operatorname{diam} K$ ως supremum, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $z_n, w_n \in K$ ώστε $\operatorname{diam} K - \frac{1}{n} < |z_n - w_n| \leq \operatorname{diam} K$. Η (z_n) έχει υπακολουθία (z_{n_k}) που συγκλίνει σε κάποιο $z_0 \in K$ (γιατί;). Η (w_{n_k}) έχει υπακολουθία $(w_{n_{k_l}})$ που συγκλίνει σε κάποιο $w_0 \in K$ (γιατί;). Από $z_{n_{k_l}} \to z_0$ (γιατί;) και $w_{n_{k_l}} \to w_0$ συνεπάγεται $|z_{n_{k_l}} - w_{n_{k_l}}| \to |z_0 - w_0|$, οπότε $|z_0 - w_0| = \operatorname{diam} K$ (γιατί;).

(ii) Θεωρήστε το $d = \inf\{|z - w| \,|\, w \in F\}$, και σκεφτείτε όπως στο (i) με το d και το $d + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Θεωρήστε το $d = \inf\{|z - w| \,|\, z \in K, w \in F\}$, και σκεφτείτε όπως στο (ii) με το d και το $d + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μετά, όπως στο (i).

2.5.1 (i) Όχι: ανοικτό αλλά όχι συνεκτικό.

(ii) Ναι: ανοικτό ημιεπίπεδο.

(iii) Όχι.

(iv) Ναι.

(v) Ναι.

(vi) Όχι.

2.5.2 Πρώτα δείτε ότι το $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι ανοικτό, αφού το A είναι ανοικτό: πάρτε σημείο z του $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, οπότε υπάρχει ανοικτός δίσκος με κέντρο το z που περιέχεται στο A, και μετά να τον μικρύνετε ώστε να μην περιέχει κανένα από τα $a_1, \ldots, a_n$, και τότε θα περιέχεται στο $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.
Κατόπιν, πάρτε z', z'' στο $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Αυτά είναι στο A, οπότε υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A που τα συνδέει. Αν τυχόν η πολυγωνική γραμμή περνάει από κάποια από τα $a_1, \ldots, a_n$, αλλάξτε την λίγο ώστε να παραμείνει στο A και να μην περνάει από κανένα από τα $a_1, \ldots, a_n$.

2.5.4 Π.χ. δύο μισοφέγγαρα (σαν αυτά στη σημαία της φίλης Τουρκίας) που στέκονται αντικρυστά και τέμνονται στις άκρες τους (όπως όταν πιανόμαστε δύο-δύο αντικρυστά με τα χέρια και σχηματίζουμε κύκλο).