Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις παρακάτω ασκήσεις από το τέταρτο και από το πέμπτο κεφάλαιο των σημειώσεών μου.
Ενότητα 4.4: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8.
Ενότητα 5.1: 1.
Ενότητα 5.2: 2, 3, 5, 6.
Ενότητα 5.3: 1.

Υποδείξεις/απαντήσεις.

4.4.1 (i) Όλα είναι ίσα με 0.

(ii) $i\,\mathrm{Im}(\overline{z_0}z_1 + \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_0)$.

4.4.2 Για το πρώτο χρησιμοποιήστε παραμετρική εξίσωση $\gamma(t) = e^{it}$ με $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Για το δεύτερο την $\gamma(t) = e^{-it}$ με $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$. Και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα με -1.

(ii) Το πρώτο είναι ίσο με $i\frac{\pi}{2}$. Το δεύτερο είναι ίσο με $-i\frac{3\pi}{2}$.

4.4.3 (i) 0, (ii) $2i$, (iii) $2i$.

4.4.4 $z = \gamma(t) = t + it^2$ με $-1 \leq t \leq 1$. Το ολοκλήρωμα είναι ίσο με $i\frac{6}{5}$.

4.4.6 Βρείτε την μέγιστη τιμή του $\left|\frac{1}{z^4}\right| = \frac{1}{|z|^4}$ στο ευθ. τμήμα $[1, i]$: σκεφτείτε γεωμετρικά για να βρείτε την ελάχιστη απόσταση $|z - 0| = |z|$ σημείου z του ευθ. τμήματος $[1, i]$ από το 0. Ποιό είναι το μήκος του ευθ. τμήματος $[1, i]$;

5.1.1 Για όλες τις συναρτήσεις πάρτε τυχαίο $z_0 = x_0 + iy_0$ και δουλέψτε με το $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Για τις τρείς πρώτες συναρτήσεις αποδείξτε ότι το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ όταν το z τείνει στο z_0 οριζόντια και το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ όταν το z τείνει στο z_0 κατακόρυφα είναι διαφορετικά.

Για την τέταρτη συνάρτηση αποδείξτε ότι το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ όταν το z τείνει στο z_0 οριζόντια είναι ίσο με $2x_0$ και το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ όταν το z τείνει στο z_0 κατακόρυφα είναι ίσο με 0. Άρα αν $x_0 \neq 0$, τότε η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Αν $x_0 = 0$, δηλαδή αν το $z_0 = iy_0$ είναι στον φανταστικό άξονα, τότε τα δύο όρια (στην οριζόντια και στην κατακόρυφη κατεύθυνση) είναι ίσα, αλλά αυτό δεν είναι αρκετό για να υπάρχει το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ όταν το z τείνει στο z_0. Πάρτε τυχόν $z_0 = iy_0$, και τότε με $z = x + iy \to iy_0$ έχουμε ότι

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \leq \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2} \to 0.$$

Άρα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = iy_0$ με παράγωγο ίση με 0. Η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική στο $z_0 = iy_0$, διότι δεν υπάρχει κανένας ανοικτός δίσκος με κέντρο αυτό το σημείο σε όλα τα σημεία του οποίου η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη.

Η πέμπτη συνάρτηση είναι ανάλογη της τέταρτης. Είναι παραγωγίσιμη μόνο στα σημεία του πραγματικού άξονα και σε κανένα σημείο δεν είναι αναλυτική.

5.2.2 Χειριστείτε τις δύο πρώτες συναρτήσεις όπως στο παράδειγμα 5.2.2.

Για την τρίτη συνάρτηση δείτε ότι στο σημείο $0 = (0, 0)$ δεν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι του πραγματικού μέρους της συνάρτησης. Στα άλλα σημεία χειριστείτε την συνάρτηση όπως στο παράδειγμα 5.2.2.

Η τέταρτη συνάρτηση είναι το παράδειγμα 5.2.4, και η πέμπτη συνάρτηση είναι παρόμοια.

5.2.3 (i) Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5.1 για να περιοριστείτε στα σημεία $-1 = (-1, 0)$ και $1 = (1, 0)$. Μετά χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5.2 γα να δείτε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσμη σ' αυτά τα δύο σημεία. Η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

(ii) Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5.1 για να αποκλείσετε τα σημεία (x, y) με $x \neq y$, δηλαδή τα σημεία που δεν είναι πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$. Μετά χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5.2 για να δείτε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσμη στα σημεία (x, y) με $x = y$. Η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

(iii) Από το Θεώρημα 5.1 φαίνεται αμέσως ότι η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο $z = (x, y)$, διότι δεν ισχύουν ταυτόχρονα οι $\sin y = 0$ και $\cos y = 0$.

(iv) Από το Θεώρημα 5.2 φαίνεται αμέσως ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο, και άρα είναι αναλυτική σε κάθε σημείο. Μπορείτε να εφαρμόσετε και την Πρόταση 5.8 με $\Omega = \mathbb{C}$.

5.2.5 Έστω $f = u + iv$ η μιγαδική μορφή της f.

(i) Ισχύει $v = 0$ στο Ω. Από τις εξισώσεις (C-R), που ικανοποιούνται σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1, έχουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι των u, v είναι ίσες με 0 στο Ω. Άρα από έναν τύπο για την f' συναρτήσει των μερικών παραγώγων των u, v προκύπτει ότι $f' = 0$ στο Ω.

(ii) Είναι $\overline{f} = u - iv$ η μιγαδική μορφή της $\overline{f}$. Συνδυάστε τις εξισώσεις (C-R) για τις u, v και για τις $u, -v$, και δείτε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι των u, v είναι ίσες με 0 στο Ω.

(iii) Αν $|f| = 0$ στο Ω, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές. Αν $|f| = c > 0$ στο Ω, τότε $\overline{f} = \frac{c^2}{f}$ στο Ω, και αναγόμαστε στο (ii). Στην ίδια περίπτωση υπάρχει και δεύτερος τρόπος. Έχουμε ότι $u^2 + v^2 = c^2$ (σταθερά) στο Ω. Παραγωγίστε ως προς x και βρείτε

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

στο Ω. Ομοίως, παραγωγίστε ως προς y και χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις (C-R), και τότε

$$v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

στο Ω. Δείτε τις δύο εξισώσεις σαν σύστημα με αγνώστους $\frac{\partial u}{\partial x}$ και $\frac{\partial v}{\partial x}$, και ορίζουσα $-u^2 - v^2 = -c^2 \neq 0$. Συμπεράνατε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι των u, v είναι ίσες με 0 στο Ω.

(iv) Ισχύει $au + bv = c$ στο Ω, όπου οι a, b είναι πραγματικές σταθερές όχι και οι δύο ίσες με 0, και η c είναι κι αυτή πραγματική σταθερά. Δουλέψτε με τον δεύτερο τρόπο του (iii).

(v) Ισχύει $|f - w_0| = r_0$ (σταθερά) στο Ω. Εφαρμόστε το αποτέλεσμα του (iii).

5.2.6 Παραγωγίστε την $e^{-z}f(z)$. Η παράγωγος είναι 0 στο χωρίο Ω.

5.3.1 Δείτε την συνάρτηση ως σύνθεση της $w = z - z_0$ και της $\operatorname{Log} w$, η οποία ορίζεται στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Φτιάξτε σχήμα και δείτε ότι το $w = z - z_0$ είναι στο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ αν και μόνο αν το z είναι στο $\mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι η οριζόντια ημιευθεία με κορυφή το σημείο z_0 και κατεύθυνση προς τα αριστερά. Άρα το πεδίο ορισμού της $\operatorname{Log}(z - z_0)$ είναι το χωρίο $\mathbb{C} \setminus L$. Με τον κανόνα σύνθεσης, η παράγωγος είναι $\frac{1}{z - z_0}$.