Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις παρακάτω ασκήσεις από το έκτο κεφάλαιο των σημειώσεών μου.
Ενότητα 6.1: 1, 2.
Ενότητα 6.3: 1, 2, 3.
Ενότητα 6.4: 1, 2, 3.
Ενότητα 6.5: 1.
Ενότητα 6.6: 1, 2, 3.

Υποδείξεις/απαντήσεις.

6.1.1 Για όλα τα ολοκληρώματα χρησιμοποιήστε γνωστή παράγουσα της ολοκληρωτέας συνάρτησης.
Ειδικά για το τέταρτο ολοκλήρωμα: στην περίπτωση που η τροχιά της γ δεν τέμνει τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα, δηλαδή περιέχεται στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον πρωτεύοντα κλάδο του λογαρίθμου $\operatorname{Log} z$ στο χωρίο αυτό (όπως σε ένα παράδειγμα σε κάποιο από τα τελευταία βίντεο). Στην άλλη περίπτωση, χρησιμοποιήστε αναλυτικό κλάδο του λογαρίθμου στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.
Οι απαντήσεις είναι: $12i$, $i2\sin 1$, 0, $i\pi$ ή $-i\pi$, $i(e - e^{-1})$, $i2\frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}$.

6.1.2 (i) Γράψτε $w = \frac{z-1}{z+1}$, και αποδείξτε ότι $-\infty < w \leq 0$ αν και μόνο αν $-1 < z \leq 1$.
(ii) Κανόνας σύνθεσης.
(iii) 0, $i\frac{\pi}{2}$.

6.3.1 (ii) Η παράγωγος του $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$ (ως συνάρτηση του z) είναι $\oint_\gamma \frac{1}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$. Αυτή είναι ίση με μηδέν, διότι η $\frac{1}{(\zeta-z)^2}$ (ως συνάρτηση του ζ) έχει παράγουσα την $-\frac{1}{\zeta - z}$ στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \{z\}$.
Και με τους τρείς τρόπους η απάντηση είναι: $i2\pi$.

6.3.2 (ii) Όπως στο (ii) της προηγούμενης άσκησης.

6.3.3 (i) Για το ευθ. τμήμα $[R, R+iy]$ χρησιμοποιήστε παραμετρική εξίσωση $z = R + it$ με $0 \leq t \leq y$. Κατόπιν θα δείτε ότι το μέτρο του $\int_{[R,R+iy]} e^{-z^2}\, dz$ είναι μικρότερο ή ίσο του $e^{-R^2} \int_0^y e^{t^2}\, dt$, το οποίο τείνει στο 0 όταν $R \to +\infty$. Ομοίως για το άλλο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.
(ii) Από Γενικό Θεώρημα Cauchy για αστρόμορφα χωρία (εδώ το $\mathbb{C}$):

$$\int_{[-R,R]} e^{-z^2}\, dz + \int_{[R,R+iy]} e^{-z^2}\, dz + \int_{[R+iy,-R+iy]} e^{-z^2}\, dz + \int_{[-R+iy,-R]} e^{-z^2}\, dz = 0.$$

Το ευθ. τμήμα $[-R, R]$ έχει παραμετρική εξίσωση $z = x$ με $-R \leq x \leq R$. Το ευθ. τμήμα $[R + iy, -R + iy]$ έχει παραμετρική εξίσωση $z = -x + iy$ με $-R \leq x \leq R$. Άρα

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx + \int_{[R,R+iy]} e^{-z^2}\, dz - \int_{-R}^{R} e^{-(-x+iy)^2}\, dx + \int_{[-R+iy,-R]} e^{-z^2}\, dz = 0.$$

Στο τρίτο ολοκλήρωμα κάντε αλλαγή από x σε $-x$:

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx + \int_{[R,R+iy]} e^{-z^2}\, dz - \int_{-R}^{R} e^{-(x+iy)^2}\, dx + \int_{[-R+iy,-R]} e^{-z^2}\, dz = 0.$$

Κατόπιν, πάρτε όριο όταν $R \to +\infty$ και βρείτε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

για $y > 0$. Για $y = 0$ η ισότητα είνα προφανής.
(iii) Η συνάρτηση e^{-x^2} είναι άρτια, οπότε $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Γράψτε την τελευταία ισότητα στο (ii):

$$e^{y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy)\, dx - ie^{y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2xy)\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή.

6.4.1 Χρησιμοποιήστε τον τύπο Cauchy για την e^z και τις παραγώγους της, με τον κύκλο $C(0; 1)$ και το σημείο 0 στον δίσκο $D(0; 1)$:

$$\oint_{C(0;1)} \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{2\pi i}{n!}.$$

Κατόπιν, χρησιμοποιήστε την παραμετρική εξίσωση $\zeta = \cos\theta + i\sin\theta$ για $0 \le \theta \le 2\pi$ και, μετά από πράξεις, βρείτε:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta - \sin\theta)\,d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{n!}.$$

6.4.2 Χρησιμοποιήστε τον τύπο Cauchy για κάθε συνάρτηση και τις παραγώγους της, με τον κύκλο $C(0;1)$ και το σημείο z στον δίσκο $D(0;1)$:

$$\oint_{C(0;1)} \frac{\zeta^m}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)z^{m-n}, & \text{αν } n \le m \\ 0, & \text{αν } n > m \end{cases}$$

$$\oint_{C(0;1)} \frac{e^{i\zeta}}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{2\pi i^{n+1}}{n!}e^{iz}.$$

$$\oint_{C(0;1)} \frac{\sin\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \begin{cases} \frac{2\pi i}{n!}(-1)^{n/2}\sin z, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \\ \frac{2\pi i}{n!}(-1)^{(n-1)/2}\cos z, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

$$\oint_{C(0;1)} \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \begin{cases} \frac{2\pi i}{n!}(e^z - e^{-z}), & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \\ \frac{2\pi i}{n!}(e^z + e^{-z}), & \text{αν } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Όλα τα ολοκληρώματα είναι ίσα με 0 όταν $z \notin \overline{D}(0;1)$, διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι, ως συνάρτηση του ζ, αναλυτική σε ανοικτό δίσκο λίγο μεγαλύτερο από τον $\overline{D}(0;1)$ (ώστε να μην περιέχει το σημείο z).

6.4.3 Βρείτε $a = 1$ και $b = c = -\frac{1}{2}$. Επομένως:

$$\oint_{C(0;r)} \frac{e^{\zeta}}{\zeta(\zeta^2+1)}\,d\zeta = \oint_{C(0;r)} \frac{e^{\zeta}}{\zeta}\,d\zeta - \frac{1}{2}\oint_{C(0;r)} \frac{e^{\zeta}}{\zeta - i}\,d\zeta - \frac{1}{2}\oint_{C(0;r)} \frac{e^{\zeta}}{\zeta + i}\,d\zeta.$$

Εφαρμόστε τον τύπο Cauchy. Αν $0 < r < +\infty$, το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με $2\pi i$.
Αν $0 < r < 1$, τα δύο άλλα ολοκληρώματα είναι ίσα με 0, διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι, ως συνάρτηση του ζ, αναλυτική σε ανοικτό δίσκο λίγο μεγαλύτερο από τον $\overline{D}(0;r)$ (ώστε να μην περιέχει τα σημεία $\pm i$).
Αν $1 < r < +\infty$, το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με $2\pi i e^{i}$ και το τρίτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με $2\pi i e^{-i}$. Κατόπιν κάντε πράξεις.
Για το $\oint_{C(0;r)} \frac{e^{\zeta}}{\zeta(\zeta^2+1)(\zeta^2+4)^2}\,d\zeta$ εργαστείτε με τον ίδιο τρόπο.

6.5.1 Από τις εκτιμήσεις Cauchy παίρνουμε:

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \le \frac{(n+1)!(A + Mr_0^n)}{r_0^{n+1}} \quad \text{για κάθε } r_0 > 0.$$

Με $r_0 \to +\infty$ παίρνουμε $f^{(n+1)}(z_0) = 0$ για κάθε z_0.
Άρα $f^{(n)}(z) = c$ σταθερή στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή, η $f^{(n-1)}(z) - cz$ έχει παράγωγο ίση με 0 στο $\mathbb{C}$. Άρα $f^{(n-1)}(z) - cz = d$ σταθερή στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή, η $f^{(n-2)}(z) - \frac{c}{2}z^2 - dz$ έχει παράγωγο ίση με 0 στο $\mathbb{C}$. Και ούτω καθεξής.

6.6.1 Επειδή η συνάρτηση $|e^z - 1|$ είναι συνεχής και τα δύο κλειστά ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι συμπαγή, η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή και στα δύο. Από την Αρχή Μεγίστου, η μέγιστη τιμή δεν πιάνεται στα αντίστοιχα ανοικτά ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Άρα εργαστείτε στα συνοριακά ευθ. τμήματά τους. Έτσι θα βρείτε μέγιστη τιμή ίση με $\sqrt{1+e^2}$ στο πρώτο και ίση με $\sqrt{1+e^4}$ στο δεύτερο.
Στο πρώτο κλειστό ορθ. παραλληλόγραμμο η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $|e^z - 1|$ είναι ίση με 0, διότι η συνάρτηση έχει τιμή ίση με 0 στο σημείο $z = 0$ το οποίο βρίσκεται μέσα στο ορθ. παραλληλόγραμμο. Στο δεύτερο κλειστό ορθ. παραλληλόγραμμο η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή

διότι είναι συνεχής (και το σύνολο είναι συμπαγές). Δείτε ότι η συνάρτηση δεν μηδενίζεται, οπότε η ελάχιστη τιμή είναι *θετική*. Εφαρμόστε την Αρχή Ελαχίστου και δείτε ότι η συνάρτηση δεν πιάνει την ελάχιστη τιμή της στο αντίστοιχο ανοικτό ορθ. παραλληλόγραμμο. Άρα εργαστείτε στα συνοριακά ευθ. τμήματά του, και θα βρείτε ελάχιστη τιμή ίση με $e-1$.

6.6.3 (i) Αποδείξτε ότι $\left|\frac{f(z)-K+1}{f(z)-K-1}\right| \leq 1$ για κάθε $z \in \Omega$, και $\left|\frac{f(z_0)-K+1}{f(z_0)-K-1}\right| = 1$. Να συμπεράνετε ότι η $\frac{f-K+1}{f-K-1}$ είναι σταθερή στο Ω, και από αυτό ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

(ii) Αποδείξτε ότι $|e^{f(z)}| \leq e^K$ για κάθε $z \in \Omega$, και $|e^{f(z_0)}| = e^K$. Να συμπεράνετε ότι η e^f είναι σταθερή στο Ω. Τώρα προσπαθήστε να συμπεράνετε ότι η f είναι σταθερή στο Ω. Αυτό δεν είναι τελείως απλό. Αν $e^f = c$ σταθερή στο Ω, τότε πάρτε ένα οποιοδήποτε $\log c$, έστω d (δηλαδή $e^d = c$), και δείτε ότι η συνάρτηση $\frac{f-d}{2\pi i}$ έχει μόνο ακέραιες τιμές στο Ω.