Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις παρακάτω ασκήσεις από το όγδοο κεφάλαιο των σημειώσεών μου.
Ενότητα 8.1: 1, 2, 3, 4, 5.
Ενότητα 8.3: 1, 2.
Ενότητα 8.4: 1, 3.
Ενότητα 8.5: 1 (τα δύο πρώτα ολοκληρώματα), 3.

Υποδείξεις/απαντήσεις.

8.1.1 $\pm\pi$.

8.1.2 Όλοι οι ακέραιοι. Π.χ. με $\gamma(t) = z + re^{int}$ όπου $n \in \mathbb{Z}$.

8.1.3 Χωρίστε το $\frac{2\zeta-1}{\zeta^2-\zeta}$ σε απλά κλάσματα, και σκεφτείτε όπως στην 8.1.1. Όλοι οι ακέραιοι.

8.1.4 Γεωμετρική απόδειξη.

8.1.5 Ξαναδείτε την περιγραφή της τεχνικής πριν από το Πόρισμα 6.2.

8.3.1 (i) Στο -2: ιδιάζον μέρος $\frac{1}{z+2}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1.

Στο -3: ιδιάζον μέρος $-\frac{1}{z+3}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο -1.

(ii) Στο 1: ιδιάζον μέρος $\frac{1}{4(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο $-\frac{1}{4}$.

Στο -1: ιδιάζον μέρος $\frac{1}{4(z+1)^2} + \frac{1}{4(z+1)}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\frac{1}{4}$.

(iii) Στο 0: ιδιάζον μέρος $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{z^n}{(-n)!}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1.

(iv) Στο 0: ιδιάζον μέρος $-\frac{1}{2z}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο $-\frac{1}{2}$.

(v) Στο 0: ιδιάζον μέρος $-\frac{1}{2z^2}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο 0.

(vi) Στο 0: ιδιάζον μέρος $\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο $-\frac{1}{6}$.

(vii) Στο 0: ιδιάζον μέρος $\frac{1}{z^4} - \frac{1}{2z^2}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο 0.

(viii) Στο 0: ιδιάζον μέρος $-\frac{2}{z^4} - \frac{2}{z^3} - \frac{4}{3z^2} - \frac{2}{3z}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο $-\frac{2}{3}$.

(ix) Στο 1: ιδιάζον μέρος $\frac{e^3}{(z-1)^4} + \frac{3e^3}{(z-1)^3} + \frac{9e^3}{2(z-1)^2} + \frac{9e^3}{2(z-1)}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\frac{9e^3}{2}$.

(x) Στο 0: ιδιάζον μέρος $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{z^n}{(-n+5)!}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\frac{1}{6!}$.

Στο 1: ιδιάζον μέρος $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{(z-1)^n}{(-n)!}$, ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1.

8.3.2 (i) Στο $k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$: ολοκληρωτικό υπόλοιπο $(-1)^k$. Δείτε το (iii) του παραδείγματος 7.7.2.

(ii) Στο $\frac{\pi}{2} + k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$: ολοκληρωτικό υπόλοιπο -1.

(iii) Στο $k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$: ολοκληρωτικό υπόλοιπο 0.

(iv) Στο $2k\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$: ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1.

(v) Στο $k\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$: ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\frac{(-1)^{k-1}}{2k^2\pi^2}$.

Στο 0: ολοκληρωτικό υπόλοιπο 0.

8.4.1 $2\pi i$, $\pi i(e + e^{-1} - 2)$, $\frac{2\pi i}{5!}$, 0, $-4\pi i$, $-\pi i$.

8.4.3 Αν n είναι ο βαθμός του p και m είναι ο βαθμός του q, δείτε ότι το $\lim_{z\to\infty} z^{m-n} r(z)$ είναι μιγαδικός αριθμός. Να συμπεράνετε ότι υπάρχουν $M \geq 0$ και $R_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|z|^{m-n}|r(z)| \leq M$ όταν $|z| > R_0$. Κατόπιν εκτιμήστε το $\oint_{C(0;R)} r(z)\,dz$ όταν $R > R_0$.

8.5.1 Στο πρώτο ολοκλήρωμα οι μεμονωμένες ανωμαλίες της ολοκληρωτέας συνάρτησης είναι οι όγδοες ρίζες του -1, και μας ενδιαφέρουν κυρίως εκείνες που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Το αποτέλεσμα (μετά από πάρα πολλές πράξεις) είναι $\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα οι μεμονωμένες ανωμαλίες της ολοκληρωτέας συνάρτησης είναι τα $\pm i$, $\pm 2i$, και μας ενδιαφέρουν κυρίως τα i, $2i$. Το αποτέλεσμα είναι $\frac{\pi}{2}$.

8.5.3 $\frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}$, $\frac{2\pi a^2}{1-a^2}$.