Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις πείτε αν είναι γραμμική ή όχι και προσδιορίστε την τάξη της.

   α. $x^2y'' + xy' + 2y = \sin x$. [Γραμμική τάξης 2.]

   β. $(1 + y^2)y'' + xy' + y = e^x$. [Μη-γραμμική τάξης 2.]

   γ. $y'''' + y''' + y'' + y' + y = 1$. [Γραμμική τάξης 4.]

   δ. $y' + xy^2 = 0$. [Μη-γραμμική τάξης 1.]

   ε. $y'' + \sin(x + y) = \sin x$. [Μη-γραμμική τάξης 2.]

   στ. $y''' + xy' + (\cos^2 x)y = x^3$. [Γραμμική τάξης 3.]

2. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε τη γενική λύση καθώς και τη λύση η οποία ικανοποιεί τη δοσμένη αρχική συνθήκη.

   α. $y' + 3y = x + e^{-2x}$, $y(0) = 2$. [Γενική λύση: $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2x} + ce^{-3x}$.]

   β. $y' - 2y = x^2e^{2x}$, $y(1) = 0$. [Γενική λύση: $y = \frac{1}{3}x^3e^{2x} + ce^{2x}$.]

   γ. $y' + y = xe^{-x} + 1$, $y(0) = 0$. [Γενική λύση: $y = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + 1 + ce^{-x}$.]

   δ. $y' - y = 2e^x$, $y(-1) = 2$. [Γενική λύση: $y = 2xe^x + ce^x$.]

   ε. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, $y(0) = 3$. [Γενική λύση: $y = x^2e^{-x^2} + ce^{-x^2}$.]

   στ. $(1 + x^2)y' + 4xy = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, $y(0) = 1$. [Γενική λύση: $y = \frac{\mathrm{Arctan}\, x}{(1+x^2)^2} + \frac{c}{(1+x^2)^2}$.]

   ζ. $y' + (\tan x)y = x\sin(2x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$. [Γενική λύση: $y = -2x\cos^2 x + \sin(2x) + c\cos x$.]

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε τη γενική λύση σε καθένα από τα κατάλληλα διαστήματα καθώς και τη λύση η οποία ικανοποιεί τη δοσμένη αρχική συνθήκη στο κατάλληλο διάστημα.

   α. $y' + \frac{1}{x}y = \sin x$, $y(\pi) = 0$. [Γενική λύση: $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{c}{x}$ στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.]

   β. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$, $y(-\pi) = 0$. [Γενική λύση: $y = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{c}{x^2}$ στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.]

   γ. $y' + (\cot x)y = 4\sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$. [Γενική λύση: $y = \frac{2x}{\sin x} - 2\cos x + \frac{c}{\sin x}$ στα διαστήματα $(k\pi, (k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.]

   δ. $y' + \frac{2(1+x)}{x(2+x)}y = \frac{1+3x^2}{x(2+x)}$, $y(-1) = 1$. [Γενική λύση: $y = \frac{x+x^3}{x(x+2)} + \frac{c}{x(x+2)}$ στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ και $(0, +\infty)$.]

4. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε τη γενική λύση στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και διερευνήστε αν κάποια από τις λύσεις είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.

   α. $xy' - y = x^2$. [Γενική λύση: $y = x^2 + cx$. Κάθε λύση είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

   β. $xy' + 2y = x^2 - x + 1$. [Γενική λύση: $y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{c}{x^2}$. Καμία λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

   γ. $x^2y' + 2xy = 1$. [Γενική λύση: $y = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$. Καμία λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

   δ. $xy' + 2y = e^x$. [Γενική λύση: $y = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{c}{x^2}$. Μόνο η λύση με $c = 1$ είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

ε. $xy' + y = \cos x$. [Γενική λύση: $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{c}{x}$. Μόνο η λύση με $c = 0$ είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

στ. $x^2y' + 3xy = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ [Γενική λύση: $y = -\frac{\cos x}{x^3} + \frac{c}{x^3}$. Καμία λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

ζ. $xy' + y = x \sin x$. [Γενική λύση: $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{c}{x}$. Μόνο η λύση με $c = 0$ είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

η. $x^2y' + 3xy = \sin x$. [Γενική λύση: $y = \frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2} + \frac{c}{x^3}$. Μόνο η λύση με $c = 0$ είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]