

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Δωδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Θεωρήστε τη συνήθη δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$ay'' + by' + cy = 0$$

με $a \neq 0$. Μετατρέψτε την σε σύστημα δύο συνήθων δ.ε. πρώτης τάξης γράφοντας $x_1 = y$, $x_2 = y'$.

2. Λύστε τα παρακάτω συστήματα και σχεδιάστε τις τροχιές των λύσεων.

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = 3x_1 + 6x_2 \\ x_2' = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$[x_1 = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}, x_2 = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}]$$

$$[x_1 = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-2t}, x_2 = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-2t}]$$

$$[x_1 = 2c_1 + 3c_2 e^t, x_2 = -c_1 - c_2 e^t]$$

3. Λύστε τα παρακάτω συστήματα και σχεδιάστε τις τροχιές των λύσεων.

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = -x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$[x_1 = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t, x_2 = c_1 e^t (\cos 2t + \sin 2t) + c_2 e^t (\sin 2t - \cos 2t)]$$

$$[x_1 = 2c_1 e^{-t} \sin 2t - 2c_2 e^{-t} \cos 2t, x_2 = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t]$$

$$[x_1 = 5c_1 \cos t + 5c_2 \sin t, x_2 = c_1 (2 \cos t + \sin t) + c_2 (2 \sin t - \cos t)]$$

4. Λύστε τα παρακάτω συστήματα και σχεδιάστε τις τροχιές των λύσεων.

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 8x_1 - 4x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = -6x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$[x_1 = 2c_1 e^t + c_2 (2t + 1)e^t, x_2 = c_1 e^t + c_2 t e^t]$$

$$[x_1 = c_1 + c_2 (t + \frac{1}{2}), x_2 = 2c_1 + c_2 (2t + \frac{1}{2})]$$

$$[x_1 = 2c_1 e^{-4t} + c_2 (2t - 1)e^{-4t}, x_2 = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}]$$