Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης Bernoulli
$$x^2y' = -2xy + y^3$$
καθορίζοντας προσεκτικά το διάστημα στο οποίο ορίζεται καθεμιά από αυτές.

2. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις προσδιορίστε το ανοικτό υποσύνολο του xy-επιπέδου για κάθε σημείο (x_0, y_0) του οποίου είναι εγγυημένη η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$.

   α. $y' = \frac{x-y}{2x+5y}$. [$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq -\frac{2}{5}x\}$.]
   β. $y' = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. [$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$.]
   γ. $y' = \frac{2xy}{1+y^2}$. [$\mathbb{R}^2$.]
   δ. $y' = \frac{3}{(x+y)^2}$. [$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq -x\}$.]
   ε. $y' = (x^2 + y^2)^{3/2}$. [$\mathbb{R}^2$.]
   στ. $y' = (x^2 + y^2)^{1/2}$. [$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.]

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών βρείτε όλες τις λύσεις καθώς και το διάστημα στο οποίο ορίζεται καθεμιά από αυτές.

   α. $y' = \frac{2x^3}{y}$. [$y = -\sqrt{x^4 + c}$, $y = \sqrt{x^4 + c}$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, αν $c \geq 0$, ή στα $(-\infty, -\sqrt[4]{|c|})$, $(\sqrt[4]{|c|}, +\infty)$, αν $c < 0$.]
   β. $y' = \frac{x}{y(1+x^2)}$. [$y = -\sqrt{\log(1 + x^2) + c}$, $y = \sqrt{\log(1 + x^2) + c}$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, αν $c > 0$, ή στα $(-\infty, -\sqrt{e^{|c|} - 1})$, $(\sqrt{e^{|c|} - 1}, +\infty)$, αν $c \leq 0$.]
   γ. $y' + (\sin x)y^2 = 0$. [$y = 0$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και $y = \frac{1}{c-\cos x}$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, αν $|c| > 1$, ή στα διαστήματα στα οποία ισχύει $\cos x \neq c$, αν $|c| \leq 1$.]
   δ. $y' = 4x\sqrt{y}$. [Όλες οι λύσεις ορίζονται στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και είναι οι εξής. (α) με $c > 0$: $y = (x^2 + c)^2$, (β) τέσσερις λύσεις με τύπο $y = 0$ ή $y = x^4$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$, (γ) με $c < 0$: οκτώ λύσεις με τύπο $y = 0$ ή $y = (x^2 + c)^2$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{|c|})$, $(-\sqrt{|c|}, \sqrt{|c|})$, $(\sqrt{|c|}, +\infty)$.]

4. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών βρείτε τη λύση που ικανοποιεί τη δοσμένη αρχική συνθήκη και το διάστημα στο οποίο ορίζεται.

   α. $y' = -\frac{xe^x}{y}$, $y(0) = 1$. [$y = \sqrt{2(1 - x)e^x - 1}$ στο διάστημα (a, b), όπου a, b είναι οι δύο λύσεις της $2(1 - x)e^x - 1 = 0$.]
   β. $y' = \frac{y^2}{x}$, $y(1) = 2$. [$y = \frac{2}{1-\log(x^2)}$ στο διάστημα $(0, \sqrt{e})$.]
   γ. $y' = \frac{2x}{y(1+x^2)}$, $y(0) = -2$. [$y = -\sqrt{4 + 2\log(1 + x^2)}$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.]
   δ. $y' = \frac{x(x^2+1)}{4y^3}$, $y(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. [$y = -\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.]
   ε. $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$, $y(0) = 1$. [$y = \tan(\frac{x^2}{2} + x + \frac{\pi}{4})$ στο διάστημα $(-1 - \sqrt{\frac{\pi+2}{2}}, -1 + \sqrt{\frac{\pi+2}{2}})$.]
   στ. $y' = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$, $y(0) = 0$. [$y = -x$ στο διάστημα $(-\infty, -a)$, όπου a είναι η μοναδική λύση της $t + e^t = 0$.]