

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις. Αν προκύψει αλγεβρική σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές x, y η οποία δεν λύνεται ως προς y , τότε αφήστε την ως έχει.

α. $y' = (x + y)^2$. [$y = -x + \tan(x + c)$ για $-\frac{\pi}{2} - c < x < \frac{\pi}{2} - c$.]

β. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$. [$y = x \tan(\log \frac{|x|}{c})$ για $-ce^{\pi/2} < x < -ce^{-\pi/2}$ ή $ce^{-\pi/2} < x < ce^{\pi/2}$ με $c > 0$.]

γ. $y' = \frac{x+3y}{x-y}$. [$(x + y) \log |x + y| + c(x + y) = -2x$.]

δ. $y' = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$. [$|y - x + 3| = c|y + x + 1|^3$.]

2. Λύστε τις παρακάτω πλήρεις εξισώσεις πρώτης τάξης. Αν προκύψει αλγεβρική σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές x, y η οποία δεν λύνεται ως προς y , τότε αφήστε την ως έχει.

α. $(2x+3) + (2y-2)y' = 0$. [$y = 1 \pm \sqrt{c - x^2 - 3x}$ για $\frac{3}{2} - \sqrt{c + \frac{9}{4}} < x < \frac{3}{2} + \sqrt{c + \frac{9}{4}}$, αν $c > -\frac{9}{4}$.]

β. $(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2 \cos x)y' = 0$. [$2y \cos x + e^x \sin y = c$.]

γ. $(3x^2 - 2xy + 2) + (6y^2 - x^2 + 3)y' = 0$. [$2y^3 + (3 - x^2)y + x^3 + 2x = c$.]

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε ολοκληρωτικό παράγοντα ώστε αυτή να γίνει πλήρης και λύστε την.

α. $(3x^2y + 2xy + y^3) + (x^2 + y^2)y' = 0$. [$\mu(x) = e^{3x}$, $y^3 + 3x^2y = ce^{-3x}$.]

β. $1 + (\frac{x}{y} - \sin y)y' = 0$. [$\mu(y) = y$, $xy + y \cos y - \sin y = c$.]

γ. $y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$. [$\mu(y) = \frac{e^{2y}}{y}$, $y = 0$, $xe^{2y} - \log |y| = c$.]