Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Παρατηρήστε ότι οι παρακάτω δ.ε. δεν περιέχουν το y και λύστε τις.

   α. $x^2y'' + 2xy' = 1$. [$y = \frac{c_1}{x} + c_2 + \log|x|$ στο $(-\infty, 0)$ ή στο $(0, +\infty)$.]

   β. $xy'' + y' = 1$. [$y = c_1 \log|x| + c_2 + x$ για στο $(-\infty, 0)$ ή στο $(0, +\infty)$.]

   γ. $y'' + x(y')^2 = 0$. [$y = \frac{2}{c_1} \operatorname{Arctan} \frac{x}{c_1} + c_2$ στο $(-\infty, +\infty)$, $y = -\frac{2}{x} + c$ στο $(-\infty, 0)$ ή στο $(0, +\infty)$ και $y = \frac{1}{c_1} \log\left|\frac{x-c_1}{x+c_1}\right| + c_2$ στο $(-\infty, -c_1)$ ή στο $(-c_1, c_1)$ ή στο $(c_1, +\infty)$ με $c_1 > 0$.]

2. Παρατηρήστε ότι οι παρακάτω δ.ε. δεν περιέχουν το x και λύστε τις με την εξής μέθοδο: θεωρήστε νέα άγνωστη συνάρτηση $u = y'$, αποδείξτε ότι $y'' = u\frac{du}{dy}$ και αντικαταστήστε στις εξισώσεις θεωρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το y.

   α. $yy'' + (y')^2 = 0$. [$y = \pm\sqrt{c_1x + c_2}$.]

   β. $y'' + y(y')^3 = 0$. [$y = c$ και $y^3 + c_1y = 6x + c_2$.]

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω δ.ε. βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι εγγυημένη η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης η οποία ικανοποιεί τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες σε οποιοδήποτε σημείο αυτών των διαστημάτων.

   α. $xy'' + 3y = x$. [$(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.]

   β. $y'' + 6y' + xy = 2\sin x$. [$(-\infty, +\infty)$.]

   γ. $x(x-1)y'' + 3xy' + 4y = 2$. [$(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$.]

   δ. $(1 + x^2)y'' + 4y' = e^x$. [$(-\infty, +\infty)$.]

4. Αν συμβολίσουμε $W(y_1, \dots, y_n)(x)$ την ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1, \dots, y_n$, αποδείξτε ότι
$$W(yy_1, \dots, yy_n)(x) = y^n(x)W(y_1, \dots, y_n)(x).$$

5. [α.] Ξεκινώντας με την περίπτωση $n = 2$, αποδείξτε ότι αν $W(x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1, \dots, y_n$, τότε η παράγωγος $W'(x)$ ισούται με την ορίζουσα που προκύπτει από την ορίζουσα Wronski όταν αντικαταστήσουμε στην τελευταία γραμμή τις $(n-1)$-οστές παραγώγους με τις n-οστές παραγώγους των $y_1, \dots, y_n$.
   [β.] Αποδείξτε ότι αν οι $y_1, \dots, y_n$ είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής δ.ε.
$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y^{(1)} + p_n(x)y = 0$$
   και $W(x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των $y_1, \dots, y_n$, τότε ισχύει
$$W'(x) = -p_1(x)W(x).$$
   Τέλος, βρείτε τύπο για την $W(x)$ και αποδείξτε ότι είτε $W(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ είτε $W(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ (όπου I είναι διάστημα στο οποίο οι $p_1(x), \dots, p_n(x)$ είναι συνεχείς).
   [γ.] Έστω y_1, y_2 δύο λύσεις της δ.ε.
$$y'' + \frac{3}{x}y' - (\sin x)y = 0.$$
   Αν $W(x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2 και αν $W(3) = 2$, υπολογίστε το $W(1)$. Μπορείτε να υπολογίσετε το $W(-1)$; [$W(1) = 54$. Όχι.]

6. [α.] Έστω y_1 λύση της ομογενούς γραμμικής δ.ε.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

όπου οι $p_1(x), p_2(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I.
Αν η y_1 δεν μηδενίζεται πουθενά στο I και αν y_2 είναι δεύτερη λύση της δ.ε., αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W(x)}{y_1^2}$$

όπου $W(x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2.
Κατόπιν χρησιμοποιήστε τον τύπο της $W(x)$ από το [β.] της προηγούμενης άσκησης για να βρείτε την y_2.
[β.] Γνωρίζοντας ότι η $y_1(x) = e^{-x}$ είναι λύση της δ.ε.

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

βρείτε δεύτερη λύση y_2 της δ.ε. ώστε οι y_1, y_2 να αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε. [$y_2(x) = xe^{-x}$.]
Γνωρίζοντας ότι η $y_1(x) = x$ είναι λύση της δ.ε.

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0,$$

βρείτε δεύτερη λύση y_2 της δ.ε. ώστε οι y_1, y_2 να αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε. [$y_2(x) = \frac{1}{x^2}$.]

7. Έστω ότι οι $p_1(x), p_2(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I και ότι οι y_1, y_2 αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ομογενούς γραμμικής δ.ε.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

[α.] Αποδείξτε ότι οι y_1, y_2 δεν μπορούν να μηδενίζονται στο ίδιο σημείο του I.
[β.] Αποδείξτε ότι οι y_1, y_2 δεν μπορούν να έχουν τοπικό ακρότατο στο ίδιο σημείο του I.
[γ.] Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της y_1 υπάρχει μοναδική ρίζα της y_2 και αντιστρόφως.