

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Λύστε τις παρακάτω δ.ε. με σταθερούς συντελεστές. Στην περίπτωση που αναφέρονται αρχικές συνθήκες βρείτε τη λύση που τις ικανοποιεί.

α. $y'' + 2y' - 3y = 0$. [$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$.]

β. $4y'' + 4y' + y = 0$. [$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$.]

γ. $y'' + 5y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -6$. [$y = 1 - e^{-5x}$.]

δ. $y'' + 9y = 0$. [$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$.]

ε. $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$. [$y = e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x)$.]

2. Για την δ.ε. με σταθερούς συντελεστές

$$ay'' + by' + cy = 0$$

αποδείξτε τα εξής.

α. Αν $a, b, c > 0$, τότε κάθε λύση της δ.ε. έχει όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.

β. Αν $a, c > 0$ και $b = 0$, τότε κάθε λύση της δ.ε. είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ αλλά υπάρχουν λύσεις της δ.ε. που δεν έχουν όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.

γ. Αν $a, b > 0$ και $c = 0$, τότε κάθε λύση της δ.ε. έχει πεπερασμένο όριο στο $+\infty$.

3. Λύστε τις παρακάτω δ.ε. με σταθερούς συντελεστές. Στην περίπτωση που αναφέρονται αρχικές συνθήκες βρείτε τη λύση που τις ικανοποιεί.

α. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. [$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x$.]

β. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. [$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$.]

γ. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 4y^{(2)} = 0$. [$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)e^{2x}$.]

δ. $y^{(4)} + y = 0$. [$y = e^{kx}(c_1 \cos kx + c_2 \sin kx) + e^{-kx}(c_3 \cos kx + c_4 \sin kx)$, όπου $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.]

ε. $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y^{(3)} - 2y^{(2)} + y^{(1)} - y = 0$. [$y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) \cos x + (c_4 + c_5 x) \sin x$.]

4. Αν κάθε ρίζα του πολωνύμου $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$ έχει αρνητικό πραγματικό μέρος, αποδείξτε ότι κάθε λύση της δ.ε.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = 0$$

έχει όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.