Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών για να βρείτε τη γενική λύση των παρακάτω δ.ε.

   α. $y'' + y' - 2y = 2x$. $[y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - x - \frac{1}{2}.]$

   β. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$. $[y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x}.]$

   γ. $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$. $[y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x.]$

   δ. $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$. $[y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x + 4.]$

   ε. $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3$. $[y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} + 3.]$

   στ. $y^{(4)} + y^{(3)} = \sin 2x$. $[y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x} + \frac{1}{40}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x.]$

2. Γράψτε την κατάλληλη μορφή μιας ειδικής λύσης των παρακάτω δ.ε. χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Μην υπολογίσετε τις σταθερές.

   α. $y'' + 4y = x^2 \sin 2x + (6x+7)\cos 2x$. $[y_p = x(A_0 x^2 + A_1 x + A_2)\sin 2x + x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2)\cos 2x.]$

   β. $y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2+1)\sin 2x + 3e^{-x}\cos x + 4e^x$. $[y_p = (A_0 x^2 + A_1 x + A_2)e^x \sin 2x + (B_0 x^2 + B_1 x + B_2)e^x \cos 2x + e^{-x}(D\sin x + E\cos x) + Fe^x.]$

   γ. $y^{(4)} + 4y^{(2)} = \sin 2x + xe^x + 4$. $[y_p = Ax^2 + (B_0 x + B_1)e^x + x(C\cos 2x + D\sin 2x).]$

3. Αν $\lambda > 0$ και $\lambda \neq n\pi$ για $n = 1, \ldots, N$, βρείτε τη γενική λύση της δ.ε.

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin n\pi x.$$

   $[y = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\lambda^2 - n^2\pi^2}\sin n\pi x.]$

4. Λύστε τη δ.ε. $y'' + y = g(x)$ στο $[0, +\infty)$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \pi \\ \pi + \sin 2x, & \text{αν } \pi \leq x < +\infty \end{cases}$$

   με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

5. Βρείτε ειδική λύση των παρακάτω δ.ε. με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων.

   α. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$. $[y_p = e^x.]$

   β. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$. $[y_p = -\frac{2}{3}xe^{-x}.]$

   γ. $y'' + y = \tan x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. $[y_p = -(\cos x)\log(\tan x + \sec x).]$

   δ. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$. $[y_p = \frac{1}{30}e^{4x}.]$

6. Βρείτε με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων τη γενική λύση της δ.ε.

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3 \qquad \text{για } x > 0$$

   αφού αποδείξετε ότι οι x, xe^x είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. $[y = c_1 x + c_2 x e^x - 2x^2.]$

7. Βρείτε τύπο για τη γενική λύση της δ.ε. $y'' - 5y' + 6y = g(x)$, αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. $[y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \int_0^x (e^{3(x-t)} - e^{2(x-t)})g(t)\,dt.]$

8. Βρείτε τύπο για τη λύση της δ.ε. $y'' + y = g(x)$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. $[y = y_0 \cos x + y_0' \sin x + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt.]$