

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τα χωρία του \mathbb{R}^2 στα οποία η παρακάτω δ.ε. είναι υπερβολικού, ελλειπτικού και παραβολικού τύπου.

$$u_{xx} - 2xu_{xy} + y^2u_{yy} + 4u_x + yu_y + xyu = e^x.$$

[Υπερβολική στα σημεία (x, y) με $|x| > |y|$. Ελλειπτική στα σημεία (x, y) με $|x| < |y|$. Παραβολική στα σημεία (x, y) με $|x| = |y|$.]

2. Λύστε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = x^2, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$[u(x, t) = x^2 + t^2 + \sin x \sin t.]$$

3. Έστω ότι η $u(x, t)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

όπου η ϕ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ισχύει $\phi(x) = 0$ για $x \leq 0$ και για $x \geq 1$ και $\phi(x) > 0$ για $0 < x < 1$. Προσδιορίστε (και σχεδιάστε) το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο ισχύει $u(x, t) > 0$. [$\{(x, t) \mid 0 < x - 2t < 1\} \cup \{(x, t) \mid 0 < x + 2t < 1\}$.]

4. Έστω ότι η $u(x, t)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

όπου η ψ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ισχύει $\psi(x) = 0$ για $x \leq 0$ και για $x \geq 1$ και $\psi(x) > 0$ για $0 < x < 1$. Προσδιορίστε (και σχεδιάστε) το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο ισχύει $u(x, t) > 0$. [$\{(x, t) \mid t > 0 \text{ και } -2t < x < 2t + 1\}$.]