Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις πρώτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις πείτε αν είναι γραμμική ή όχι και προσδιορίστε την τάξη της.

   α. $x^2y'' + xy' + 2y = \sin x$.

   β. $(1 + y^2)y'' + xy' + y = e^x$.

   γ. $y'''' + y''' + y'' + y' + y = 1$. [Γραμμική τάξης 4.]

   δ. $y' + xy^2 = 0$. [Μη-γραμμική τάξης 1.]

   ε. $y'' + \sin(x + y) = \sin x$. [Μη-γραμμική τάξης 2.]

   στ. $y''' + xy' + (\cos^2 x)y = x^3$. [Γραμμική τάξης 3.]

Λύση. [α] Θεωρούμε τον τελεστή $\mathcal{L}(y) = x^2y'' + xy' + 2y$. (Συγκεντρώνουμε όλους τους όρους οι οποίοι περιέχουν y.) Τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y_1 + y_2) &= x^2(y_1 + y_2)'' + x(y_1 + y_2)' + 2(y_1 + y_2)\\ &= x^2(y_1'' + y_2'') + x(y_1' + y_2') + 2(y_1 + y_2)\\ &= (x^2y_1'' + xy_1' + 2y_1) + (x^2y_2'' + xy_2' + 2y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(cy) &= x^2(cy)'' + x(cy)' + 2(cy)\\ &= x^2cy'' + xcy' + 2cy = c(x^2y'' + xy' + 2y) = c\mathcal{L}(y).\end{aligned}$$

Άρα ο τελεστής είναι γραμμικός, οπότε η εξίσωση είναι γραμμική και, προφανώς, δεύτερης τάξης.

[β] Θεωρούμε τον τελεστή $\mathcal{L}(y) = (1 + y^2)y'' + xy' + y$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y_1 + y_2) &= (1 + (y_1 + y_2)^2)(y_1 + y_2)'' + x(y_1 + y_2)' + (y_1 + y_2)\\ &= (1 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2)(y_1'' + y_2'') + x(y_1' + y_2') + (y_1 + y_2).\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2) = (1 + y_1^2)y_1'' + xy_1' + y_1 + (1 + y_2^2)y_2'' + xy_2' + y_2.$$

Άρα η ισότητα $\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}(y_1) + \mathcal{L}(y_2)$ ισοδυναμεί, μετά από πράξεις, με την

$$y_1^2y_2'' + 2y_1y_2y_1'' + 2y_1y_2y_2'' + y_2^2y_1'' = 0.$$

Αυτή η ισότητα δεν ισχύει για κάποια ζεύγη συναρτήσεων y_1, y_2. Π.χ. για $y_1 = y_2 = x^2$ η ισότητα γράφεται $12x^4 = 0$ και αυτό δεν ισχύει: η συνάρτηση $12x^4$ δεν ταυτίζεται με τη μηδενική συνάρτηση.

Άρα ο τελεστής δεν είναι γραμμικός, οπότε και η εξίσωση δεν είναι γραμμική. Η εξίσωση είναι δεύτερης τάξης.

Ένας άλλος τρόπος να δούμε ότι ο τελεστής $\mathcal{L}(y) = (1 + y^2)y'' + xy' + y$ δεν είναι γραμμικός είναι να ελέγξουμε την ισότητα $\mathcal{L}(cy) = c\mathcal{L}(y)$. Η ισότητα αυτή, μετά από πράξεις, ισοδυναμεί με την

$$c^3y^2y'' = cy^2y''$$

η οποία δεν ισχύει για κάποιους αριθμούς c και κάποιες συναρτήσεις y. Π.χ. για $c = 2$ και $y = x^2$ η ισότητα γράφεται $12x^4 = 0$ η οποία και πάλι δεν είναι σωστή (ως ισότητα συναρτήσεων).

2. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε τη γενική λύση καθώς και τη λύση η οποία ικανοποιεί τη δοσμένη αρχική συνθήκη.

   α. $y' + 3y = x + e^{-2x}$, $y(0) = 2$.

   β. $y' - 2y = x^2 e^{2x}$, $y(1) = 0$. [Γενική λύση: $y = \frac{1}{3}x^3 e^{2x} + ce^{2x}$.]

   γ. $y' + y = xe^{-x} + 1$, $y(0) = 0$. [Γενική λύση: $y = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} + 1 + ce^{-x}$.]

   δ. $y' - y = 2e^x$, $y(-1) = 2$. [Γενική λύση: $y = 2xe^x + ce^x$.]

   ε. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, $y(0) = 3$.

   στ. $(1 + x^2)y' + 4xy = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, $y(0) = 1$.

   ζ. $y' + (\tan x)y = x \sin(2x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Λύση. [α] Γράφουμε $p(x) = 3$ και βρίσκουμε *μία* αντιπαράγωγο $P(x)$ της $p(x)$. Η γενική αντιπαράγωγος είναι η

$$\int p(x)\, dx = \int 3\, dx = 3x + c.$$

Άρα επιλέγουμε

$$P(x) = 3x.$$

(Επιλέξαμε $c = 0$ αλλά οποιαδήποτε άλλη τιμή του c είναι επιτρεπτή.)
Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{3x}$$

και πολλαπλασιάζουμε με αυτόν την διαφορική εξίσωση παίρνοντας τις διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις

$$\begin{aligned}
e^{3x}y' + 3e^{3x}y &= xe^{3x} + e^x \\
(e^{3x}y)' &= xe^{3x} + e^x \\
e^{3x}y &= \int (xe^{3x} + e^x)\, dx = \int xe^{3x}\, dx + \int e^x\, dx = \frac{1}{3}\int x(e^{3x})'\, dx + e^x \\
&= \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx + e^x = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + e^x + c. \\
y &= \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2x} + ce^{-3x}.
\end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.
Για να βρούμε τη λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$, θέτουμε στη γενική λύση $x = 0$ και $y = 2$ και έχουμε

$$2 = -\frac{1}{9} + 1 + c$$

και άρα $c = \frac{10}{9}$. Άρα η λύση είναι η

$$y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2x} + \frac{10}{9}e^{-3x}.$$

[ε] Γράφουμε $p(x) = 2x$ και τότε

$$\int p(x)\, dx = \int 2x\, dx = x^2 + c.$$

Επιλέγουμε

$$P(x) = x^2.$$

Πολλαπλασιάζουμε την δ.ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{x^2}$$

και παίρνουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις

$$\begin{aligned} e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y &= 2x \\ (e^{x^2}y)' &= 2x \\ e^{x^2}y &= \int 2x\,dx = x^2 + c. \\ y &= x^2e^{-x^2} + ce^{-x^2}. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση της δ.ε.
Για να βρούμε τη λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 3$, θέτουμε στη γενική λύση $x = 0$ και $y = 3$ και έχουμε

$$3 = c.$$

Άρα η λύση είναι η

$$y = x^2e^{-x^2} + 3e^{-x^2}.$$

[στ] Επειδή $1 + x^2 \neq 0$ για κάθε x, η δ.ε. είναι ισοδύναμη με την

$$y' + \frac{4x}{1+x^2}y = \frac{1}{(1+x^2)^3}.$$

Γράφουμε $p(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ και βρίσκουμε

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{4x}{1+x^2}\,dx = 2\int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = 2\log(1+x^2) + c.$$

Επιλέγουμε

$$P(x) = 2\log(1+x^2).$$

Πολλαπλασιάζουμε την δ.ε. (στη δεύτερη μορφή: $y' + \ldots$) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{2\log(1+x^2)} = (1+x^2)^2$$

και παίρνουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις

$$\begin{aligned} (1+x^2)^2y' + 4x(1+x^2)y &= \frac{1}{1+x^2} \\ \big((1+x^2)^2y\big)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (1+x^2)^2y &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Arctan}\,x + c. \\ y &= \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2} + \frac{c}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση της δ.ε.
Για να βρούμε τη λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$, θέτουμε στη γενική λύση $x = 0$ και $y = 1$ και έχουμε

$$1 = c.$$

Άρα η λύση είναι η

$$y = \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

[ζ] Στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ η $p(x) = \tan x$ είναι συνεχής και

$$\int p(x)\,dx = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log\cos x + c.$$

(Η $\cos x$ είναι θετική στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)
Επιλέγουμε

$$P(x) = -\log\cos x.$$

Πολλαπλασιάζουμε την δ.ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{-\log\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

και παίρνουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x}y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x}y &= \frac{x\sin(2x)}{\cos x} = \frac{2x\sin x\cos x}{\cos x} = 2x\sin x \\
\Big(\frac{1}{\cos x}y\Big)' &= 2x\sin x \\
\frac{1}{\cos x}y &= \int 2x\sin x\,dx = -\int 2x(\cos x)'\,dx = -2x\cos x + 2\int \cos x\,dx \\
&= -2x\cos x + 2\sin x + c. \\
y &= -2x\cos^2 x + 2\sin x\cos x + c\cos x \\
&= -2x\cos^2 x + \sin(2x) + c\cos x.
\end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση της δ.ε.
Για να βρούμε τη λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(\frac{\pi}{4}) = 0$, θέτουμε στη γενική λύση $x = \frac{\pi}{4}$ και $y = 0$ και έχουμε

$$0 = -\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{c}{\sqrt{2}}$$

οπότε $c = \frac{\pi-4}{2\sqrt{2}}$. Άρα η λύση είναι η

$$y = -2x\cos^2 x + \sin(2x) + \frac{\pi - 4}{2\sqrt{2}}\cos x.$$

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε τη γενική λύση σε καθένα από τα κατάλληλα διαστήματα καθώς και τη λύση η οποία ικανοποιεί τη δοσμένη αρχική συνθήκη στο κατάλληλο διάστημα.

   α. $y' + \frac{1}{x}y = \sin x$, $y(\pi) = 0$.

   β. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$, $y(-\pi) = 0$. [Γενική λύση: $y = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{c}{x^2}$ στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.]

   γ. $y' + (\cot x)y = 4\sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

   δ. $y' + \frac{2(1+x)}{x(2+x)}y = \frac{1+3x^2}{x(2+x)}$, $y(-1) = 1$.

Λύση. [α] Η $p(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, οπότε θα δουλέψουμε ξεχωριστά σε καθένα από τα διαστήματα αυτά. Επειδή οι πράξεις που θα κάνουμε θα είναι σχεδόν ίδιες για τα δύο διαστήματα, θα συνεχίσουμε ταυτόχρονα στα δύο διαστήματα και όπου χρειάζεται θα αναφέρουμε τις όποιες διαφορές.
Έχουμε

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c.$$

Επιλέγουμε
$$P(x) = \log|x|$$
και πολλαπλασιάζουμε την δ.ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα
$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{\log|x|} = |x|.$$
Ο ολοκληρωτικός παράγων είναι ίσος με $\mu(x) = x$ στο $(0, +\infty)$ και ίσος με $\mu(x) = -x$ στο $(-\infty, 0)$. Όμως, επειδή το να πολλαπλασιάσουμε με $-x$ την δ.ε. είναι ισοδύναμο με το να την πολλαπλασιάσουμε με x (διότι θα πάρουμε ισοδύναμη δ.ε.), θεωρούμε ως ολοκληρωτικό παράγοντα τον
$$\mu(x) = x$$
και για τα δύο διαστήματα. Παίρνουμε, λοιπόν, τις ισοδύναμες διαδοχικές εξισώσεις:
$$\begin{aligned} xy' + y &= x\sin x \\ (xy)' &= x\sin x \\ xy &= \int x\sin x\,dx = -\int x(\cos x)'\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + c. \\ y &= -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{c}{x}. \end{aligned}$$
Αυτή, λοιπόν, είναι η γενική λύση. Πρέπει, όμως, να κάνουμε το εξής σημαντικό σχόλιο. Η λύση που βρήκαμε είναι η γενική λύση στο $(-\infty, 0)$ και είναι, επίσης, η γενική λύση στο $(0, +\infty)$. *Δεν είναι, όμως, η γενική λύση στην ένωση* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$! Αν θέλουμε να γράψουμε τη γενική λύση στην ένωση των διαστημάτων, πρέπει να γράψουμε
$$y = \begin{cases} -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{c_1}{x} & \text{στο } (-\infty, 0) \\ -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{c_2}{x} & \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$$
Επεξήγηση: Στην προηγούμενη διαδικασία η σταθερά c προέκυψε όταν διαγράψαμε πρώτη φορά την παράγωγο, δηλαδή όταν από την
$$(xy)' = x\sin x$$
προέκυψε η
$$xy = -x\cos x + \sin x + c.$$
Πώς δικαιολογείται αυτό; Επειδή $x\sin x = (-x\cos x + \sin x)'$, αυτό που συνέβη είναι ότι από την
$$(xy)' = (-x\cos x + \sin x)'$$
προέκυψε η
$$xy = -x\cos x + \sin x + c.$$
Αυτό συμβαίνει στην επίλυση οποιασδήποτε δ.ε. και πρέπει να το ξεκαθαρίσουμε. Γενικότερα, από την
$$f' = g'$$
προκύπτει
$$f = g + c.$$
Όμως, αυτή η συνεπαγωγή ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση ξένων διαστημάτων. Πράγματι, γράφοντας $h = f - g$, η $f' = g'$ ισοδυναμεί με $h' = 0$ και τώρα γνωρίζουμε ότι, *αν η παράγωγος συνάρτησης είναι ίση με* 0 *σε διάστημα, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο διάστημα* και άρα $h = c$, δηλαδή $f = g + c$. Το ότι, *αν η παράγωγος συνάρτησης είναι ίση με* 0

σε διάστημα, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο διάστημα, αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα Μέσης Τιμής** το οποίο ισχύει σε *διάστημα* και όχι σε ένωση ξένων διαστημάτων. Αν έχουμε δύο ξένα διαστήματα και αν $f' = g'$ στην ένωση των δύο διαστημάτων, τότε παίρνουμε ότι $f = g + c_1$ στο ένα διάστημα και $f = g + c_2$ στο άλλο διάστημα: η σταθερά που προκύπτει εξαρτάται από το διάστημα. Αν έχουμε τρία ή περισσότερα διαστήματα, τότε θα προκύψουν τρεις ή περισσότερες σταθερές.

Ξαναγυρνάμε στο πρόβλημά μας με την αρχική συνθήκη $y(\pi) = 0$. Το $x = \pi$ περιέχεται στο $(0, +\infty)$, οπότε θα καθορίσουμε την σταθερά c, και άρα τη λύση y, σ' αυτό το διάστημα. Θέτουμε στον τύπο της λύσης $x = \pi$ και $y = 0$ και έχουμε

$$0 = 1 + \frac{c}{\pi}$$

και άρα $c = -\pi$. Επομένως, η λύση είναι η

$$y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} - \frac{\pi}{x} \qquad \text{στο } (0, +\infty).$$

[γ] Η συνάρτηση $p(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(k\pi, (k+1)\pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$ και άρα εργαζόμαστε σε ένα οποιοδήποτε τέτοιο διάστημα. Έχουμε

$$\int p(x)\,dx = \int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + c$$

και επιλέγουμε

$$P(x) = \log|\sin x|.$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την δ.ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{\log|\sin x|} = |\sin x|.$$

Σε κάθε διάστημα $(k\pi, (k+1)\pi)$ με άρτιο k είναι $\mu(x) = \sin x$ και σε κάθε $(k\pi, (k+1)\pi)$ με περιττό k είναι $\mu(x) = -\sin x$. Επειδή το να πολλαπλασιάσουμε την δ.ε. με το $-\sin x$ είναι ισοδύναμο με το να την πολλαπλασιάσουμε με το $\sin x$, επιλέγουμε τελικά ως ολοκληρωρικό παράγοντα τον

$$\mu(x) = \sin x$$

για κάθε διάστημα $(k\pi, (k+1)\pi)$. Τώρα παίρνουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
(\sin x)y' + (\cos x)y &= 4\sin^2 x \\
\big((\sin x)y\big)' &= 4\sin^2 x \\
(\sin x)y &= 4\int \sin^2 x\,dx = 2\int (1 - \cos(2x))\,dx = 2x - \sin(2x) + c \\
y &= \frac{2x}{\sin x} - 2\cos x + \frac{c}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση σε κάθε διάστημα $(k\pi, (k+1)\pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$. (Η γενική λύση σε ενώσεις τέτοιων διαστημάτων έχει διαφορετικές σταθερές σε καθένα από τα διαστήματα της ένωσης.)

Η αρχική συνθήκη $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ καθορίζει τη λύση στο διάστημα $(0, \pi$ (με $k = 0$). Με $x = \frac{\pi}{2}$ και $y = 0$ στον τύπο της γενικής λύσης βρίσκουμε

$$0 = \pi + c,$$

οπότε $c = -\pi$ και η λύση είναι η

$$y = \frac{2x}{\sin x} - 2\cos x - \frac{\pi}{\sin x} \qquad \text{στο } (0, \pi).$$

[δ] Οι συναρτήσεις $p(x) = \frac{2(1+x)}{x(2+x)}$ και $\frac{1+3x^2}{x(2+x)}$ είναι συνεχείς στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ και $(0, +\infty)$. Επομένως, θα εργαστούμε σ' αυτά τα διαστήματα. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int p(x)\, dx &= \int \frac{2+2x}{x(2+x)}\, dx = \int \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{2+x}\Big)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{2+x}\, dx \\ &= \log|x| + \log|2+x| + c = \log|x(2+x)| + c.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε

$$P(x) = \log|x(2+x)|$$

και πολλαπλασιάζουμε την δ.ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{\log|x(2+x)|} = |x(2+x)|.$$

Στα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(0, +\infty)$ είναι $\mu(x) = x(2+x)$ και στο διάστημα $(-2, 0)$ είναι $\mu(x) = -x(2+x)$. Επειδή το να πολλαπλασιάσουμε την δ.ε. με το $-x(2+x)$ είναι ισοδύναμο με το να την πολλαπλασιάσουμε με το $x(2+x)$, επιλέγουμε τελικά ως ολοκληρωτικό παράγοντα τον

$$\mu(x) = x(2+x)$$

και για τα τρία διαστήματα και παίρνουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x(2+x)y' + 2(1+x)y &= 1 + 3x^2 \\ \big(x(2+x)y\big)' &= 1 + 3x^2 \\ x(2+x)y &= \int (1+3x^2)\, dx = x + x^3 + c \\ y &= \frac{x+x^3}{x(2+x)} + \frac{c}{x(2+x)} = \frac{1+x^2}{2+x} + \frac{c}{x(2+x)}.\end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ και $(0, +\infty)$. (Η γενική λύση σε ενώσεις αυτών των διαστημάτων έχει διαφορετικές σταθερές σε καθένα από τα διαστήματα της ένωσης.)
Η αρχική συνθήκη $y(-1) = 1$ καθορίζει τη λύση στο διάστημα $(-2, 0)$. Με $x = -1$ και $y = 1$ στον τύπο της γενικής λύσης βρίσκουμε

$$1 = 2 - c,$$

οπότε $c = 1$ και η λύση είναι η

$$y = \frac{1+x^2}{2+x} + \frac{1}{x(2+x)}.$$

4. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε τη γενική λύση στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και διερευνήστε αν κάποια από τις λύσεις είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.

   α. $xy' - y = x^2$.

   β. $xy' + 2y = x^2 - x + 1$.

   γ. $x^2y' + 2xy = 1$. [Γενική λύση: $y = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$. Καμία λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

   δ. $xy' + 2y = e^x$. [Γενική λύση: $y = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{c}{x^2}$. Μόνο η λύση με $c = 1$ είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

   ε. $xy' + y = \cos x$. [Γενική λύση: $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{c}{x}$. Μόνο η λύση με $c = 0$ είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

στ. $x^2y' + 3xy = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

ζ. $xy' + y = x \sin x$. [Γενική λύση: $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{c}{x}$. Μόνο η λύση με $c = 0$ είναι λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

η. $x^2y' + 3xy = \sin x$.

Λύση: [α] Γράφουμε τη δ.ε. στη μορφή

$$y' - \frac{1}{x}y = x,$$

οπότε αυτομάτως εργαζόμαστε παρακάτω στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
Με $p(x) = -\frac{1}{x}$ έχουμε

$$\int p(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\log|x| + c$$

και επιλέγουμε

$$P(x) = -\log|x|.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. (στη μορφή $y' + \ldots$) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{-\log|x|} = \frac{1}{|x|}.$$

Είναι $\mu(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ και $\mu(x) = -\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και, επειδή το να πολλαπλασιάσουμε τη δ.ε. με $-\frac{1}{x}$ είναι ισοδύναμο με το να την πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{x}$, θεωρούμε ως ολοκληρωτικό παράγοντα την

$$\mu(x) = \frac{1}{x}$$

και για τα δύο διαστήματα.
Προκύπτουν τώρα και για τα δύο διαστήματα οι παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y &= 1 \\ \left(\frac{1}{x}y\right)' &= 1 \\ \frac{1}{x}y &= x + c \\ y &= x^2 + cx. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση της δ.ε. σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Για να δούμε αν υπάρχει λύση της αρχικής δ.ε.

$$xy' - y = x^2$$

στο $(-\infty, +\infty)$, σκεφτόμαστε ότι αν y είναι μια τέτοια λύση, τότε αυτή πρέπει να είναι λύση και σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και επιπλέον να ορίζεται και στο 0. Άρα η y πρέπει να έχει τύπο

$$y = \begin{cases} x^2 + c_1x & \text{στο } (-\infty, 0) \\ a & \text{για } x = 0 \\ x^2 + c_2x & \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

Η y ικανοποιεί τη δ.ε. στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, οπότε αρκεί να είναι παραγωγίσιμη και στο 0 και να ικανοποιεί την δ.ε. και για $x = 0$.
Για να είναι η y συνεχής στο 0 πρέπει να είναι

$$\lim_{x \to 0-} y(x) = \lim_{x \to 0+} y(x) = y(0),$$

δηλαδή

$$0 = 0 = a.$$

Άρα $y(0) = a = 0$ και ο τύπος της y γράφεται

$$y = \begin{cases} x^2 + c_1 x & \text{στο } (-\infty, 0) \\ 0 & \text{για } x = 0 \\ x^2 + c_2 x & \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

Για να είναι η y παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει να ισχύει

$$\lim_{x \to 0-} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{y(x) - y(0)}{x},$$

δηλαδή

$$c_1 = c_2.$$

Ορίζουμε, λοιπόν,

$$c = c_1 = c_2$$

και ο τύπος της y γράφεται

$$y = \begin{cases} x^2 + c x & \text{στο } (-\infty, 0) \\ 0 & \text{για } x = 0 \\ x^2 + c x & \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

η. πιό απλά,

$$y = x^2 + cx \qquad \text{στο } (-\infty, +\infty).$$

Αμέσως βλέπουμε ότι αυτή η y ικανοποιεί τη δ.ε. και στο 0, δηλαδή την

$$0y'(0) - y(0) = 0^2$$

αφού $y(0) = 0$ και $y'(0) = c$.
Άρα οι λύσεις της αρχικής δ.ε. στο $(-\infty, +\infty)$ είναι οι $y = x^2 + cx$.
[β] Γράφουμε τη δ.ε. στη μορφή

$$y' + \frac{2}{x} y = x - 1 + \frac{1}{x},$$

και εργαζόμαστε παρακάτω στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
Με $p(x) = \frac{2}{x}$ έχουμε

$$\int p(x)\, dx = 2 \int \frac{1}{x}\, dx = 2 \log |x| + c = \log(x^2) + c$$

και επιλέγουμε

$$P(x) = \log(x^2).$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. (στη μορφή $y' + \ldots$) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{\log(x^2)} = x^2.$$

Προκύπτουν τώρα και για τα δύο διαστήματα οι παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x^2y' + 2xy &= x^3 - x^2 + x \\ (x^2y)' &= x^3 - x^2 + x \\ x^2y &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c \\ y &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{c}{x^2}. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση της δ.ε. σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Για να δούμε αν υπάρχει λύση της αρχικής δ.ε.

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1$$

στο $(-\infty, +\infty)$, σκεφτόμαστε ότι αν y είναι μια τέτοια λύση, τότε αυτή πρέπει να είναι λύση και σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και επιπλέον να ορίζεται και στο 0. Άρα η y πρέπει να έχει τύπο

$$y = \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{c_1}{x^2} & \text{στο } (-\infty, 0) \\ a & \text{για } x = 0 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{c_2}{x^2} & \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

Η y ικανοποιεί τη δ.ε. στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, οπότε αρκεί να είναι παραγωγίσιμη και στο 0 και να ικανοποιεί την δ.ε. και για $x = 0$.
Για να είναι η y συνεχής στο 0 πρέπει να είναι

$$\lim_{x \to 0-} y(x) = \lim_{x \to 0+} y(x) = y(0).$$

Άρα πρέπει να είναι

$$c_1 = c_2 = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = a,$$

δηλαδή ο τύπος της y γράφεται

$$y = \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} & \text{στο } (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} & \text{για } x = 0 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} & \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

ή, πιο απλά,

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \qquad \text{στο } (-\infty, +\infty).$$

Αμέσως βλέπουμε ότι αυτή η y ικανοποιεί τη δ.ε. και στο 0, δηλαδή την

$$0y'(0) + 2y(0) = 0^2 - 0 + 1$$

αφού $y(0) = \frac{1}{2}$ και $y'(0) = -\frac{1}{3}$.
Άρα η μοναδική λύση της αρχικής δ.ε. στο $(-\infty, +\infty)$ είναι η $y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$.
[στ] Γράφουμε τη δ.ε. στη μορφή

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3},$$

και εργαζόμαστε στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
Με $p(x) = \frac{3}{x}$ έχουμε

$$\int p(x)\,dx = 3\int \frac{1}{x}\,dx = 3\log|x| + c$$

και επιλέγουμε

$$P(x) = 3\log|x|.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. (στη μορφή $y' + \ldots$) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = e^{3\log|x|} = |x|^3.$$

Είναι $\mu(x) = x^3$ στο $(0, +\infty)$ και $\mu(x) = -x^3$ στο $(-\infty, 0)$ και, επειδή το να πολλαπλασιάσουμε τη δ.ε. με $-x^3$ είναι ισοδύναμο με το να την πολλαπλασιάσουμε με x^3, θεωρούμε ως ολοκληρωτικό παράγοντα την

$$\mu(x) = x^3$$

και για τα δύο διαστήματα.
Προκύπτουν τώρα και για τα δύο διαστήματα οι παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x^3y' + 3x^2y &= \sin x \\ (x^3y)' &= \sin x \\ x^3y &= -\cos x + c \\ y &= -\frac{\cos x}{x^3} + \frac{c}{x^3} = \frac{c - \cos x}{x^3}. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση της δ.ε. σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Για να δούμε αν υπάρχει λύση της αρχικής δ.ε.

$$x^2y' + 3xy = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

στο $(-\infty, +\infty)$, σκεφτόμαστε ότι αν y είναι μια τέτοια λύση, τότε αυτή πρέπει να είναι λύση και σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και επιπλέον να ορίζεται και στο 0. Άρα η y πρέπει να έχει τύπο

$$y = \begin{cases} \frac{c_1 - \cos x}{x^3} & \text{στο } (-\infty, 0) \\ a & \text{για } x = 0 \\ \frac{c_2 - \cos x}{x^3} & \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

Η y ικανοποιεί τη δ.ε. στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, οπότε αρκεί να είναι παραγωγίσιμη και στο 0 και να ικανοποιεί την δ.ε. και για $x = 0$.
Για να είναι η y συνεχής στο 0 πρέπει να είναι

$$\lim_{x\to 0-} y(x) = \lim_{x\to 0+} y(x) = y(0).$$

Αν $c_1 \neq 1$, τότε ο αριθμητής του $\frac{c_1 - \cos x}{x^3}$ έχει όριο $\neq 0$ και άρα $\lim_{x\to 0-} \frac{c_1 - \cos x}{x^3} = \pm\infty$.
Αν $c_1 = 1$, τότε με τον κανόνα του l' Hopitâl έχουμε

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1 - \cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{3x} = -\infty.$$

Άρα για κάθε τιμή του c_1 το όριο $\lim_{x\to 0-} y(x)$ δεν είναι αριθμός.
Ομοίως, για κάθε τιμή του c_2 το όριο $\lim_{x\to 0+} y(x)$ δεν είναι αριθμός και καταλήγουμε στο

ότι δεν υπάρχει λύση της δ.ε. στο $(-\infty,+\infty)$.
[η] Γράφουμε τη δ.ε. στη μορφή

$$y'+\frac{3}{x}y=\frac{\sin x}{x^2},$$

και εργαζόμαστε στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.
Με $p(x)=\frac{3}{x}$ έχουμε

$$\int p(x)\,dx=3\int\frac{1}{x}\,dx=3\log|x|+c$$

και επιλέγουμε

$$P(x)=3\log|x|.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δ.ε. (στη μορφή $y'+\ldots$) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x)=e^{P(x)}=e^{3\log|x|}=|x|^3.$$

Είναι $\mu(x)=x^3$ στο $(0,+\infty)$ και $\mu(x)=-x^3$ στο $(-\infty,0)$ και, επειδή το να πολλαπλασιάσουμε τη δ.ε. με $-x^3$ είναι ισοδύναμο με το να την πολλαπλασιάσουμε με x^3, θεωρούμε ως ολοκληρωτικό παράγοντα την

$$\mu(x)=x^3$$

και για τα δύο διαστήματα.
Προκύπτουν τώρα και για τα δύο διαστήματα οι παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
x^3y'+3x^2y&=x\sin x\\
(x^3y)'&=x\sin x\\
x^3y&=\int x\sin x\,dx=-\int x(\cos x)'\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx\\
&=-x\cos x+\sin x+c\\
y&=-\frac{\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x^3}+\frac{c}{x^3}.
\end{aligned}$$

Αυτή είναι η γενική λύση της δ.ε. σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Για να δούμε αν υπάρχει λύση της αρχικής δ.ε.

$$x^2y'+3xy=\sin x$$

στο $(-\infty,+\infty)$, σκεφτόμαστε ότι αν y είναι μια τέτοια λύση, τότε αυτή πρέπει να είναι λύση και σε καθένα από τα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και επιπλέον να ορίζεται και στο 0. Άρα η y πρέπει να έχει τύπο

$$y=\begin{cases}-\frac{\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x^3}+\frac{c_1}{x^3} & \text{στο } (-\infty,0)\\ a & \text{για } x=0\\ -\frac{\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x^3}+\frac{c_2}{x^3} & \text{στο } (0,+\infty)\end{cases}$$

Η y ικανοποιεί τη δ.ε. στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, οπότε αρκεί να είναι παραγωγίσιμη και στο 0 και να ικανοποιεί την δ.ε. και για $x=0$.
Για να είναι η y συνεχής στο 0 πρέπει να είναι

$$\lim_{x\to 0-}y(x)=\lim_{x\to 0+}y(x)=y(0).$$

Αν $c_1 \neq 0$, τότε ο αριθμητής του $\frac{-x\cos x+\sin x+c_1}{x^3}$ έχει όριο $\neq 0$. Αν $c_1 = 0$, τότε με τον κανόνα του l' Hopitâl έχουμε

$$\lim_{x\to 0-} \frac{-x\cos x+\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0-} \frac{x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Ομοίως, μόνο όταν $c_2 = 0$ το όριο $\lim_{x\to 0+} y(x)$ είναι αριθμός και τότε το όριο είναι $\frac{1}{3}$.
Άρα ο τύπος της y γράφεται

$$y = \begin{cases} -\frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x^3} & \text{στο } (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3} & \text{για } x = 0 \\ -\frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x^3} & \text{στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

ή, πιο απλά,

$$y = \begin{cases} -\frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x^3} & \text{για } x \neq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{για } x = 0 \end{cases}$$

Η y είναι συνεχής στο 0. Για να είναι παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει το

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x\cos x+3\sin x-x^3}{3x^4}$$

να είναι αριθμός. Τώρα με διαδοχικές εφαρμογές του κανόνα του l' Hopitâl έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{-3x\cos x+3\sin x-x^3}{3x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x\sin x-3x^2}{12x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{4x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{8x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{8} = 0. \end{aligned}$$

Άρα η y είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $y'(0) = 0$.
Επομένως, η y ικανοποιεί τη δ.ε. και στο 0, δηλαδή την

$$0^2 y'(0) + 3\cdot 0 y(0) = \sin 0$$

αφού $y(0) = \frac{1}{3}$ και $y'(0) = 0$.
Άρα η μοναδική λύση της αρχικής δ.ε. στο $(-\infty, +\infty)$ είναι η

$$y = \begin{cases} -\frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x^3} & \text{για } x \neq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{για } x = 0 \end{cases}$$