

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις του δέκατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x + 4 \sin 5\pi x, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Πώς συμπεριφέρεται η λύση $u(x, t)$ όταν $t \rightarrow +\infty$;

Λύση. Είναι $l = 1, c = 2$. Άρα

$$u(x, t) = e^{-2^2 2^2 \pi^2 t} \sin 2\pi x + 4e^{-2^2 5^2 \pi^2 t} \sin 5\pi x = e^{-16\pi^2 t} \sin 2\pi x + 4e^{-100\pi^2 t} \sin 5\pi x.$$

Προφανώς, ισχύει $u(x, t) \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow +\infty$.

2. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = x(1 - x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Σε ποιο υποχωρίο του $\{(x, t) \mid 0 < x < 1, t > 0\}$ ορίζεται η λύση $u(x, t)$; Πώς συμπεριφέρεται η λύση $u(x, t)$ όταν $t \rightarrow +\infty$;

Λύση. Είναι $l = 1, c = 3$. Θα γράψουμε την $\phi(x) = x(1 - x)$ ως σειρά ημιτόνων $\sin k\pi x$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 x(1 - x) \sin k\pi x \, dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^1 x(1 - x)(\cos k\pi x)' \, dx \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^1 (1 - 2x) \cos k\pi x \, dx = \frac{2}{k^2 \pi^2} \int_0^1 (1 - 2x)(\sin k\pi x)' \, dx \\ &= \frac{4}{k^2 \pi^2} \int_0^1 \sin k\pi x \, dx = -\frac{4}{k^3 \pi^3} \int_0^1 (\cos k\pi x)' \, dx = \frac{4(1 - (-1)^k)}{k^3 \pi^3}. \end{aligned}$$

Άρα

$$x(1 - x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^k)}{k^3 \pi^3} \sin k\pi x, \quad \text{για } 0 \leq x \leq 1.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^k)}{k^3 \pi^3} e^{-9k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x \\ &= \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} e^{-9(2n-1)^2 \pi^2 t} \sin(2n-1)\pi x. \end{aligned}$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η λύση ορίζεται σε ολόκληρο το $\{(x, t) \mid 0 < x < 1, t > 0\}$ και ότι $u(x, t) \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow +\infty$.