Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις ενδέκατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Λύστε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < \pi \\ u(x,0) = u(x,\pi) = 0, & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = 0, & 0 \le y \le \pi \\ u(a,y) = \sin 2y + 4\sin 5y, & 0 \le y \le \pi \end{cases}$$

Λύση. Στην γενική περίπτωση, όπου $0 < y < b$ και $u(a,y) = f(y)$, η λύση προκύπτει ως εξής. Γράφουμε

$$f(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{b} y,$$

όπου οι συντελεστές b_k προκύπτουν είτε με τους γνωστούς τύπους

$$b_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{k\pi}{b} y \, dy$$

είτε φαίνονται στον τύπο της $f(y)$ και κατόπιν η λύση είναι η

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \, \frac{e^{\frac{k\pi}{b}x} - e^{-\frac{k\pi}{b}x}}{e^{\frac{k\pi}{b}a} - e^{-\frac{k\pi}{b}a}} \, \sin \frac{k\pi}{b} y.$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $b = \pi$ και $f(y) = \sin 2y + 4\sin 5y$. Επομένως οι συντελεστές b_k φαίνονται στον τύπο της $f(y)$ και είναι

$$b_2 = 1, \quad b_5 = 4 \qquad \text{και} \qquad b_k = 0 \quad \text{για } k \ne 2, 5.$$

Άρα η λύση είναι η

$$u(x,y) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2a} - e^{-2a}} \, \sin 2y + 4\, \frac{e^{5x} - e^{-5x}}{e^{5a} - e^{-5a}} \, \sin 5y.$$

2. Λύστε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = f(y), & 0 \le y \le b \\ u(a,y) = 0, & 0 \le y \le b \end{cases}$$

Λύση. Στο πρόβλημα αυτό η συνοριακή συνθήκη δίνεται στην αριστερή πλευρά του ορθογωνίου αντί στη δεξιά πλευρά του. Μπορούμε είτε να επαναλάβουμε ολόκληρη τη διαδικασία εύρεσης της λύσης είτε, καλύτερα, να αναγάγουμε το πρόβλημα στη δεξιά πλευρά και να εφαρμόσουμε τους ήδη γνωστούς τύπους.
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$w(x,y) = u(a-x,y) \qquad \text{για } 0 \le x \le a, 0 \le y \le b.$$

Τότε

$$w_x(x,y) = -u_x(a-x,y), \qquad w_y(x,y) = u_y(a-x,y)$$

$$w_{xx}(x,y) = u_{xx}(a-x,y), \qquad w_{yy}(x,y) = u_{yy}(a-x,y)$$

οπότε

$$w_{xx}(x,y)+w_{yy}(x,y) = u_{xx}(a-x,y)+u_{yy}(a-x,y) = 0 \qquad \text{για } 0<x<a, 0<y<b.$$

Επίσης,

$$w(x,0) = u(a-x,0) = 0, \quad w(x,b) = u(a-x,b) = 0 \qquad \text{για } 0 \le x \le a$$

και

$$w(0,y) = u(a,y) = 0 \qquad \text{για } 0 \le y \le b,$$
$$w(a,y) = u(0,y) = f(y) \qquad \text{για } 0 \le y \le b.$$

Άρα η $w(x,y)$ είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} w_{xx}+w_{yy} = 0, & 0<x<a, 0<y<b \\ w(x,0) = w(x,b) = 0, & 0 \le x \le a \\ w(0,y) = 0, & 0 \le y \le b \\ w(a,y) = f(y), & 0 \le y \le b \end{cases}$$

Γράφουμε

$$f(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{b}y,$$

όπου

$$b_k = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{k\pi}{b}y\,dy$$

και τότε

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{e^{\frac{k\pi}{b}x} - e^{-\frac{k\pi}{b}x}}{e^{\frac{k\pi}{b}a} - e^{-\frac{k\pi}{b}a}} \sin\frac{k\pi}{b}y.$$

Άρα η λύση του αρχικού προβλήματος είναι η

$$u(x,y) = w(a-x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \frac{e^{\frac{k\pi}{b}(a-x)} - e^{-\frac{k\pi}{b}(a-x)}}{e^{\frac{k\pi}{b}a} - e^{-\frac{k\pi}{b}a}} \sin\frac{k\pi}{b}y.$$

3. Λύστε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} = 0, & 0<x<a, 0<y<b \\ u(0,y) = u(a,y) = 0, & 0 \le y \le b \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le a \\ u(x,b) = f(x), & 0 \le x \le a \end{cases}$$

Στο πρόβλημα αυτό η συνοριακή συνθήκη δίνεται στην πάνω πλευρά του ορθογωνίου αντί στη δεξιά πλευρά του. Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, μπορούμε είτε να επαναλάβουμε ολόκληρη τη διαδικασία εύρεσης της λύσης είτε, καλύτερα, να αναγάγουμε το πρόβλημα στη δεξιά πλευρά και να εφαρμόσουμε τους ήδη γνωστούς τύπους.
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$w(x,y) = u(y,x) \qquad \text{για } 0 \le x \le b, 0 \le y \le a.$$

Τότε

$$w_x(x,y) = u_y(y,x), \qquad w_y(x,y) = u_x(y,x)$$

$$w_{xx}(x,y) = u_{yy}(y,x), \qquad w_{yy}(x,y) = u_{xx}(y,x)$$

οπότε

$$w_{xx}(x,y) + w_{yy}(x,y) = u_{yy}(y,x) + u_{xx}(y,x) = 0 \qquad \text{για } 0 < x < b, 0 < y < a.$$

Επίσης,

$$w(x,0) = u(0,x) = 0, \quad w(x,a) = u(a,x) = 0 \qquad \text{για } 0 \le x \le b$$

και

$$w(0,y) = u(y,0) = 0 \qquad \text{για } 0 \le y \le a,$$
$$w(b,y) = u(y,b) = f(y) \qquad \text{για } 0 \le y \le a.$$

Άρα η $w(x,y)$ είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & 0 < x < b, 0 < y < a \\ w(x,0) = w(x,a) = 0, & 0 \le x \le b \\ w(0,y) = 0, & 0 \le y \le a \\ w(b,y) = f(y), & 0 \le y \le a \end{cases}$$

Άρα το πρόβλημα έχει αναχθεί στο γνωστό πρόβλημα αλλά με αλλαγμένους τους ρόλους των a, b.
Γράφουμε

$$f(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{a} y,$$

όπου

$$b_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(y) \sin \frac{k\pi}{a} y \, dy$$

και τότε

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \, \frac{e^{\frac{k\pi}{a}x} - e^{-\frac{k\pi}{a}x}}{e^{\frac{k\pi}{a}b} - e^{-\frac{k\pi}{a}b}} \, \sin \frac{k\pi}{a} y.$$

Άρα η λύση του αρχικού προβλήματος είναι η

$$u(x,y) = w(y,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \, \frac{e^{\frac{k\pi}{a}y} - e^{-\frac{k\pi}{a}y}}{e^{\frac{k\pi}{a}b} - e^{-\frac{k\pi}{a}b}} \, \sin \frac{k\pi}{a} x.$$

4. Λύστε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, & 0 \le r < a, 0 \le \theta \le 2\pi \\ u(a,\theta) = 2a \sin\theta - 3a^4 \cos 4\theta + 7a^5 \sin 5\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Λύση. Στην περίπτωση της γενικής συνοριακής συνθήκης $u(a,\theta) = f(\theta)$ γράφουμε

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

όπου οι συντελεστές a_k, b_k είτε φαίνονται στον τύπο της $f(\theta)$ είτε υπολογίζονται ως ολοκληρώματα:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta \, d\theta, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin k\theta \, d\theta.$$

Τότε η λύση του προβλήματος είναι η

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Στην περίπτωσή μας οι συντελεστές b_k φαίνονται στον τύπο της

$$f(\theta) = 2a\sin\theta - 3a^4\cos 4\theta + 7a^5 \sin 5\theta$$

και είναι

$$b_1 = 2a, \quad a_4 = -3a^4, \quad b_5 = 7a^5$$

και όλοι οι άλλοι συντελεστές είναι ίσοι με 0.
Άρα η λύση είναι η

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= 2a\,\frac{r}{a}\,\sin\theta - 3a^4\left(\frac{r}{a}\right)^4\cos 4\theta + 7a^5\left(\frac{r}{a}\right)^5\sin 5\theta \\ &= 2r\sin\theta - 3r^4\cos 4\theta + 7r^5\sin 5\theta. \end{aligned}$$

5. Βρείτε φραγμένες λύσεις του προβλήματος συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, & r > a, 0 \le \theta \le 2\pi \\ u(a,\theta) = f(\theta), & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Λύση. Πρόκειται για την εξίσωση Laplace στο εξωτερικό χωρίο που ορίζεται από τον κύκλο με κέντρο στην αρχή των αξόνων του xy-επιπέδου και ακτίνα ίση με a. Ακολουθούμε τη διαδικασία εύρεσης λύσεων της μορφής

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

όπου η συνάρτηση $R(r)$ ορίζεται στο διάστημα $[r,+\infty)$ και η συνάρτηση $\Theta(\theta)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι 2π-περιοδική.
Υποθέτουμε ότι η $u(r,\theta)$ δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0, δηλαδή ότι υπάρχουν $r_0 > a$ και θ_0 ώστε

$$R(r_0) \neq 0, \quad \Theta(\theta_0) \neq 0.$$

Η εξίσωση του Laplace γράφεται

$$r^2 R''(r)\Theta(\theta) + rR'(r)\Theta(\theta) = -R(r)\Theta''(\theta) \qquad \text{για } r > a, \theta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Με $r = r_0$ παίρνουμε

$$\Theta''(\theta) = -\Big(r_0^2 \frac{R''(r_0)}{R(r_0)} + r_0 \frac{R'(r_0)}{R(r_0)}\Big)\Theta(\theta) \qquad \text{για } \theta \in \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε

$$\lambda = r_0^2 \frac{R''(r_0)}{R(r_0)} + r_0 \frac{R'(r_0)}{R(r_0)},$$

οπότε έχουμε ότι

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \qquad \text{για } \theta \in \mathbb{R}.$$

Αν $\lambda < 0$ η γενική λύση της τελευταίας σ.δ.ε. είναι η

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,\theta} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,\theta}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα (πώς;) ότι για να είναι περιοδική η λύση αυτή πρέπει να είναι $c_1 = c_2 = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο (επειδή η $\Theta(\theta)$ πρέπει να μην είναι ταυτοτικά ίση με 0). Αν $\lambda = 0$ η γενική λύση της τελευταίας σ.δ.ε. είναι η

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta.$$

Πάλι αποδεικνύεται εύκολα (πώς;) ότι για να είναι περιοδική η λύση αυτή πρέπει να είναι $c_2 = 0$ και καταλήγουμε σε σταθερή λύση

$$\Theta(\theta) = c_1.$$

Απομένει η περίπτωση $\lambda > 0$ οπότε η γενική λύση της τελευταίας σ.δ.ε. είναι η

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\theta + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\theta.$$

Αποδεικνύεται εύκολα (πώς;) ότι για να είναι 2π-περιοδική η λύση αυτή (με c_1, c_2 όχι και τα δύο ίσα με 0) πρέπει να είναι

$$\sqrt{\lambda} = k \qquad \text{με } k \in \mathbb{N}.$$

Ενοποιώντας τις λύσεις αυτές μαζί με την λύση στην περίπτωση $\lambda = 0$, καταλήγουμε στις λύσεις

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos k\theta + c_2 \sin k\theta \qquad \text{με } k = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

Τώρα από την (1) με $\theta = \theta_0$ έχουμε ότι

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \frac{\Theta''(\theta_0)}{\Theta(\theta_0)} R(r) = 0 \qquad \text{για } r > a.$$

Πάλι από την (1) με $r = r_0, \theta = \theta_0$ βλέπουμε ότι

$$\lambda = r_0^2 \frac{R''(r_0)}{R(r_0)} + r_0 \frac{R'(r_0)}{R(r_0)} = -\frac{\Theta''(\theta_0)}{\Theta(\theta_0)},$$

οπότε η τελευταία σ.δ.ε. γράφεται

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \qquad \text{για } r > a.$$

Επειδή $\lambda = k^2$ με $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ έχουμε

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0 \qquad \text{για } r > a.$$

Αυτή είναι εξίσωση Euler και την λύνουμε βρίσκοντας λύσεις της μορφής

$$R(r) = r^\alpha.$$

Προκύπτει η αλγεβρική εξίσωση

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2 = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha = \pm k.$$

Αν $k = 1, 2, 3, \dots$ έχουμε τις δύο λύσεις r^k και r^{-k}. Αποδεικνύεται με την ορίζουσα Wronski ότι αυτές οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε η γενική λύση είναι η

$$R(r) = c_1 r^k + c_2 r^{-k} \qquad \text{για } r > a.$$

Επειδή ψάχνουμε *φραγμένες λύσεις*, η $R(r)$ να είναι φραγμένη στην ημιευθεία $(a,+\infty)$. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $c_1 = 0$ και καταλήγουμε στην γενική λύση

$$R(r) = c_2 r^{-k} \qquad \text{για } r > a.$$

Αν $k = 0$ η εξίσωση Euler γράφεται

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = 0 \qquad \text{για } r > a$$

ή, ισοδύναμα,

$$rR''(r) + R'(r) = 0 \qquad \text{για } r > a$$

ή, ισοδύναμα,

$$(rR'(r))' = 0 \qquad \text{για } r > a$$

ή, ισοδύναμα,

$$rR'(r) = c_1 \qquad \text{για } r > a$$

ή, ισοδύναμα,

$$R(r) = c_1 \log r + c_2 \qquad \text{για } r > a.$$

Επειδή η $R(r)$ πρέπει να είναι φραγμένη στην ημιευθεία $(a,+\infty)$ έχουμε ότι $c_1 = 0$, οπότε έχουμε τη γενική λύση

$$R(r) = c_2 \qquad \text{για } r > a.$$

Ενοποιώντας τις περιπτώσεις $k = 1, 2, 3, \ldots$ και $k = 0$ έχουμε τις λύσεις

$$R(r) = c_2 r^{-k} \qquad \text{για } r > a.$$

Συνδυάζοντας με τις λύσεις $\Theta(\theta)$ που βρήκαμε προηγουμένως, έχουμε τις φραγμένες λύσεις

$$u(r,\theta) = r^{-k}(\widetilde{a}\cos k\theta + \widetilde{b}\sin k\theta) \quad \text{για } r > a, \theta \in \mathbb{R} \qquad \text{με } k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Συνδυάζουμε αυτές τις λύσεις γράφοντας σειρά

$$u(r,\theta) = \widetilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} r^{-k}(\widetilde{a}_k \cos k\theta + \widetilde{b}_k \sin k\theta) \qquad \text{για } r > a, \theta \in \mathbb{R}.$$

Η αρχική συνθήκη $u(a,\theta) = f(\theta)$ γράφεται

$$f(\theta) = \widetilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k}(\widetilde{a}_k \cos k\theta + \widetilde{b}_k \sin k\theta). \tag{2}$$

Για να βρούμε τους συντελεστές $\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k$ γράφουμε την $f(\theta)$ ως σειρά Fourier:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{3}$$

όπου οι συντελεστές a_k, b_k υπολογίζονται ως ολοκληρώματα:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta \, d\theta, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta \, d\theta.$$

Εξισώνοντας συντελεστές των (2), (3) βρίσκουμε

$$\widetilde{a}_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad \widetilde{a}_k = a^k a_k \quad \widetilde{b}_k = a^k b_k \quad \text{για } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Άρα

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \qquad \text{για } r > a, \theta \in \mathbb{R}.$$

6. Λύστε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < a, 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0, & 0 \le r \le a \\ u(a,\theta) = f(\theta), & 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$