

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις δωδέκατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Θεωρήστε τη συνήθη δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$ay'' + by' + cy = 0$$

με $a \neq 0$. Μετατρέψτε την σε σύστημα δύο συνήθων δ.ε. πρώτης τάξης γράφοντας $x_1 = y$, $x_2 = y'$.

Λύση. Ορίζοντας $x_1 = y$ και $x_2 = y'$ η εξίσωση γράφεται

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{c}{a}x_1 - \frac{b}{a}x_2 \end{cases}$$

Αντιστρόφως, από το σύστημα αυτό, γράφοντας $y = x_1$, παίρνουμε

$$y' = x_1' = x_2$$

και άρα

$$y'' = x_2' = -\frac{c}{a}y - \frac{b}{a}y'$$

ή, ισοδύναμα, $ay'' + by' + cy = 0$.

2. Λύστε τα παρακάτω συστήματα και σχεδιάστε τις τροχιές των λύσεων.

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1' = 3x_1 + 6x_2 \\ x_2' = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$[x_1 = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}, x_2 = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}]$$

$$[x_1 = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-2t}, x_2 = c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-2t}]$$

$$[x_1 = 2c_1 + 3c_2 e^t, x_2 = -c_1 - c_2 e^t]$$

Λύση. Το σύστημα

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

γράφεται

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

όπου

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A μέσω της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\det(A - rI) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-r & -2 \\ 2 & -2-r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r^2 - r - 2 = 0$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι $r = -1$ και $r = 2$.

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $r = -1$ ως εξής:

$$\begin{aligned} (A + I)\xi = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3+1 & -2 \\ 2 & -2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\xi_1 - 2\xi_2 = 0 \\ 2\xi_1 - \xi_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 2\xi_1 - \xi_2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\xi = \begin{bmatrix} c \\ 2c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, με $c \in \mathbb{R}$. Δηλαδή ο (-1) -ιδιόχωρος έχει διάσταση ίση με 1 και έτσι η αλγεβρική πολλαπλότητα και η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής -1 είναι και οι δύο ίσες με 1.

Κατόπιν βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $r = 2$:

$$\begin{aligned} (A - 2I)\xi = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-2 & -2 \\ 2 & -2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 - 2\xi_2 = 0 \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \xi_1 - 2\xi_2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\xi = \begin{bmatrix} 2c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $c \in \mathbb{R}$. Δηλαδή ο 2-ιδιόχωρος έχει διάσταση ίση με 1 και έτσι η αλγεβρική πολλαπλότητα και η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι και οι δύο ίσες με 1.

Από την ιδιοτιμή -1 έχουμε τις λύσεις $\mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t}$, με $c \in \mathbb{R}$, και από την ιδιοτιμή 2

έχουμε τις λύσεις $\mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$, με $c \in \mathbb{R}$.

Άρα η γενική λύση είναι η

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \\ x_2 = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{cases}$$

3. Λύστε τα παρακάτω συστήματα και σχεδιάστε τις τροχιές των λύσεων.

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = 4x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1 = -x_1 - 4x_2 \\ x'_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - 5x_2 \\ x'_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$[x_1 = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t, x_2 = c_1 e^t (\cos 2t + \sin 2t) + c_2 e^t (\sin 2t - \cos 2t)]$$

$$[x_1 = 2c_1 e^{-t} \sin 2t - 2c_2 e^{-t} \cos 2t, x_2 = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t]$$

$$[x_1 = 5c_1 \cos t + 5c_2 \sin t, x_2 = c_1 (2 \cos t + \sin t) + c_2 (2 \sin t - \cos t)]$$

Λύση. Το σύστημα

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = 4x_1 - x_2 \end{cases}$$

γράφεται

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

όπου

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A μέσω της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\det(A - rI) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-r & -2 \\ 4 & -1-r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2r + 5 = 0$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι συζυγείς μιγαδικές $r = 1 + 2i$ και $r = 1 - 2i$.

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $r = 1 + 2i$ ως εξής:

$$\begin{aligned} (A - (1 + 2i)I)\xi = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 - (1 + 2i) & -2 \\ 4 & -1 - (1 + 2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - 2i)\xi_1 - 2\xi_2 = 0 \\ 4\xi_1 - (2 + 2i)\xi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1 - i)\xi_1 - \xi_2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι τα μιγαδικά $\xi = \begin{bmatrix} c \\ (1 - i)c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - i \end{bmatrix}$, με $c \in \mathbb{C}$.

Έτσι από την ιδιοτιμή $1 + 2i$ έχουμε τη μιγαδική λύση

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t}$$

την οποία θα γράψουμε σε μορφή $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι πραγματικές λύσεις:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - i \end{bmatrix} e^{(1+2i)t} &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2t \right) e^t + i \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 2t \right) e^t \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} e^t + i \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{bmatrix} e^t. \end{aligned}$$

Δεν χρειάζεται να επαναλάβουμε τη διαδικασία για τη συζυγή ιδιοτιμή $1 - 2i$ διότι γνωρίζουμε ότι από αυτήν θα προκύψει η συζυγής μιγαδική λύση

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 + i \end{bmatrix} e^{(1-2i)t} = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} e^t - i \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{bmatrix} e^t.$$

Τώρα, επειδή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας μιγαδικής λύσης είναι κι αυτές λύσεις, έχουμε τις πραγματικές λύσεις

$$\begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} e^t, \quad \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{bmatrix} e^t.$$

Γνωρίζουμε ότι οι δύο αυτές λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε η γενική λύση είναι

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{bmatrix} e^t$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t \\ x_2 = c_1 e^t (\cos 2t + \sin 2t) + c_2 e^t (\sin 2t - \cos 2t) \end{cases}$$

4. Λύστε τα παρακάτω συστήματα και σχεδιάστε τις τροχιές των λύσεων.

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 4x_2 \\ x'_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = 8x_1 - 4x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1 = -6x_1 + 4x_2 \\ x'_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$[x_1 = 2c_1 e^t + c_2(2t + 1)e^t, x_2 = c_1 e^t + c_2 t e^t]$$

$$[x_1 = c_1 + c_2(t + \frac{1}{2}), x_2 = 2c_1 + c_2(2t + \frac{1}{2})]$$

$$[x_1 = 2c_1 e^{-4t} + c_2(2t - 1)e^{-4t}, x_2 = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}]$$

Λύση. Το σύστημα

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

γράφεται

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

όπου

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A μέσω της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\det(A - rI) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-r & -4 \\ 1 & -1-r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$$

Προκύπτει η διπλή ιδιοτιμή $r = 1$ και δεν υπάρχει άλλη ιδιοτιμή. Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $r = 1$ ως εξής:

$$\begin{aligned} (A - I)\xi = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & -4 \\ 1 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\xi_1 - 4\xi_2 = 0 \\ \xi_1 - 2\xi_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \xi_1 - 2\xi_2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\xi = \begin{bmatrix} 2c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, με $c \in \mathbb{R}$. Δηλαδή ο 1-ιδιόχωρος έχει διάσταση ίση με 1 και έτσι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 1 είναι ίση με 2 ενώ η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι ίση με 1.

Από το ιδιοδιάνυσμα $\xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ προκύπτει η λύση

$$\mathbf{x} = \xi e^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

και χρειαζόμαστε μία δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση.

Γενικά, όταν ο 2×2 πίνακας A έχει διπλή ιδιοτιμή r με γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με 1, εκτός από ένα ιδιοδιάνυσμα ξ μέσω της

$$(A - rI)\xi = \mathbf{0},$$

βρίσκουμε και ένα δεύτερο διάνυσμα η μέσω της

$$(A - rI)\eta = \xi,$$

όπου ξ είναι το προηγούμενο ιδιοδιάνυσμα. Από τα ξ, η προκύπτει μία δεύτερη λύση

$$\mathbf{x} = \xi t e^{rt} + \eta e^{rt}$$

η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη της $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$.

Στην περίπτωσή μας, έχοντας βρεί το $\xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, βρίσκουμε το η από την

$$\begin{aligned} (A - I)\eta = \xi &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & -4 \\ 1 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\eta_1 - 4\eta_2 = 2 \\ \eta_1 - 2\eta_2 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \eta_1 - 2\eta_2 = 1 \end{aligned}$$

Ένα $\boldsymbol{\eta}$ είναι για παράδειγμα το $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, οπότε έχουμε τη δεύτερη λύση

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}te^t + \boldsymbol{\eta}e^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t.$$

Άρα η γενική λύση είναι η

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \right)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1e^t + c_2(2t+1)e^t \\ x_2 = c_1e^t + c_2te^t \end{cases}$$