

# Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις δεύτερου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης Bernoulli

$$x^2 y' = -2xy + y^3$$

καθορίζοντας προσεκτικά το διάστημα στο οποίο ορίζεται καθεμιά από αυτές.

**Λύση.** Γράφουμε τη δ.ε. στη μορφή

$$y' = -2\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^2}$$

και εργαζόμαστε στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ .

Παρατηρούμε ότι η δεξιά μεριά  $f(x, y) = -2\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^2}$  είναι ορισμένη στο ανοικτό σύνολο  $\Omega = \{(x, y) \mid x \neq 0\}$  (το  $xy$ -επίπεδο εκτός του  $y$ -άξονα) και ότι η  $f(x, y)$  και η  $f_y(x, y) = -2\frac{1}{x} + 3\frac{y^2}{x^2}$  είναι συνεχείς στο  $\Omega$ . Επομένως ισχύει το θεώρημα ύπαρξης/μοναδικότητας λύσης της δ.ε. στο  $\Omega$ .

Τώρα βλέπουμε ότι η  $f(x, y)$  μηδενίζεται όταν  $y = 0$ . Άρα η σταθερή συνάρτηση  $y = 0$  είναι λύση της δ.ε. σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ . Μάλιστα, η σταθερή συνάρτηση  $y = 0$  είναι λύση της αρχικής δ.ε.  $x^2 y' = -2xy + y^3$  (πριν διαιρέσουμε με το  $x^2$ ) σε ολόκληρο το  $(-\infty, +\infty)$ .

Ως απόρροια του θεωρήματος ύπαρξης/μοναδικότητας έχουμε ότι κάθε άλλη λύση εκτός της μηδενικής θα έχει τιμές είτε μόνο θετικές είτε μόνο αρνητικές στο διάστημα στο οποίο ορίζεται. Άρα στα παρακάτω θα υποθέτουμε ότι για μια λύση  $y$  θα ισχύει είτε  $y(x) > 0$  για κάθε  $x \in I$  είτε  $y(x) < 0$  για κάθε  $x \in I$ , αν  $I$  είναι το διάστημα ορισμού της.

Η δ.ε. που έχουμε είναι τύπου Bernoulli και ορίζουμε νέα άγνωστη συνάρτηση

$$u = y^{1-3} = y^{-2}.$$

Αυτομάτως έχουμε τον περιορισμό

$$u > 0.$$

Επειδή  $u' = -2y^{-3}y'$ , αν πολλαπλασιάσουμε την δ.ε. με  $y^{-3}$ , βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} &= \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{2}u' + \frac{2}{x}u &= \frac{1}{x^2} \\ u' - \frac{4}{x}u &= -\frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

Τότε, κατά τα γνωστά,

$$-4 \int \frac{1}{x} dx = -4 \log |x| + c = -\log x^4 + c$$

και επιλέγουμε

$$P(x) = -\log x^4.$$

Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(x) = e^{P(x)} = \frac{1}{x^4}$$

και πολλαπλασιάζουμε με αυτόν την τελευταία δ.ε. και έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4}u' - \frac{4}{x^5}u &= -\frac{2}{x^6} \\ \left(\frac{1}{x^4}u\right)' &= -\frac{2}{x^6} \\ \frac{1}{x^4}u &= \frac{2}{5x^5} + c \\ u &= \frac{2 + 5cx^5}{5x}\end{aligned}$$

Αν  $c = 0$ , τότε  $u = \frac{2}{5x}$  και, επειδή πρέπει να είναι  $u > 0$ , το  $x$  βρίσκεται στο διάστημα  $(0, +\infty)$ . Από την  $u = y^{-2}$  καταλήγουμε στις δύο λύσεις:

$$y = \sqrt{\frac{5x}{2}} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{\frac{5x}{2}} \quad \text{στο } (0, +\infty),$$

Αν  $c > 0$ , τότε, επειδή πρέπει να είναι  $u > 0$ , το  $x$  βρίσκεται στα διαστήματα  $(-\infty, -\sqrt[5]{\frac{2}{5c}})$  και  $(0, +\infty)$ . Από την  $u = y^{-2}$  καταλήγουμε στις τέσσερις λύσεις

$$y = \sqrt{\frac{5x}{2 + 5cx^5}} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{\frac{5x}{2 + 5cx^5}} \quad \text{στο } \left(-\infty, -\sqrt[5]{\frac{2}{5c}}\right),$$

$$y = \sqrt{\frac{5x}{2 + 5cx^5}} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{\frac{5x}{2 + 5cx^5}} \quad \text{στο } (0, +\infty).$$

Αν  $c < 0$ , τότε, πάλι επειδή πρέπει να είναι  $u > 0$ , το  $x$  βρίσκεται στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(\sqrt[5]{\frac{2}{5|c|}}, +\infty)$ . Από την  $u = y^{-2}$  καταλήγουμε στις τέσσερις λύσεις

$$y = \sqrt{\frac{5x}{2 + 5cx^5}} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{\frac{5x}{2 + 5cx^5}} \quad \text{στο } (-\infty, 0),$$

$$y = \sqrt{\frac{5x}{2 + 5cx^5}} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{\frac{5x}{2 + 5cx^5}} \quad \text{στο } \left(\sqrt[5]{\frac{2}{5|c|}}, +\infty\right).$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι καμία από τις λύσεις που βρήκαμε (εκτός της μηδενικής  $y = 0$ ) δεν ορίζεται στο πεπερασμένο άκρο του διαστήματος ορισμού της, είτε διότι η ίδια η  $y$  απειρίζεται είτε διότι η  $y'$  απειρίζεται στο άκρο αυτό. Άρα η μοναδική λύση στο  $(-\infty, +\infty)$  της αρχικής δ.ε.  $x^2y' = -2xy + y^3$  είναι η μηδενική συνάρτηση  $y = 0$ .

2. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις προσδιορίστε το ανοικτό υποσύνολο του  $xy$ -επιπέδου για κάθε σημείο  $(x_0, y_0)$  του οποίου είναι εγγυημένη η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $y(x_0) = y_0$ .

α.  $y' = \frac{x-y}{2x+5y}$ .

β.  $y' = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

γ.  $y' = \frac{2xy}{1+y^2}$ . [ $\mathbb{R}^2$ .]

δ.  $y' = \frac{3}{(x+y)^2}$ . [ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\}$ .]

ε.  $y' = (x^2 + y^2)^{3/2}$ . [ $\mathbb{R}^2$ .]

στ.  $y' = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . [ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .]

**Λύση.** [α] Η δ.ε. έχει τη μορφή  $y' = f(x, y)$  και η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{x - y}{2x + 5y}$$

είναι συνεχής στο  $xy$ -επίπεδο εκτός από τα σημεία της ευθείας με καρτεσιανή εξίσωση  $2x + 5y = 0$ , δηλαδή στο ανοικτό σύνολο

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -\frac{2}{5}x \right\},$$

το οποίο είναι ένωση δύο ανοικτών ημιεπιπέδων. Στο ίδιο σύνολο είναι συνεχής και η

$$f_y(x, y) = -\frac{7x}{(2x + 5y)^2}.$$

Άρα το σύνολο στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα ύπαρξης/μοναδικότητας λύσης είναι το  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -\frac{2}{5}x\}$ .

[β] Η δ.ε. έχει τη μορφή  $y' = f(x, y)$  και η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

είναι συνεχής στο  $xy$ -επίπεδο εκτός από τα σημεία  $(x, y)$  με  $x^2 + y^2 < 1$ , δηλαδή στο σύνολο

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Η

$$f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

είναι συνεχής στο

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}.$$

Άρα το σύνολο στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα ύπαρξης/μοναδικότητας λύσης είναι το  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ .

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών βρείτε όλες τις λύσεις καθώς και το διάστημα στο οποίο ορίζεται καθεμιά από αυτές.

α.  $y' = \frac{2x^3}{y}$ .

β.  $y' = \frac{x}{y(1+x^2)}$ . [ $y = -\sqrt{\log(1+x^2)+c}$ ,  $y = \sqrt{\log(1+x^2)+c}$  στο διάστημα  $(-\infty, +\infty)$ , αν  $c > 0$ , ή στα  $(-\infty, -\sqrt{e^{|c|}-1})$ ,  $(\sqrt{e^{|c|}-1}, +\infty)$ , αν  $c \leq 0$ .]

γ.  $y' + (\sin x)y^2 = 0$ .

δ.  $y' = 4x\sqrt{y}$ .

**Λύση.** [α] Για να έχει νόημα η δ.ε. πρέπει να είναι  $y \neq 0$  και άρα για κάθε λύση  $y$  θα ισχύει είτε  $y(x) > 0$  για κάθε  $x \in I$  είτε  $y(x) < 0$  για κάθε  $x \in I$ , αν  $I$  είναι το διάστημα ορισμού της. Με αυτήν την προϋπόθεση η δ.ε. γράφεται ισοδύναμα

$$yy' = 2x^3$$

και ολοκληρώνοντας ως προς  $x$  βρίσκουμε διαδοχικά

$$\int y \frac{dy}{dx} dx = 2 \int x^3 dx$$

$$\int y dy = \frac{x^4}{2} + c$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{2} + c$$

$$y^2 = x^4 + c,$$

όπου στο τέλος αντικαταστήσαμε την αυθαίρετη σταθερά  $c$  με  $\frac{c}{2}$ .

Αν  $c = 0$ , τότε έχουμε  $y^2 = x^4$  και, επειδή πρέπει να είναι  $y \neq 0$ , το  $x$  βρίσκεται στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ . Έτσι έχουμε τις τέσσερις λύσεις:

$$y = x^2 \quad \text{ή} \quad y = -x^2 \quad \text{στο } (-\infty, 0),$$

$$y = x^2 \quad \text{ή} \quad y = -x^2 \quad \text{στο } (0, +\infty).$$

Αν  $c > 0$ , τότε έχουμε  $y^2 = x^4 + c > 0$  για κάθε  $x$ , οπότε έχουμε δύο λύσεις:

$$y = \sqrt{x^4 + c} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{x^4 + c} \quad \text{στο } (-\infty, +\infty).$$

Αν  $c < 0$ , τότε έχουμε  $y^2 = x^4 + c = x^4 - |c|$  και, επειδή πρέπει να είναι  $y^2 > 0$ , το  $x$  βρίσκεται στα διαστήματα  $(-\infty, -\sqrt[4]{|c|})$  και  $(\sqrt[4]{|c|}, +\infty)$ . Έτσι έχουμε τις τέσσερις λύσεις:

$$y = \sqrt{x^4 + c} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{x^4 + c} \quad \text{στο } (-\infty, -\sqrt[4]{|c|}),$$

$$y = \sqrt{x^4 + c} \quad \text{ή} \quad y = -\sqrt{x^4 + c} \quad \text{στο } (\sqrt[4]{|c|}, +\infty).$$

[γ] Η δ.ε. είναι στη μορφή  $y' = f(x, y)$ , όπου η συνάρτηση  $f(x, y) = -(\sin x)y^2$  καθώς και η  $f_y(x, y) = -2(\sin x)y$  είναι συνεχείς στο  $xy$ -επίπεδο. Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα ύπαρξης/μοναδικότητας λύσης και, επειδή διακρίνουμε αμέσως τη σταθερή λύση

$$y = 0 \quad \text{στο } (-\infty, +\infty),$$

έχουμε ότι για κάθε άλλη λύση  $y$  θα ισχύει είτε  $y(x) > 0$  για κάθε  $x \in I$  είτε  $y(x) < 0$  για κάθε  $x \in I$ , αν  $I$  είναι το διάστημα ορισμού της.

Παίρνοντας, λοιπόν, μια λύση  $y$  διάφορη της μηδενικής, έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισodύναμες ισότητες:

$$\begin{aligned} -\frac{y'}{y^2} &= \sin x \\ -\int \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} dx &= \int \sin x dx \\ -\int \frac{1}{y^2} dy &= \int \sin x dx \\ \frac{1}{y} &= -\cos x + c \\ y &= \frac{1}{c - \cos x}. \end{aligned}$$

Αν  $|c| > 1$ , τότε δεν μηδενίζεται το  $c - \cos x$  και άρα έχουμε τη λύση

$$y = \frac{1}{c - \cos x} \quad \text{στο } (-\infty, +\infty).$$

Αν  $|c| \leq 1$ , τότε αποκλείουμε τις ρίζες της  $\cos x = c$ . Αν  $c = 1$ , τότε οι ρίζες είναι οι  $2n\pi$  με  $n \in \mathbb{Z}$ . Αν  $c = -1$ , τότε οι ρίζες είναι οι  $(2n+1)\pi$  με  $n \in \mathbb{Z}$ . Αν  $-1 < c < 1$ , τότε υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0$  με  $0 < x_0 < \pi$  ώστε να είναι  $\cos x_0 = c$  και τότε οι ρίζες της  $\cos x = c$  είναι οι  $\pm x_0 + 2n\pi$  με  $n \in \mathbb{Z}$ . Έτσι σχηματίζονται άπειρα διαστήματα  $I$  που έχουν ως άκρα τους διαδοχικές τέτοιες ρίζες και σε κάθε τέτοιο διάστημα έχουμε τη λύση

$$y = \frac{1}{c - \cos x} \quad \text{στο } I.$$

[δ] Η δ.ε. έχει τη μορφή  $y' = f(x, y)$  με

$$f(x, y) = 4x\sqrt{y}, \quad f_y(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{y}}.$$

Η  $f(x, y)$  είναι συνεχής στο  $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$  και η  $f_y(x, y)$  στο  $\{(x, y) \mid y > 0\}$ . Άρα το θεώρημα ύπαρξης/μοναδικότητας λύσης εφαρμόζεται στο δεύτερο σύνολο  $\{(x, y) \mid y > 0\}$ . Η  $f(x, y)$  μηδενίζεται για  $y = 0$ , οπότε μια προφανής λύση της δ.ε. είναι η σταθερή συνάρτηση

$$y = 0 \quad \text{στο } (-\infty, +\infty).$$

Επειδή, όμως, τα σημεία  $(x_0, 0)$  δεν περιέχονται στο σύνολο  $\{(x, y) \mid y > 0\}$ , είναι πιθανό να υπάρχουν και άλλες λύσεις  $y$  οι οποίες μηδενίζονται σε κάποια σημεία του διαστήματος ορισμού τους. Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών (για την οποία θα χρειαστεί να διαιρέσουμε με το  $\sqrt{y}$ ) υποθέτουμε ότι η λύση που ψάχνουμε είναι θετική σε κάποιο διάστημα  $I$ . Τότε έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{y}} y' &= 4x \\ \int \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} dx &= 4 \int x dx \\ \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= 4 \int x dx \\ 2\sqrt{y} &= 2x^2 + 2c \\ y &= (x^2 + c)^2, \end{aligned}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι από την προτελευταία σχέση έχουμε τον περιορισμό:

$$x^2 + c > 0.$$

Αν  $c > 0$ , τότε ισχύει  $y = (x^2 + c)^2 > 0$  για κάθε  $x$  και έχουμε τη λύση

$$y = (x^2 + c)^2 \quad \text{στο } (-\infty, +\infty).$$

Αν  $c = 0$ , τότε ισχύει  $y = x^4 > 0$  στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ . Αν επισυνάψουμε και το σημείο  $x = 0$ , τότε έχουμε τις εξής τρεις λύσεις της αρχικής δ.ε. στο  $(-\infty, +\infty)$ :

$$y = x^4 \quad \text{για κάθε } x,$$

$$y = \begin{cases} x^4 & \text{για } x \leq 0 \\ 0 & \text{για } x \geq 0 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 0 & \text{για } x \leq 0 \\ x^4 & \text{για } x \geq 0 \end{cases}$$

Και οι τρεις συναρτήσεις ορίζονται και είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο  $(-\infty, +\infty)$  και είναι λύσεις της δ.ε. στο  $(-\infty, +\infty)$ . (Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα στο 0.)

Αν  $c < 0$ , επειδή πρέπει να είναι  $x^2 + c = x^2 - |c| > 0$ , περιοριζόμαστε στα διαστήματα  $(-\infty, -\sqrt{|c|})$  και  $(\sqrt{|c|}, +\infty)$  και σε καθένα από αυτά έχουμε την λύση  $y = (x^2 + c)^2$ . Αν επισυνάψουμε και το διάστημα  $[-\sqrt{|c|}, \sqrt{|c|}]$  στο οποίο ορίζεται η σταθερή λύση  $y = 0$ , τότε έχουμε τις εξής τρεις λύσεις της αρχικής δ.ε. στο  $(-\infty, +\infty)$ :

$$y = \begin{cases} (x^2 + c)^2 & \text{για } x \leq -\sqrt{|c|} \\ 0 & \text{για } -\sqrt{|c|} \leq x \leq \sqrt{|c|} \\ (x^2 + c)^2 & \text{για } \sqrt{|c|} \leq x \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} (x^2 + c)^2 & \text{για } x \leq -\sqrt{|c|} \\ 0 & \text{για } -\sqrt{|c|} \leq x \end{cases} \quad y = \begin{cases} 0 & \text{για } x \leq \sqrt{|c|} \\ (x^2 + c)^2 & \text{για } \sqrt{|c|} \leq x \end{cases}$$

(Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα στα σημεία  $\pm\sqrt{|c|}$ .)

4. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών βρείτε τη λύση που ικανοποιεί τη δοσμένη αρχική συνθήκη και το διάστημα στο οποίο ορίζεται.

α.  $y' = -\frac{xe^x}{y}, y(0) = 1.$

β.  $y' = \frac{y^2}{x}, y(1) = 2.$

γ.  $y' = \frac{2x}{y(1+x^2)}, y(0) = -2.$  [ $y = -\sqrt{4 + 2\log(1+x^2)}$  στο διάστημα  $(-\infty, +\infty).$ ]

δ.  $y' = \frac{x(x^2+1)}{4y^3}, y(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$  [ $y = -\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}$  στο διάστημα  $(-\infty, +\infty).$ ]

ε.  $y' = 1 + x + y^2 + xy^2, y(0) = 1.$

στ.  $y' = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y}, y(0) = 0.$

**Λύση.** [α] Επειδή η δεξιά μεριά της δ.ε. δεν έχει νόημα για  $y = 0$ , οι λύσεις  $y$  της δ.ε. δεν πρέπει να μηδενίζονται. Άρα, λόγω συνέχειας, για κάθε λύση  $y$  πρέπει να ισχύει είτε  $y(x) > 0$  για κάθε  $x \in I$  είτε  $y(x) < 0$  για κάθε  $x \in I$ , όπου  $I$  είναι το διάστημα ορισμού της. Μάλιστα, λόγω της αρχικής συνθήκης, η λύση που ψάχνουμε πρέπει να ορίζεται σε διάστημα  $I$  το οποίο να περιέχει το  $x_0 = 0$  και πρέπει να ικανοποιεί την  $y(x) > 0$  για κάθε  $x \in I$ .

Με αυτές τις προϋποθέσεις, γράφουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις

$$\begin{aligned} yy' &= -xe^x \\ \int y \frac{dy}{dx} dx &= - \int xe^x dx \\ \int y dy &= - \int x(e^x)' dx = -xe^x + \int e^x dx \\ \frac{y^2}{2} &= -xe^x + e^x + c \\ y^2 &= -2xe^x + 2e^x + c \end{aligned}$$

Από την αρχική συνθήκη έχουμε

$$1 = 2 + c,$$

οπότε  $c = -1$  και άρα

$$y^2 = -2xe^x + 2e^x - 1.$$

Επειδή η λύση πρέπει να είναι θετική, έχουμε

$$y = \sqrt{-2xe^x + 2e^x - 1}$$

σε διάστημα στο οποίο να ισχύει

$$-2xe^x + 2e^x - 1 > 0.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι η συνάρτηση  $h(x) = -2xe^x + 2e^x - 1$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , ότι  $h(0) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ . Άρα υπάρχουν  $a, b$  ώστε να είναι  $a < 0 < b$ , να ισχύει  $h(x) \leq 0$  για  $x \leq a$  και για  $x \geq b$  και  $h(x) > 0$  για  $a < x < b$ . Συμπεραίνουμε ότι η λύση της δ.ε. με την αρχική συνθήκη  $y(0) = 1$  είναι η

$$y = \sqrt{-2xe^x + 2e^x - 1} \quad \text{για } a < x < b.$$

[β] Η δ.ε. έχει τη μορφή  $y' = f(x, y)$  όπου οι

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x}, \quad f_y(x, y) = \frac{2y}{x}$$

είναι συνεχείς στο  $xy$ -επίπεδο εκτός του  $y$ -άξονα, οπότε εργαζόμαστε στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ . Η  $f(x, y)$  μηδενίζεται για  $y = 0$ , οπότε αυτομάτως έχουμε ως λύσεις τις σταθερές συναρτήσεις

$$y = 0 \quad \text{στο } (-\infty, 0) \text{ και στο } (0, +\infty).$$

Οι λύσεις αυτές αποκλείονται λόγω της αρχικής συνθήκης.

Λόγω του θεωρήματος ύπαρξης/μοναδικότητας για κάθε άλλη λύση  $y$  πρέπει να ισχύει είτε  $y(x) > 0$  για κάθε  $x \in I$  είτε  $y(x) < 0$  για κάθε  $x \in I$ , όπου  $I$  είναι το διάστημα ορισμού της. Μάλιστα, λόγω της αρχικής συνθήκης, η λύση που ψάχνουμε πρέπει να ορίζεται σε διάστημα  $I$  το οποίο να περιέχει το  $x_0 = 1$  και πρέπει να ικανοποιεί την  $y(x) > 0$  για κάθε  $x \in I$ . Και, επειδή το  $x$  βρίσκεται είτε στο  $(-\infty, 0)$  είτε στο  $(0, +\infty)$ , το διάστημα  $I$  πρέπει να περιέχεται στο  $(0, +\infty)$ , δηλαδή είναι  $x > 0$  για κάθε  $x \in I$ .

Τώρα έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} dx &= \int \frac{1}{x} dx \\ \int \frac{1}{y^2} dy &= \int \frac{1}{x} dx \\ -\frac{1}{y} &= \log x + c \\ y &= -\frac{1}{\log x + c}. \end{aligned}$$

Από την  $y(1) = 2$  βρίσκουμε

$$2 = -\frac{1}{c},$$

οπότε  $c = -\frac{1}{2}$  και άρα

$$y = -\frac{2}{\log x^2 - 1}.$$

Η  $y$  ορίζεται στα υποδιαστήματα  $(0, \sqrt{e})$  και  $(\sqrt{e}, +\infty)$  του  $(0, +\infty)$  και, επειδή το  $x_0 = 1$  βρίσκεται στο  $(0, \sqrt{e})$  και η  $y$  είναι θετική σ' αυτό το διάστημα έχουμε

$$y = -\frac{2}{\log x^2 - 1} \quad \text{για } 0 < x < \sqrt{e}.$$

[ε] Η δ.ε. γράφεται

$$y' = (1+x)(1+y^2)$$

και έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{y'}{1+y^2} &= 1+x \\ \int \frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} dx &= \int (1+x) dx \\ \int \frac{1}{1+y^2} dy &= \int (1+x) dx \\ \text{Arctan } y &= x + \frac{x^2}{2} + c. \end{aligned}$$

Από την αρχική συνθήκη  $y(0) = 1$  έχουμε

$$\frac{\pi}{4} = c,$$

οπότε

$$\operatorname{Arctan} y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Επειδή οι τιμές της  $\operatorname{Arctan} y$  περιέχονται στο διάστημα  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , πρέπει να ισχύει

$$-\frac{\pi}{2} < x + \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2},$$

το οποίο ισοδυναμεί με

$$-1 - \sqrt{\frac{\pi+2}{2}} < x < -1 + \sqrt{\frac{\pi+2}{2}}.$$

Άρα η λύση είναι η

$$y = \tan\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{στο} \quad \left(-1 - \sqrt{\frac{\pi+2}{2}}, -1 + \sqrt{\frac{\pi+2}{2}}\right).$$

[στ] Η συνάρτηση  $y + e^y$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, +\infty)$  και  $\lim_{y \rightarrow -\infty} (y + e^y) = -\infty$  και  $\lim_{y \rightarrow +\infty} (y + e^y) = +\infty$ . Άρα υπάρχει  $a$  ώστε να ισχύει  $a + e^a = 0$  και  $y + e^y < 0$  για  $y < a$  και  $y + e^y > 0$  για  $y > a$ . Μάλιστα, επειδή  $0 + e^0 = 1 > 0$ , είναι  $a < 0$ .

Άρα κάθε λύση της δ.ε. δεν μπορεί να πάρει την τιμή  $a$ , οπότε, λόγω συνέχειας, για κάθε λύση  $y$  της δ.ε. πρέπει να ισχύει είτε  $y(x) < a$  για κάθε  $x \in I$  είτε  $y(x) > a$  για κάθε  $x \in I$ , όπου  $I$  είναι το διάστημα στο οποίο ορίζεται. Εξ αιτίας της αρχικής συνθήκης πρέπει το διάστημα  $I$  να περιέχει το  $x_0 = 0$  και να ισχύει  $y(x) > a$  για κάθε  $x \in I$ . Με αυτές τις προϋποθέσεις έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}(y + e^y)y' &= x - e^{-x} \\ \int (y + e^y) \frac{dy}{dx} dx &= \int (x - e^{-x}) dx \\ \int (y + e^y) dy &= \int (x - e^{-x}) dx \\ \frac{y^2}{2} + e^y &= \frac{x^2}{2} + e^{-x} + c.\end{aligned}$$

Από την αρχική συνθήκη έχουμε

$$1 = 1 + c,$$

οπότε  $c = 0$  και

$$\frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x}. \quad (1)$$

Η συνάρτηση

$$g(t) = \frac{t^2}{2} + e^t$$

έχει παράγωγο

$$g'(t) = t + e^t$$

και από τη μελέτη αυτής της συνάρτησης που κάναμε προηγουμένως βλέπουμε ότι η  $g(t)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, a]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[a, +\infty)$ .

Η (1) ισοδυναμεί με

$$g(y) = g(-x)$$

και από τα προηγούμενα (ένα από τα οποία είναι ότι  $y > a$ ) συνεπάγεται ότι είτε (i)  $a < y = -x$  είτε (ii)  $-x < a < y$ . Η περίπτωση (ii) απορρίπτεται, διότι συνεπάγεται  $0 < -a < x$  ενώ το διάστημα  $I$  πρέπει να περιέχει το 0. Άρα ισχύει η περίπτωση (i) και, επομένως, η λύση είναι η

$$y = -x \quad \text{στο} \quad (-\infty, -a).$$