

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις του τρίτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις. Αν προκύψει αλγεβρική σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές x, y η οποία δεν λύνεται ως προς y , τότε αφήστε την ως έχει.

α. $y' = (x + y)^2$.

β. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

γ. $y' = \frac{x+3y}{x-y} \cdot [(x+y) \log|x+y| + c(x+y) = -2x.]$

δ. $y' = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \cdot [|y-x+3| = c|y+x+1|^3.]$

Λύση. [α] Η δ.ε. είναι στη μορφή $y' = f(ax + by)$ με σταθερές $a = b = 1$, οπότε ορίζουμε νέα άγνωστη συνάρτηση

$$u = x + y.$$

Τότε

$$u' = 1 + y'$$

και η δ.ε. γράφεται ισοδύναμα

$$u' = u^2 + 1.$$

Αυτή είναι δ.ε. με χωριζόμενες μεταβλητές και έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{u^2 + 1} &= 1 \\ \int \frac{1}{u^2 + 1} \frac{du}{dx} dx &= \int 1 dx \\ \int \frac{1}{u^2 + 1} du &= \int 1 dx \\ \text{Arctan } u &= x + c. \end{aligned}$$

Επειδή οι τιμές της $\text{Arctan } u$ βρίσκονται στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, συνεπάγεται ότι το x βρίσκεται στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c)$. Με αυτήν την προϋπόθεση η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$u = \tan(x + c)$$

και άρα

$$y = -x + \tan(x + c) \quad \text{στο} \quad \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right).$$

[β] Ο αριθμητής και ο παρονομαστής της δεξιάς μεριάς της δ.ε. είναι ομογενείς συναρτήσεις ίδιας τάξης:

$$(tx)^2 + (tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(x^2 + xy + y^2), \quad (tx)^2 = t^2x^2.$$

Επομένως, ορίζουμε νέα άγνωστη συνάρτηση

$$u = \frac{y}{x}$$

και τότε

$$xu = y$$

και άρα

$$u + xu' = y'.$$

Έτσι η δ.ε. μετασχηματίζεται στην

$$u + xu' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + u + u^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$xu' = 1 + u^2.$$

Από τη μορφή της αρχικής δ.ε. έχουμε τον περιορισμό $x \neq 0$, οπότε εργαζόμαστε στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Στην πορεία μέχρι και την τελευταία μορφή της δ.ε. δεν έχει προστεθεί νέος περιορισμός.

Άρα έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{1+u^2} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} dx &= \int \frac{1}{x} dx \\ \int \frac{1}{1+u^2} du &= \int \frac{1}{x} dx \\ \text{Arctan } u &= \log |x| + c. \end{aligned}$$

Επειδή οι τιμές της $\text{Arctan } u$ βρίσκονται στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, συνεπάγεται ότι το $\log |x|$ βρίσκεται στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c)$ ή, ισοδύναμα, ότι

$$ce^{-\frac{\pi}{2}} < |x| < ce^{\frac{\pi}{2}},$$

όπου c είναι αυθαίρετη θετική σταθερά. Άρα το x βρίσκεται στα διαστήματα

$$(-ce^{\frac{\pi}{2}}, -ce^{-\frac{\pi}{2}}), \quad (ce^{-\frac{\pi}{2}}, ce^{\frac{\pi}{2}}).$$

Πρέπει να προσέξουμε ότι η τελευταία σταθερά c είναι ίση με e^{-c} , όπου c είναι η σταθερά που εμφανίζεται στην τελευταία ισότητα πιο πριν: $\text{Arctan } u = \log |x| + c$. Άρα η ισότητα αυτή πρέπει να γίνει

$$\text{Arctan } u = \log |x| - \log c = \log \frac{|x|}{c},$$

όπου c είναι η τελευταία θετική σταθερά.

Τώρα έχουμε

$$u = \tan \log \frac{|x|}{c}$$

ή, ισοδύναμα,

$$y = x \tan \log \frac{|x|}{c} \quad \text{στο } (-ce^{\frac{\pi}{2}}, -ce^{-\frac{\pi}{2}}) \text{ ή στο } (ce^{-\frac{\pi}{2}}, ce^{\frac{\pi}{2}}).$$

2. Λύστε τις παρακάτω πλήρεις εξισώσεις πρώτης τάξης. Αν προκύψει αλγεβρική σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές x, y η οποία δεν λύνεται ως προς y , τότε αφήστε την ως έχει.

α. $(2x+3) + (2y-2)y' = 0$. [$y = 1 \pm \sqrt{c - x^2 - 3x}$ για $\frac{3}{2} - \sqrt{c + \frac{9}{4}} < x < \frac{3}{2} + \sqrt{c + \frac{9}{4}}$, αν $c > -\frac{9}{4}$.]

β. $(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2 \cos x)y' = 0$. [$2y \cos x + e^x \sin y = c$.]

γ. $(3x^2 - 2xy + 2) + (6y^2 - x^2 + 3)y' = 0$. [$2y^3 + (3 - x^2)y + x^3 + 2x = c$.]

Λύση. [α] Με

$$M(x, y) = 2x + 3, \quad N(x, y) = 2y - 2$$

ισχύει

$$M_y(x, y) = 0, \quad N_x(x, y) = 0.$$

Άρα

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad \text{στο } xy - \text{επίπεδο}$$

και επειδή το xy -επίπεδο δεν έχει “τρύπες”, η δ.ε. είναι πλήρης και υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε

$$u_x(x, y) = 2x + 3, \quad u_y(x, y) = 2y - 2 \quad \text{στο } xy\text{-επίπεδο.}$$

Βρίσκουμε την $u(x, y)$ ως εξής. Από την $u_x(x, y) = 2x + 3$ έχουμε

$$u(x, y) = \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + h(y)$$

και τότε από την $u_y(x, y) = 2y - 2$ παίρνουμε

$$h'(y) = 2y - 2$$

ή, ισοδύναμα,

$$h(y) = y^2 - 2y + c.$$

Άρα

$$u(x, y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y + c$$

και, επιλέγοντας οποιαδήποτε τιμή της c , π.χ. $c = 0$, θεωρούμε την

$$u(x, y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y.$$

Τώρα θεωρούμε οποιαδήποτε λύση $y(x)$ της δ.ε.

$$(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$$

σε κάποιο διάστημα I και παραγωγίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση

$$u(x, y(x)) = u(x, y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y$$

ως προς $x \in I$. Τότε

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + y^2 - 2y) = (2x + 3) + (2y - 2)y' = 0 \quad \text{για } x \in I$$

και άρα

$$x^2 + 3x + y^2 - 2y = c \quad \text{για } x \in I.$$

Ισοδύναμα:

$$(y - 1)^2 = c - x^2 - 3x.$$

(Κάναμε αλλαγή της σταθεράς.)

Από τον αυτονόητο περιορισμό $x^2 + 3x - c \leq 0$ προκύπτει ότι πρέπει να είναι $c \geq -\frac{9}{4}$ και το x να βρίσκεται στο διάστημα $[\frac{3}{2} - \sqrt{c + \frac{9}{4}}, \frac{3}{2} + \sqrt{c + \frac{9}{4}}]$. Επειδή το διάστημα πρέπει να μην είναι μονοσύνολο, συνεπάγεται $c > -\frac{9}{4}$ και τότε προκύπτουν οι δύο λύσεις της δ.ε.

$$y = 1 - \sqrt{c - x^2 - 3x} \quad \text{και} \quad y = 1 + \sqrt{c - x^2 - 3x} \quad \text{στο} \quad \left(\frac{3}{2} - \sqrt{c + \frac{9}{4}}, \frac{3}{2} + \sqrt{c + \frac{9}{4}}\right).$$

Δεν περιλαμβάνουμε τα άκρα του διαστήματος, διότι σ' αυτά η τετραγωνική ρίζα δεν είναι παραγωγίσιμη.

[β] Με

$$M(x, y) = e^x \sin y - 2y \sin x, \quad N(x, y) = e^x \cos y + 2 \cos x$$

ισχύει

$$M_y(x, y) = e^x \cos y - 2 \sin x, \quad N_x(x, y) = e^x \cos y - 2 \sin x.$$

Άρα

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad \text{στο } xy - \text{επίπεδο}$$

και επειδή το xy -επίπεδο δεν έχει "τρύπες", η δ.ε. είναι πλήρης και υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε

$$u_x(x, y) = e^x \sin y - 2y \sin x, \quad u_y(x, y) = e^x \cos y + 2 \cos x \quad \text{στο } xy\text{-επίπεδο.}$$

Βρίσκουμε την $u(x, y)$ ως εξής. Από την $u_x(x, y) = e^x \sin y - 2y \sin x$ έχουμε

$$u(x, y) = \int (e^x \sin y - 2y \sin x) dx = e^x \sin y + 2y \cos x + h(y)$$

και τότε από την $u_y(x, y) = e^x \cos y + 2 \cos x$ παίρνουμε

$$e^x \cos y + 2 \cos x + h'(y) = e^x \cos y + 2 \cos x,$$

δηλαδή

$$h'(y) = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$h(y) = c.$$

Άρα

$$u(x, y) = e^x \sin y + 2y \cos x + c$$

και, επιλέγοντας οποιαδήποτε τιμή της c , π.χ. $c = 0$, θεωρούμε την

$$u(x, y) = e^x \sin y + 2y \cos x.$$

Τώρα θεωρούμε οποιαδήποτε λύση $y(x)$ της δ.ε.

$$(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2 \cos x)y' = 0$$

σε κάποιο διάστημα I και παραγωγίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση

$$u(x, y(x)) = u(x, y) = e^x \sin y + 2y \cos x$$

ως προς $x \in I$. Τότε

$$\frac{d}{dx}(e^x \sin y + 2y \cos x) = (e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2 \cos x)y' = 0 \quad \text{για } x \in I$$

και άρα

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad \text{για } x \in I.$$

Από την ισότητα αυτή προκύπτει η συνάρτηση y : πρέπει να λύσουμε ως προς y και να βρούμε τον τύπο του συναρτήσεως του x και, συγχρόνως, να βρούμε και το κατάλληλο διάστημα στο οποίο περιέχεται το x . Επειδή η συγκεκριμένη εξίσωση δεν λύνεται αλγεβρικά ως προς y , την αφήνουμε ως έχει και λέμε ότι η συνάρτηση y προσδιορίζεται έμμεσα από την εξίσωση.

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις βρείτε ολοκληρωτικό παράγοντα ώστε αυτή να γίνει πλήρης και λύστε την.

α. $(3x^2y + 2xy + y^3) + (x^2 + y^2)y' = 0.$

β. $1 + (\frac{x}{y} - \sin y)y' = 0.$ [$\mu(y) = y, xy + y \cos y - \sin y = c.$]

γ. $y + (2xy - e^{-2y})y' = 0.$

Λύση. [α] Με

$$M = 3x^2y + 2xy + y^3, \quad N = x^2 + y^2$$

έχουμε

$$M_y = 3x^2 + 2x + 3y^2, \quad N_x = 2x.$$

Βλέπουμε ότι δεν ισχύει $M_y = N_x$ (παρά μόνο σε ένα σημείο, το $(0, 0)$) οπότε θα ψάξουμε να βρούμε κατάλληλο ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x, y) \neq 0$ ώστε αφού πολλαπλασιάσουμε την δ.ε. με τον μ να γίνει πλήρης. Η δ.ε. που θα προκύψει είναι η

$$\mu M + \mu N y' = 0$$

και ελέγχουμε την

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

ή, ισοδύναμα,

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x.$$

Για απλοποίηση υποθέτουμε ότι η μ είναι συνάρτηση μόνο του x . Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mu_x = \mu'(x) = \mu', \quad \mu_y = 0$$

και η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$\mu M_y = \mu' N + \mu N_x. \tag{1}$$

Από εδώ προκύπτει

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} = 3.$$

Επειδή η $\frac{\mu'}{\mu}$ είναι συνάρτηση μόνο του x πρέπει η $\frac{M_y - N_x}{N}$ να είναι συνάρτηση μόνο του x , το οποίο στην προκειμένη περίπτωση ισχύει. Άρα προχωράμε και βρίσκουμε την μ .

Από την (1) έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)\mu' - 3(x^2 + y^2)\mu &= 0 \\ \mu' - 3\mu &= 0. \end{aligned}$$

(Εδώ πρέπει προσωρινά να αποκλείσουμε το σημείο $(0, 0)$ λόγω της διαίρεσης με το $x^2 + y^2$. Θα δούμε, όμως, ότι αφού βρούμε την μ δεν θα υπάρχει πρόβλημα ως προς την πληρότητα σε ολόκληρο το xy -επίπεδο της δ.ε. που θα προκύψει.)

Λύνουμε την τελευταία δ.ε. κατά τα γνωστά και βρίσκουμε

$$\mu(x) = ce^{3x}.$$

Επιλέγουμε οποιαδήποτε τιμή της c , π.χ. $c = 1$, και έχουμε την

$$\mu(x) = e^{3x}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την αρχική δ.ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = e^{3x} \neq 0$ και προκύπτει η ισοδύναμη δ.ε.

$$(3x^2ye^{3x} + 2xye^{3x} + y^3e^{3x}) + (x^2e^{3x} + y^2e^{3x})y' = 0.$$

Τώρα με

$$M = 3x^2ye^{3x} + 2xye^{3x} + y^3e^{3x}, \quad N = x^2e^{3x} + y^2e^{3x}$$

έχουμε

$$M_y = 3x^2e^{3x} + 2xe^{3x} + 3y^2e^{3x}, \quad N_x = 2xe^{3x} + 3x^2e^{3x} + 3y^2e^{3x}.$$

Ισχύει $M_y = N_x$ σε ολόκληρο το xy -επίπεδο και επειδή το xy -επίπεδο δεν έχει “τρύπες”, η δ.ε. είναι πλήρης και υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε

$$u_x(x, y) = 3x^2ye^{3x} + 2xye^{3x} + y^3e^{3x}, \quad u_y(x, y) = x^2e^{3x} + y^2e^{3x} \quad \text{στο } xy\text{-επίπεδο.} \quad (2)$$

Βρίσκουμε την $u(x, y)$ ξεκινώντας από την δεύτερη ισότητα (2) (επειδή είναι απλουστερη) και έχουμε

$$u(x, y) = \int (x^2e^{3x} + y^2e^{3x}) dy = x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x} + h(x).$$

Από την πρώτη ισότητα (2) έχουμε τώρα ότι

$$2xye^{3x} + 3x^2ye^{3x} + y^3e^{3x} + h'(x) = 3x^2ye^{3x} + 2xye^{3x} + y^3e^{3x}$$

οπότε

$$h'(x) = 0$$

και άρα $h(x) = c$. Επιλέγουμε οποιαδήποτε τιμή της c , π.χ. $c = 0$, και έχουμε την

$$u(x, y) = x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x}.$$

Τώρα θεωρούμε οποιαδήποτε λύση $y(x)$ της δ.ε.

$$(3x^2ye^{3x} + 2xye^{3x} + y^3e^{3x}) + (x^2e^{3x} + y^2e^{3x})y' = 0$$

σε κάποιο διάστημα I και παραγωγίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση

$$u(x, y(x)) = u(x, y) = x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x}$$

ως προς $x \in I$. Τότε

$$\frac{d}{dx}(x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x}) = (3x^2ye^{3x} + 2xye^{3x} + y^3e^{3x}) + (x^2e^{3x} + y^2e^{3x})y' = 0 \quad \text{για } x \in I$$

και άρα

$$x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x} = c \quad \text{για } x \in I.$$

Από την ισότητα αυτή προκύπτει η συνάρτηση y : πρέπει να λύσουμε ως προς y και να βρούμε τον τύπο του συναρτήσεως του x και, συγχρόνως, να βρούμε και το κατάλληλο διάστημα στο οποίο περιέχεται το x . Επειδή η συγκεκριμένη εξίσωση δεν λύνεται αλγεβρικά ως προς y , την αφήνουμε ως έχει και λέμε ότι η συνάρτηση y προσδιορίζεται έμμεσα από την εξίσωση.

[γ] Με

$$M = y, \quad N = 2xy - e^{-2y}$$

έχουμε

$$M_y = 1, \quad N_x = 2y.$$

Βλέπουμε ότι δεν ισχύει $M_y = N_x$ (παρά μόνο στα σημεία $(x, \frac{1}{2})$) οπότε θα ψάξουμε να βρούμε κατάλληλο ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x, y) \neq 0$ ώστε αφού πολλαπλασιάσουμε την δ.ε. με τον μ να γίνει πλήρης. Η δ.ε. που θα προκύψει είναι η

$$\mu M + \mu N y' = 0$$

και ελέγχουμε την

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

ή, ισοδύναμα,

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x. \quad (3)$$

Για απλοποίηση υποθέτουμε ότι η μ είναι συνάρτηση μόνο του x . Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mu_x = \mu'(x) = \mu', \quad \mu_y = 0$$

και η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$\mu M_y = \mu' N + \mu N_x.$$

Από εδώ προκύπτει

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - 2y}{2xy - e^{-2y}}.$$

Επειδή η $\frac{\mu'}{\mu}$ είναι συνάρτηση μόνο του x πρέπει η $\frac{M_y - N_x}{N}$ να είναι συνάρτηση μόνο του x , το οποίο δεν ισχύει.

Τώρα υποθέτουμε πάλι για απλοποίηση ότι η μ είναι συνάρτηση μόνο του y . Τότε γράφουμε

$$\mu_y = \mu'(y) = \mu', \quad \mu_x = 0$$

και η (3) γίνεται

$$\mu' M + \mu M_y = \mu N_x. \quad (4)$$

Τότε

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2y - 1}{y} = 2 - \frac{1}{y}.$$

Επειδή η $\frac{\mu'}{\mu}$ είναι συνάρτηση μόνο του y πρέπει η $\frac{N_x - M_y}{M}$ να είναι συνάρτηση μόνο του y , το οποίο ισχύει.

Άρα προχωράμε και βρίσκουμε την μ .

Η (4) γράφεται

$$y\mu' + (1 - 2y)\mu = 0.$$

Λύνουμε αυτήν την δ.ε. και βρίσκουμε

$$\mu(y) = \frac{c}{y} e^{2y} \quad \text{για } y \neq 0.$$

Επιλέγουμε οποιαδήποτε τιμή της c , π.χ. $c = 1$, και έχουμε την

$$\mu(y) = \frac{1}{y} e^{2y} \quad \text{για } y \neq 0.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι η αρχική δ.ε. έχει ως λύση τη σταθερή συνάρτηση

$$y = 0 \quad \text{στο } (-\infty, +\infty).$$

Επομένως, συνεχίζουμε αναζητώντας λύσεις της δ.ε. για τις οποίες ισχύει $y(x) \neq 0$ για κάθε x στο διάστημα ορισμού τους.

Πολλαπλασιάζουμε την αρχική δ.ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = \frac{1}{y}e^{2y} \neq 0$ και προκύπτει η ισοδύναμη δ.ε.

$$e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)y' = 0.$$

Τώρα με

$$M = e^{2y}, \quad N = 2xe^{2y} - \frac{1}{y}$$

έχουμε

$$M_y = 2e^{2y}, \quad N_x = 2e^{2y}.$$

Ισχύει $M_y = N_x$ στα δύο ημιεπίπεδα στα οποία χωρίζει ο x -άξονας το xy -επίπεδο και επειδή κάθε ημιεπίπεδο δεν έχει “τρύπες”, η δ.ε. είναι πλήρης και υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ ώστε

$$u_x(x, y) = e^{2y}, \quad u_y(x, y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y} \quad \text{στο } xy\text{-επίπεδο εκτός του } x\text{-άξονα.} \quad (5)$$

Βρίσκουμε την $u(x, y)$ ξεκινώντας από την πρώτη ισότητα (5) και έχουμε

$$u(x, y) = \int e^{2y} dx = xe^{2y} + h(y).$$

Από τη δεύτερη ισότητα (5) έχουμε τώρα ότι

$$2xe^{2y} + h'(y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y}$$

οπότε

$$h'(y) = -\frac{1}{y}$$

και άρα $h(y) = -\log |y| + c$. Επιλέγουμε οποιαδήποτε τιμή της c , π.χ. $c = 0$, και έχουμε την

$$u(x, y) = xe^{2y} - \log |y|.$$

Τώρα θεωρούμε οποιαδήποτε λύση $y(x) \neq 0$ της δ.ε.

$$e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)y' = 0$$

σε κάποιο διάστημα I και παραγωγίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση

$$u(x, y(x)) = u(x, y) = xe^{2y} - \log |y|$$

ως προς $x \in I$. Τότε

$$\frac{d}{dx}(xe^{2y} - \log |y|) = e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)y' = 0 \quad \text{για } x \in I$$

και άρα

$$xe^{2y} - \log |y| = c \quad \text{για } x \in I.$$

Από την ισότητα αυτή προκύπτει η συνάρτηση y : πρέπει να λύσουμε ως προς y και να βρούμε τον τύπο του συναρτήσεως του x και, συγχρόνως, να βρούμε και το κατάλληλο διάστημα στο οποίο περιέχεται το x . Επειδή η συγκεκριμένη εξίσωση δεν λύνεται αλγεβρικά ως προς y , την αφήνουμε ως έχει και λέμε ότι η συνάρτηση y προσδιορίζεται έμμεσα από την εξίσωση.