

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις του τέταρτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Παρατηρήστε ότι οι παρακάτω δ.ε. δεν περιέχουν το y και λύστε τις.

α. $x^2 y'' + 2xy' = 1$. [$y = \frac{c_1}{x} + c_2 + \log|x|$ στο $(-\infty, 0)$ ή στο $(0, +\infty)$. Δεν υπάρχει καμμία λύση στο $(-\infty, +\infty)$.]

β. $xy'' + y' = 1$. [$y = x + c_1 \log|x| + c_2$ για στο $(-\infty, 0)$ ή στο $(0, +\infty)$. Οι μόνες λύσεις στο $(-\infty, +\infty)$ είναι οι $y = x + c_2$.]

γ. $y'' + x(y')^2 = 0$. [$y = c$ στο $(-\infty, +\infty)$, $y = \frac{2}{c_1} \operatorname{Arctan} \frac{x}{c_1} + c_2$ στο $(-\infty, +\infty)$ με $c_1 > 0$, $y = -\frac{2}{x} + c$ στο $(-\infty, 0)$ ή στο $(0, +\infty)$ και $y = \frac{1}{c_1} \log \left| \frac{x-c_1}{x+c_1} \right| + c_2$ στο $(-\infty, -c_1)$ ή στο $(-c_1, c_1)$ ή στο $(c_1, +\infty)$ με $c_1 > 0$.]

Λύση. Όλες οι δ.ε. λύνονται αν ορίσουμε νέα συνάρτηση

$$u = y',$$

οπότε μετατρέπονται σε δ.ε. πρώτης τάξης.

[γ] Η δ.ε. γράφεται

$$u' = -xu^2.$$

Η $f(x, u) = -xu^2$ και η $f_u(x, u) = -2xu$ είναι συνεχείς στο xu -επίπεδο και, επειδή η $f(x, u)$ μηδενίζεται όταν $u = 0$, έχουμε ότι η δ.ε. έχει ως λύση τη σταθερή συνάρτηση

$$u = 0 \quad \text{στο } (-\infty, +\infty)$$

και ότι για κάθε άλλη λύση u ισχύει είτε $u(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε $u(x) < 0$ για κάθε $x \in I$, όπου I είναι το διάστημα ορισμού της.

Από την $u = 0$ και την $y' = u$ προκύπτουν οι λύσεις

$$y = c \quad \text{στο } (-\infty, +\infty)$$

της αρχικής δ.ε.

Στα παρακάτω θεωρούμε ότι $u(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ και παίρνουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{u^2} &= x \\ -\int \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} dx &= \int x dx \\ -\int \frac{1}{u^2} du &= \int x dx \\ \frac{1}{u} &= \frac{x^2}{2} + c \\ u &= \frac{2}{x^2 + c}. \end{aligned}$$

(Στο τέλος κάναμε μια απλή αλλαγή σταθεράς.)

Αν $c = 0$, τότε η

$$u = \frac{2}{x^2}$$

είναι θετική στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και από την $y' = u$ παίρνουμε τις λύσεις

$$y = -\frac{2}{x} + c \quad \text{στα } (-\infty, 0) \text{ και } (0, +\infty)$$

της αρχικής δ.ε.

Αν $c > 0$, αλλάζουμε την σταθερά c με την $c_1 = \sqrt{c} > 0$ και τότε η

$$u = \frac{2}{x^2 + c_1^2}$$

είναι θετική στο $(-\infty, +\infty)$, οπότε από την $y' = u$ βρίσκουμε τις λύσεις

$$y = \int \frac{2}{x^2 + c_1^2} dx = \frac{2}{c_1} \operatorname{Arctan} \frac{x}{c_1} + c_2 \quad \text{στο } (-\infty, +\infty).$$

Αν $c < 0$, αλλάζουμε την σταθερά c με την $c_1 = \sqrt{|c|} > 0$ και τότε η

$$u = \frac{2}{x^2 - c_1^2}$$

είναι θετική στα $(-\infty, c_1)$ και $(c_1, +\infty)$ και αρνητική στο $(-c_1, c_1)$, οπότε από την $y' = u$ βρίσκουμε τις λύσεις

$$y = \int \frac{2}{x^2 - c_1^2} dx = \frac{1}{c_1} \int \left(\frac{1}{x - c_1} - \frac{1}{x + c_1} \right) dx = \frac{1}{c_1} \log \left| \frac{x - c_1}{x + c_1} \right| + c_2$$

στο $(-\infty, -c_1)$ στο $(-c_1, c_1)$ και στο $(c_1, +\infty)$.

2. Παρατηρήστε ότι οι παρακάτω δ.ε. δεν περιέχουν το x και λύστε τις με την εξής μέθοδο: θεωρήστε νέα άγνωστη συνάρτηση $u = y'$, αποδείξτε ότι $y'' = u \frac{du}{dy}$ και αντικαταστήστε στις εξισώσεις θεωρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το y .

α. $yy'' + (y')^2 = 0$.

β. $y'' + y(y')^3 = 0$. [$y = c$ και $y^3 + c_1 y = 6x + c_2$.]

Λύση. [α] Ορίζουμε νέα συνάρτηση

$$u = y'$$

και έχουμε

$$y'' = u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} y' = \frac{du}{dy} u.$$

Τώρα η αρχική δ.ε. γράφεται

$$yu \frac{du}{dy} = -u^2.$$

Με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών βρίσκουμε τις λύσεις

$$u = \frac{c}{y} \quad \text{στο } (-\infty, 0) \text{ και στο } (0, +\infty)$$

με $c \neq 0$ και την

$$u = 0 \quad \text{στο } (-\infty, +\infty)$$

(με $c = 0$.)

Από την $u = 0$ και την $u = y'$ βρίσκουμε τις λύσεις

$$y = c \quad \text{στο } (-\infty, +\infty).$$

Με $c \neq 0$ γράφουμε την $u = \frac{c}{y}$ ως

$$y' = \frac{c}{y}$$

έχοντας υπ' όψη ότι ισχύει είτε $y(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε $y(x) < 0$ για κάθε $x \in I$, όπου I είναι το διάστημα ορισμού της $y(x)$. Έτσι έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} yy' &= c \\ \int y \frac{dy}{dx} dx &= \int c dx \\ \int y dy &= \int c dx \\ \frac{y^2}{2} &= cx + c' \\ y^2 &= cx + c' \end{aligned}$$

(Στο τέλος αλλάξαμε τις σταθερές c, c' και έχουμε πάλι $c \neq 0$.)

Αν $c > 0$, τότε έχουμε τις λύσεις

$$y = -\sqrt{cx + c'} \quad \text{και} \quad y = \sqrt{cx + c'} \quad \text{στο} \quad \left(-\frac{c'}{c}, +\infty\right)$$

και, αν $c < 0$, έχουμε τις

$$y = -\sqrt{cx + c'} \quad \text{και} \quad y = \sqrt{cx + c'} \quad \text{στο} \quad \left(-\infty, -\frac{c'}{c}\right).$$

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω δ.ε. βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι εγγυημένη η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης η οποία ικανοποιεί τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες σε οποιοδήποτε σημείο αυτών των διαστημάτων.

α. $xy'' + 3y = x$.

β. $y'' + 6y' + xy = 2 \sin x$. $[-\infty, +\infty)$.

γ. $x(x-1)y'' + 3xy' + 4y = 2$.

δ. $(1+x^2)y'' + 4y' = e^x$. $[-\infty, +\infty)$.

Λύση. [α] Γράφουμε τη δ.ε. στη μορφή

$$y'' + \frac{3}{x}y' = 1$$

και έχουμε ότι οι συναρτήσεις $\frac{3}{x}$ και 1 είναι συνεχείς στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Άρα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι εγγυημένη η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης y η οποία ικανοποιεί τις $y(x_0) = y_0$ και $y'(x_0) = y'_0$ για οποιοδήποτε $x_0 \in (-\infty, 0)$ και οποιουδήποτε αριθμούς y_0, y'_0 . Το ίδιο ισχύει και για το διάστημα $(0, +\infty)$.

[γ] Γράφουμε τη δ.ε. στη μορφή

$$y'' + \frac{3}{x-1}y' + \frac{4}{x(x-1)}y = \frac{2}{x(x-1)}$$

και βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $\frac{3}{x-1}$, $\frac{4}{x(x-1)}$ και $\frac{2}{x(x-1)}$ είναι συνεχείς στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$. Άρα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι εγγυημένη η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης y η οποία ικανοποιεί τις $y(x_0) = y_0$ και $y'(x_0) = y'_0$ για οποιοδήποτε $x_0 \in (-\infty, 0)$ και οποιουδήποτε αριθμούς y_0, y'_0 . Το ίδιο ισχύει και για τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$.

4. Αν συμβολίσουμε $W(y_1, \dots, y_n)(x)$ την ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1, \dots, y_n$, αποδείξτε ότι

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = y^n(x)W(y_1, \dots, y_n)(x).$$

Λύση. Αρχίζουμε με την περίπτωση $n = 2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} yy_1 & yy_2 \\ (yy_1)' & (yy_2)' \end{vmatrix} = yy_1(y_2' + yy_2') - yy_2(y_1' + yy_1') \\ &= y^2(y_1y_2' - y_2y_1') = y^2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y^2 W(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Τώρα εφαρμόζουμε επαγωγή. Υποθέτουμε ότι αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει όταν έχουμε $n - 1$ συναρτήσεις και τότε, αναπτύσσοντας τη ορίζουσα κατά τα στοιχεία της n -οστής γραμμής:

$$\begin{aligned} W(y_1, \dots, y_n) &= \begin{vmatrix} yy_1 & \dots & yy_n \\ (yy_1)^{(1)} & \dots & (yy_n)^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ (yy_1)^{(n-1)} & \dots & (yy_n)^{(n-1)} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} (yy_k)^{(n-1)} W(y_1, \dots, yy_{k-1}, yy_{k+1}, \dots, yy_n) \\ &= y^{n-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} (yy_k)^{(n-1)} W(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Όταν αναπτύζουμε την παράγωγο τάξης $(n - 1)$ του γινομένου yy_k βρίσκουμε

$$(yy_k)^{(n-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} y^{(j)} y_k^{(n-1-j)}.$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση και εναλλάσσοντας τα δύο αθροίσματα, έχουμε

$$\begin{aligned} W(y_1, \dots, y_n) &= y^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} y^{(j)} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} y_k^{(n-1-j)} W(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} y_k^{(n-1-j)} W(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n) \\ &= \begin{vmatrix} yy_1 & \dots & yy_n \\ (yy_1)^{(1)} & \dots & (yy_n)^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ (yy_1)^{(n-2)} & \dots & (yy_n)^{(n-2)} \\ (yy_1)^{(n-1-j)} & \dots & (yy_n)^{(n-1-j)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Αν $1 \leq j \leq n - 1$, τότε η τελευταία ορίζουσα έχει δύο ίδιες γραμμές και άρα είναι ίση με 0.

Αν $j = 0$, τότε η τελευταία ορίζουσα είναι η $W(y_1, \dots, y_n)$. Άρα

$$W(y_1, \dots, y_n) = y^{n-1} \binom{n-1}{0} y^{(0)} W(y_1, \dots, y_n) = y^n W(y_1, \dots, y_n)$$

και αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει και για n συναρτήσεις.

5. [α] Ξεκινώντας με την περίπτωση $n = 2$, αποδείξτε ότι αν $W(x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1, \dots, y_n$, τότε η παράγωγος $W'(x)$ ισούται με την ορίζουσα που προκύπτει από την ορίζουσα Wronski όταν αντικαταστήσουμε στην τελευταία γραμμή τις $(n-1)$ -οστές παραγώγους με τις n -οστές παραγώγους των $y_1, \dots, y_n$.
 [β] Αποδείξτε ότι αν οι $y_1, \dots, y_n$ είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής δ.ε.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y^{(1)} + p_n(x)y = 0$$

και $W(x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των $y_1, \dots, y_n$, τότε ισχύει

$$W'(x) = -p_1(x)W(x).$$

Τέλος, βρείτε τύπο για την $W(x)$ και αποδείξτε ότι είτε $W(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ είτε $W(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ (όπου I είναι διάστημα στο οποίο οι $p_1(x), \dots, p_n(x)$ είναι συνεχείς).

[γ] Έστω y_1, y_2 δύο λύσεις της δ.ε.

$$y'' + \frac{3}{x}y' - (\sin x)y = 0.$$

Αν $W(x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2 και αν $W(3) = 2$, υπολογίστε το $W(1)$. Μπορείτε να υπολογίσετε το $W(-1)$;

Λύση. [α] Για $n = 2$ έχουμε

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}' = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε επαγωγή και υποθέτουμε ότι αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει όταν έχουμε $n-1$ συναρτήσεις και τότε, αναπτύσσοντας τη ορίζουσα κατά τα στοιχεία της n -οστής γραμμής:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} y_k^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{k-1} & y_{k+1} & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_{k-1}^{(n-2)} & y_{k+1}^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}' \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} y_k^{(n)} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{k-1} & y_{k+1} & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_{k-1}^{(n-2)} & y_{k+1}^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} y_k^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{k-1} & y_{k+1} & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & \dots & y_{k-1}^{(n-3)} & y_{k+1}^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_{k-1}^{(n-1)} & y_{k+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Όμως, το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με 0, διότι προκύπτει ορίζουσα με δύο ίδιες γραμμές:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} y_k^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{k-1} & y_{k+1} & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & \dots & y_{k-1}^{(n-3)} & y_{k+1}^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_{k-1}^{(n-1)} & y_{k+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Άρα

$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-2} y_k^{(n)} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{k-1} & y_{k+1} & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_{k-1}^{(n-2)} & y_{k+1}^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

και αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει και για n συναρτήσεις.

[β] Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του [α] και προσθέτοντας κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των $n - 1$ πρώτων γραμμών στην τελευταία γραμμή, έχουμε

$$\begin{aligned} W' &= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \dots + p_n y_1 & \dots & y_n^{(n)} + p_2 y_n^{(n-2)} + \dots + p_n y_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & \dots & -p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1 \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1 W. \end{aligned}$$

Άρα η W ικανοποιεί την ομογενή δ.ε. πρώτης τάξης

$$W + p_1 W = 0$$

και άρα

$$W = ce^{-P_1},$$

όπου $P_1(x)$ είναι μία αντιπαράγωγος της $p_1(x)$ στο διάστημα I στο οποίο οι συναρτήσεις $p_1(x), \dots, p_n(x)$ είναι συνεχείς.

Αν $c = 0$, τότε ισχύει $W(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Αν $c \neq 0$, τότε ισχύει $W(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

[γ] Έχουμε $p_1(x) = \frac{3}{x}$ και άρα $P_1(x) = 3 \log |x|$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Επομένως,

$$W(x) = \frac{c}{|x|^3} \quad \text{στο } (-\infty, 0) \text{ και στο } (0, +\infty).$$

Αλλάζοντας την σταθερά από c σε $-c$ στο $(-\infty, 0)$ έχουμε

$$W(x) = \frac{c}{x^3} \quad \text{στο } (-\infty, 0) \text{ και στο } (0, +\infty).$$

Αν $W(3) = 2$, τότε $c = 54$ και άρα $W(1) = 54$.

Όμως, το $W(-1)$ δεν υπολογίζεται διότι η σταθερά που αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ μπορεί να είναι διαφορετική από τη σταθερά $c = 54$ που αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$.

6. [α] Έστω y_1 λύση της ομογενούς γραμμικής δ.ε.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

όπου οι $p_1(x), p_2(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I .

Αν η y_1 δεν μηδενίζεται πουθενά στο I και αν y_2 είναι δεύτερη λύση της δ.ε., αποδείξτε ότι

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W(x)}{y_1^2}$$

όπου $W(x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2 .

Κατόπιν χρησιμοποιήστε τον τύπο της $W(x)$ από το [β] της προηγούμενης άσκησης για να βρείτε την y_2 .

[β] Γνωρίζοντας ότι η $y_1(x) = e^{-x}$ είναι λύση της δ.ε.

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

βρείτε δεύτερη λύση y_2 της δ.ε. ώστε οι y_1, y_2 να αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε.

Γνωρίζοντας ότι η $y_1(x) = x$ είναι λύση της δ.ε.

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0,$$

βρείτε δεύτερη λύση y_2 της δ.ε. ώστε οι y_1, y_2 να αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε. [$y_2(x) = \frac{1}{x^2}$.]

Λύση. [α] Έχουμε

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2}.$$

Από το [β] της προηγούμενης άσκησης έχουμε ότι

$$W(x) = ce^{-P_1(x)} \quad \text{στο } I,$$

όπου $P_1(x)$ είναι μία αντιπαράγωγος της $p_1(x)$ στο I .

Συνεπάγεται

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = c \int \frac{e^{-P_1(x)}}{y_1(x)^2} dx = cQ(x) + c' \quad \text{στο } I,$$

όπου $Q(x)$ είναι μία αντιπαράγωγος της $\frac{e^{-P_1(x)}}{y_1(x)^2}$ στο I . Επομένως

$$y_2(x) = cy_1(x)Q(x) + c'y_1(x) \quad \text{στο}$$

είναι μία δεύτερη λύση της δ.ε. στο I .

Αν πάρουμε $c = 1$ και $c' = 0$, ας δούμε αν η y_1 και η $y_2 = y_1Q$ αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

Από την πρώτη σχέση έχουμε

$$W(x) = y_1^2 \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = y_1^2 Q' = y_1^2 \frac{e^{-P_1}}{y_1^2} = e^{-P_1} \neq 0 \quad \text{στο } I,$$

οπότε η απάντηση είναι καταφατική.

[β] Για την δ.ε. $y'' + 2y' + y = 0$ είναι $p_1(x) = 2$, οπότε θεωρούμε την $P_1(x) = 2x$ και τότε

$$\frac{e^{-P_1(x)}}{y_1(x)^2} = \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}} = 1.$$

Μια αντιπαράγωγος της σταθερής 1 είναι η $Q(x) = x$ και μια δεύτερη λύση της δ.ε. είναι η

$$y_2 = xe^{-x}.$$

Οι δύο λύσεις αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε.

7. Έστω ότι οι $p_1(x), p_2(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I και ότι οι y_1, y_2 αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ομογενούς γραμμικής δ.ε.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

[α] Αποδείξτε ότι οι y_1, y_2 δεν μπορούν να μηδενίζονται στο ίδιο σημείο του I .

[β] Αποδείξτε ότι οι y_1, y_2 δεν μπορούν να έχουν τοπικό ακρότατο στο ίδιο σημείο του I .

[γ] Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της y_1 υπάρχει μοναδική ρίζα της y_2 και αντιστρόφως.

Λύση. [α] Έστω $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in I$. Τότε

$$W(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) = 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι οι y_1, y_2 αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων, οπότε ισχύει $W(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

[γ] Έστω $a, b \in I$ δύο ρίζες της y_1 με $a < b$.

Υποθέτουμε ότι η y_2 δεν έχει καμμία ρίζα ανάμεσα στα a, b . Από το [α] έχουμε ότι $y_2(a) \neq 0$ και $y_2(b) \neq 0$. Άρα η y_2 δεν μηδενίζεται στο $[a, b]$ και, επομένως, η συνάρτηση

$$f = \frac{y_1}{y_2}$$

είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και ισχύει $f(a) = f(b) = 0$. Άρα υπάρχει ξ ανάμεσα στα a, b ώστε

$$f'(\xi) = 0.$$

Τότε

$$\frac{W'(\xi)}{y_2(\xi)^2} = \frac{y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)}{y_2(\xi)^2} = -f'(\xi) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι ισχύει $W(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της y_2 ανάμεσα στα a, b .

Αν οι ρίζες a, b της y_1 είναι διαδοχικές και υπήρχαν δύο ρίζες της y_2 ανάμεσα στις a, b , τότε θα υπήρχε και μία ρίζα της y_1 ανάμεσα στις δύο αυτές ρίζες της y_2 και, επομένως, οι a, b δεν θα ήταν διαδοχικές ρίζες της y_1 .