

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Λύστε τις παρακάτω δ.ε. με σταθερούς συντελεστές. Στην περίπτωση που αναφέρονται αρχικές συνθήκες βρείτε τη λύση που τις ικανοποιεί.

α. $y'' + 2y' - 3y = 0$.

β. $4y'' + 4y' + y = 0$. [$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$.]

γ. $y'' + 5y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -6$. [$y = 1 - e^{-5x}$.]

δ. $y'' + 9y = 0$. [$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$.]

ε. $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

Λύση. [α] Το πολυώνυμο $r^2 + 2r - 3$ έχει τις ρίζες 1 και -3 . Άρα οι $y_1 = e^x$ και $y_2 = e^{-3x}$ αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε. και η γενική λύση είναι της μορφής

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}.$$

[ε] Το πολυώνυμο $r^2 + 2r + 5$ έχει τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες $-1 \pm 2i$. Άρα οι $y_1 = e^{-x} \cos 2x$ και $y_2 = e^{-x} \sin 2x$ αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε. και η γενική λύση είναι της μορφής

$$y = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^{-x}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} y' &= (-2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x)e^{-x} - (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^{-x} \\ &= ((2c_2 - c_1) \cos 2x - (c_2 + 2c_1) \sin 2x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ 2c_2 - c_1 = -3 \end{cases}$$

Άρα $c_1 = 1$ και $c_2 = -1$ και η λύση που ζητάμε είναι η

$$(\cos 2x - \sin 2x)e^{-x}.$$

2. Για την δ.ε. με σταθερούς συντελεστές

$$ay'' + by' + cy = 0$$

αποδείξτε τα εξής.

- α. Αν $a, b, c > 0$, τότε κάθε λύση της δ.ε. έχει όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.
β. Αν $a, c > 0$ και $b = 0$, τότε κάθε λύση της δ.ε. είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ αλλά υπάρχουν λύσεις της δ.ε. που δεν έχουν όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.
γ. Αν $a, b > 0$ και $c = 0$, τότε κάθε λύση της δ.ε. έχει πεπερασμένο όριο στο $+\infty$.

Λύση. [α] Η $ar^2 + br + c = 0$ έχει ρίζες $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ και $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, όπου $\Delta = b^2 - 4ac$.
Αν $\Delta > 0$, τότε, επειδή $a, b, c > 0$, έχουμε $0 < \Delta < b^2$ και άρα $0 < \sqrt{\Delta} < b$. Συνεπάγεται
ότι $r_1, r_2 < 0$, οπότε

$$e^{r_1 x} \rightarrow 0, \quad e^{r_2 x} \rightarrow 0 \quad \text{όταν } x \rightarrow +\infty.$$

Άρα και για τη γενική λύση ισχύει

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \rightarrow 0 \quad \text{όταν } x \rightarrow +\infty.$$

Αν $\Delta = 0$, τότε το $r = -\frac{b}{2a}$ είναι διπλή ρίζα και, επειδή $r < 0$, έχουμε

$$e^{rx} \rightarrow 0, \quad x e^{rx} \rightarrow 0 \quad \text{όταν } x \rightarrow +\infty.$$

Άρα και για τη γενική λύση ισχύει

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \rightarrow 0 \quad \text{όταν } x \rightarrow +\infty.$$

Αν $\Delta < 0$, τότε $r_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \kappa + i\lambda$ και $r_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \kappa - i\lambda$ με $\kappa < 0$.
Άρα

$$e^{\kappa x} \cos \lambda x \rightarrow 0, \quad e^{\kappa x} \sin \lambda x \rightarrow 0 \quad \text{όταν } x \rightarrow +\infty.$$

Επομένως για τη γενική λύση έχουμε πάλι

$$y = c_1 e^{\kappa x} \cos \lambda x + c_2 e^{\kappa x} \sin \lambda x \rightarrow 0 \quad \text{όταν } x \rightarrow +\infty.$$

[β] Η εξίσωση $ar^2 + c = 0$ έχει συζυγείς μιγαδικές λύσεις $r = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}} = \pm i\lambda$. Η γενική
λύση της δ.ε. έχει τη μορφή

$$y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Τότε

$$|y| \leq |c_1| |\cos \lambda x| + |c_2| |\sin \lambda x| \leq |c_1| + |c_2| \quad \text{για κάθε } x$$

και άρα είναι φραγμένη.

Μία από τις λύσεις είναι η $y = \cos \lambda x$ και δεν έχει όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.

[Μπορείτε να αποδείξετε ότι η μοναδική λύση με όριο ίσο με 0 στο $+\infty$ είναι η μηδενική
λύση, δηλαδή εκείνη με $c_1 = c_2 = 0$.]

[γ] Η εξίσωση $ar^2 + br = 0$ έχει τις λύσεις $r_1 = 0$ και $r_2 = -\frac{b}{a} < 0$. Άρα για τη γενική
λύση της δ.ε. ισχύει

$$y = c_1 + c_2 e^{r_2 x} \rightarrow c_1 \quad \text{όταν } x \rightarrow +\infty.$$

3. Λύστε τις παρακάτω δ.ε. με σταθερούς συντελεστές. Στην περίπτωση που αναφέρονται αρχικές συνθήκες βρείτε τη λύση που τις ικανοποιεί.

α. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. [$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x$.]

β. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. [$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$.]

γ. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 4y^{(2)} = 0$. [$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)e^{2x}$.]

δ. $y^{(4)} + y = 0$. [$y = e^{kx}(c_1 \cos kx + c_2 \sin kx) + e^{-kx}(c_3 \cos kx + c_4 \sin kx)$, όπου $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.]

ε. $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y^{(3)} - 2y^{(2)} + y^{(1)} - y = 0$.

Λύση. [α] Το πολυώνυμο $r^3 - 3r^2 + 3r - 1$ παραγοντοποιείται σε $(r - 1)^3$ και άρα έχει τριπλή ρίζα το 1. Άρα οι $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ και $y_3 = x^2e^x$ αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε. και η γενική λύση είναι της μορφής

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x.$$

[δ] Είναι

$$r^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^4 = -1.$$

Επομένως, έχουμε να βρούμε τις τέταρτες ρίζες του -1 . Γράφουμε τον -1 και τον άγνωστο r στην πολική τους μορφή:

$$r = R(\cos \theta + i \sin \theta), \quad -1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

όπου $R > 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$ και τότε η $r^4 = -1$ ισοδυναμεί με

$$R^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$R^4 = 1 \quad \text{και} \quad 4\theta = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$R = 1 \quad \text{και} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Υπάρχουν τέσσερις τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες το $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$ κι αυτές είναι οι 0, 1, 2, 3. Άρα έχουμε τέσσερις τιμές του θ και τέσσερις αντίστοιχες τιμές του r :

$$r_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}, r_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}, r_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}, r_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

Αυτές είναι οι τέταρτες ρίζες του -1 , δηλαδή οι τέσσερις ρίζες του $r^4 + 1 = 0$. Αν θέσουμε $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, τότε

$$r_1 = k + ik, \quad r_2 = -k + ik, \quad r_3 = -k - ik, \quad r_4 = k - ik.$$

Επομένως έχουμε το ζευγάρι $k \pm ik$ συζυγών μιγαδικών ριζών καθώς και το ζευγάρι $-k \pm ik$ και άρα η γενική λύση της δ.ε. είναι της μορφής

$$y = e^{kx}(c_1 \cos kx + c_2 \sin kx) + e^{-kx}(c_3 \cos kx + c_4 \sin kx).$$

[ε] Έχουμε

$$\begin{aligned} r^5 - r^4 + 2r^3 - 2r^2 + r - 1 &= (r - 1)r^4 + 2r^2(r - 1) + (r - 1) \\ &= (r - 1)(r^4 + 2r^2 + 1) = (r - 1)(r^2 + 1)^2 \\ &= (r - 1)(r - i)^2(r + i)^2. \end{aligned}$$

Άρα το πολυώνυμο $r^5 - r^4 + 2r^3 - 2r^2 + r - 1$ έχει απλή ρίζα το 1 και διπλές ρίζες τις συζυγείς μιγαδικές $\pm i$. Έτσι οι $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$, $y_4 = x \cos x$ και $y_5 = x \sin x$ αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε. Η γενική λύση της δ.ε. έχει τη μορφή

$$y = c_1e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4x \cos x + c_5x \sin x.$$

4. Αν κάθε ρίζα του πολωνύμου $r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n = 0$ έχει αρνητικό πραγματικό μέρος, αποδείξτε ότι κάθε λύση της δ.ε.

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y^{(1)} + a_ny = 0$$

έχει όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.

Λύση. Έστω r οποιαδήποτε ρίζα του πολυωνύμου $r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$. Αν η r είναι πραγματική, τότε ανάλογα με την πολλαπλότητά της m συνεισφέρει στο θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε. τις m λύσεις

$$e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{m-1} e^{rx}.$$

Επειδή $r < 0$, όλες αυτές οι λύσεις έχουν όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.

Αν η $r = \kappa + i\lambda$ είναι γνήσια μιγαδική, τότε υπάρχει και η συζυγής μιγαδική ρίζα $r = \kappa - i\lambda$. Οι δύο ρίζες έχουν ίδια πολλαπλότητα m και, μαζί, συνεισφέρουν στο θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δ.ε. τις $2m$ λύσεις

$$e^{\kappa x} \cos \lambda x, e^{\kappa x} \sin \lambda x, \dots, x^{m-1} e^{\kappa x} \cos \lambda x, x^{m-1} e^{\kappa x} \sin \lambda x.$$

Επειδή $\kappa < 0$, όλες αυτές οι λύσεις έχουν όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.

Τώρα, όλες αυτές οι λύσεις σχηματίζουν το θεμελιώδες σύστημα λύσεων

$$y_1, \dots, y_n$$

της δ.ε. Επειδή όλες έχουν όριο ίσο με 0 στο $+\infty$, συνεπάγεται ότι για τη γενική λύση ισχύει

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \rightarrow 0 \quad \text{όταν } x \rightarrow +\infty.$$