Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις του έκτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών για να βρείτε τη γενική λύση των παρακάτω δ.ε.

   α. $y'' + y' - 2y = 2x$.

   β. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$.

   γ. $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$.

   δ. $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$.

   ε. $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3$. $[y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} + 3.]$

   στ. $y^{(4)} + y^{(3)} = \sin 2x$. $[y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + \frac{1}{40}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x.]$

   Λύση. [α] Το πολυώνυμο $r^2 + r - 2$ έχει ρίζες τις 1 και -2, οπότε η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. $y'' + y' - 2y = 0$ είναι η

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x}.$$

Η συνάρτηση $2x$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και επειδή γράφεται $2xe^{0x}$ και επειδή το 0 είναι ρίζα πολλαπλότητας 0 του $r^2 + r - 2$, υποθέτουμε ως ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + y' - 2y = 2x$ την

$$y_p = x^0(A_0x + A_1)e^{0x} = A_0x + A_1.$$

Από την μη-ομογενή δ.ε. έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες:

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p' - 2y_p &= 2x \\ 0 + A_0 - 2(A_0x + A_1) &= 2x \\ -2A_0x + (A_0 - 2A_1) &= 2x \\ \begin{cases} -2A_0 = 2 \\ A_0 - 2A_1 = 0 \end{cases}& \\ \begin{cases} A_0 = -1 \\ A_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}& \end{aligned}$$

Άρα ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η $y_p = -x - \frac{1}{2}$, οπότε η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η

$$c_1e^x + c_2e^{-2x} - x - \frac{1}{2}.$$

[β] Το πολυώνυμο $2r^2 - 4r - 6$ έχει ρίζες τις -1 και 3, οπότε η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. $2y'' - 4y' - 6y = 0$ είναι η

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}.$$

Η συνάρτηση $3e^{2x}$ ισούται με πολυώνυμο μηδενικού βαθμού επί e^{2x} και επειδή το 2 είναι ρίζα πολλαπλότητας 0 του $2r^2 - 4r - 6$, υποθέτουμε ως ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$ την

$$y_p = x^0A_0e^{2x} = A_0e^{2x}.$$

Τώρα έχουμε

$$y_p' = 2A_0e^{2x}, \qquad y_p'' = 4A_0e^{2x},$$

οπότε από την μη-ομογενή δ.ε. έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες:

$$\begin{aligned} 2y_p'' - 4y_p' - 6y_p &= 3e^{2x} \\ 8A_0e^{2x} - 8A_0e^{2x} - 6A_0e^{2x} &= 3e^{2x} \\ -6A_0 &= 3 \\ A_0 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η $y_p = -\frac{1}{2}e^{2x}$, οπότε η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η

$$c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}.$$

[γ] Το πολυώνυμο $r^2 + 2r$ έχει ρίζες τις 0 και -2, οπότε η ομογενής δ.ε. έχει γενική λύση την

$$y = c_1e^{0x} + c_2e^{-2x} = c_1 + c_2e^{-2x}.$$

Χωρίζουμε την μη-ομογενή εξίσωση $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$ σε δύο μη-ομογενείς δ.ε. Τις

$$y'' + 2y' = 3, \qquad y'' + 2y' = 4\sin 2x.$$

Θα βρούμε μία ειδική λύση της πρώτης και μία ειδική λύση της δεύτερης και τότε μία ειδική λύση της $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$ θα ισούται με το άθροισμα των δύο επί μέρους ειδικών λύσεων.

Η συνάρτηση 3 ισούται με πολυώνυμο μηδενικού βαθμού επί e^{0x} και, επειδή το 0 είναι ρίζα πολλαπλότητας 1 του $r^2 + 2r$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + 2y' = 3$ είναι η

$$y_p = x^1A_0e^{0x} = A_0x.$$

Τότε

$$y_p' = A_0, \qquad y_p'' = 0$$

και από την μη-ομογενή δ.ε. $y'' + 2y' = 3$ έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες:

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' &= 3 \\ 0 + 2A_0 &= 3 \\ A_0 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Άρα ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + 2y' = 3$ είναι η

$$y_p = \frac{3}{2}x.$$

Η συνάρτηση $4\sin 2x$ ισούται με πολυώνυμο μηδενικού βαθμού επί e^{0x} επί $\sin 2x$ και, επειδή τα $0 \pm 2i$ είναι ρίζες πολλαπλότητας 0 του $r^2 + 2r$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + 2y' = 4\sin 2x$ είναι η

$$y_p = x^0A_0e^{0x}\cos 2x + x^0B_0e^{0x}\sin 2x = A_0\cos 2x + B_0\sin 2x.$$

Τότε

$$y_p' = -2A_0\sin 2x + 2B_0\cos 2x, \qquad y_p'' = -4A_0\cos 2x - 4B_0\sin 2x$$

και και από την μη-ομογενή δ.ε. $y'' + 2y' = 4\sin 2x$ έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες:

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' &= 4\sin 2x \\ (-4A_0 + 4B_0)\cos 2x + (-4B_0 - 4A_0)\sin 2x &= 4\sin 2x \\ \begin{cases} -4A_0 + 4B_0 = 0 \\ -4B_0 - 4A_0 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} A_0 = -\frac{1}{2} \\ B_0 = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + 2y' = 4\sin 2x$ είναι η

$$y_p = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Τέλος, ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$ είναι η

$$y_p = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

και η γενική λύση της είναι η

$$y = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

[δ] Το πολυώνυμο $r^2 - 2r + 1$ έχει ρίζα πολλαπλότητας 2 το 1, οπότε η ομογενής δ.ε. έχει γενική λύση την

$$y = c_1e^x + c_2xe^x.$$

Χωρίζουμε την μη-ομογενή εξίσωση $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$ σε δύο μη-ομογενείς δ.ε. Τις

$$y'' - 2y' + y = 4, \qquad y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Θα βρούμε μία ειδική λύση της πρώτης και μία ειδική λύση της δεύτερης και τότε μία ειδική λύση της $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$ θα ισούται με το άθροισμα των δύο επί μέρους ειδικών λύσεων.
Η συνάρτηση 4 ισούται με πολυώνυμο μηδενικού βαθμού επί e^{0x} και, επειδή το 0 είναι ρίζα πολλαπλότητας 0 του $r^2 - 2r + 1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' - 2y' + y = 4$ είναι η

$$y_p = x^0A_0e^{0x} = A_0.$$

Τότε από την μη-ομογενή δ.ε. $y'' - 2y' + y = 4$ έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες:

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + y_p &= 4 \\ A_0 &= 4. \end{aligned}$$

Άρα ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' - 2y' + y = 4$ είναι η

$$y_p = 4.$$

Η συνάρτηση xe^x ισούται με πολυώνυμο βαθμού 1 επί e^{1x} και, επειδή το 1 είναι ρίζα πολλαπλότητας 2 του $r^2 - 2r + 1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' - 2y' + y = xe^x$ είναι η

$$y_p = x^2(A_0x + A_1)e^{1x} = (A_0x^3 + A_1x^2)e^x.$$

Τότε

$$y_p' = (3A_0x^2 + 2A_1x)e^x + (A_0x^3 + A_1x^2)e^x = (A_0x^3 + (3A_0 + A_1)x^2 + 2A_1x)e^x,$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= (3A_0x^2 + (6A_0 + 2A_1)x + 2A_1)e^x + (A_0x^3 + (3A_0 + A_1)x^2 + 2A_1x)e^x \\ &= (A_0x^3 + (6A_0 + A_1)x^2 + (6A_0 + 4A_1)x + 2A_1)e^x \end{aligned}$$

και και από την μη-ομογενή δ.ε. $y'' - 2y' + y = xe^x$ έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες:

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = xe^x$$
$$(6A_0x + 2A_1)e^x = xe^x$$
$$\begin{cases} 6A_0 = 1 \\ 2A_1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{6} \\ A_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' - 2y' + y = xe^x$ είναι η

$$y_p = \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Τέλος, ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$ είναι η

$$y_p = \frac{1}{6}x^3e^x + 4$$

και η γενική λύση της είναι η

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x + 4.$$

2. Γράψτε την κατάλληλη μορφή μιας ειδικής λύσης των παρακάτω δ.ε. χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Μην υπολογίσετε τις σταθερές.

   α. $y'' + 4y = x^2 \sin 2x + (6x + 7) \cos 2x$.

   β. $y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2 + 1) \sin 2x + 3e^{-x} \cos x + 4e^x$.

   γ. $y^{(4)} + 4y^{(2)} = \sin 2x + xe^x + 4$.

   Λύση. [α] Οι ρίζες του $r^2 + 4$ είναι οι συζυγείς μιγαδικοί $0 \pm 2i$ πολλαπλότητας 1.
   Η συνάρτηση $x^2 \sin 2x + (6x + 7) \cos 2x$ ισούται με πολυώνυμο δεύτερου βαθμού επί $e^{0x} \sin 2x$ συν πολυώνυμο πρώτου βαθμού επί $e^{0x} \cos 2x$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + 4y = x^2 \sin 2x + (6x + 7) \cos 2x$ είναι η

$$y_p = x^1(A_0x^2 + A_1x + A_2)e^{0x} \sin 2x + x^1(B_0x^2 + B_1x + B_2)e^{0x} \cos 2x.$$

   [β] Οι ρίζες του $r^2 + 3r + 2$ είναι οι -1 και -2 πολλαπλότητας 1.
   Η συνάρτηση $e^x(x^2+1) \sin 2x$ ισούται με πολυώνυμο δεύτερου βαθμού επί $e^x \sin 2x$. Επειδή τα $1 \pm 2i$ είναι ρίζες πολλαπλότητας 0 του $r^2 + 3r + 2$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2 + 1) \sin 2x$ είναι η

$$y_p = x^0(A_0x^2 + A_1x + A_2)e^x \sin 2x + x^0(B_0x^2 + B_1x + B_2)e^x \cos 2x.$$

Η συνάρτηση $3e^{-x}\cos x$ ισούται με πολυώνυμο βαθμού 0 επί $e^{-x}\cos x$. Επειδή τα $-1\pm i$ είναι ρίζες πολλαπλότητας 0 του r^2+3r+2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y''+3y'+2y=3e^{-x}\cos x$ είναι η

$$y_p = x^0 C_0 e^{-x}\sin x + x^0 D_0 e^{-x}\cos x.$$

Η συνάρτηση $4e^x$ ισούται με πολυώνυμο βαθμού 0 επί e^x και επειδή το 1 είναι ρίζα του r^2+3r+2 πολλαπλότητας 0, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y''+3y'+2y=4e^x$ είναι η

$$y_p = x^0 E_0 e^x.$$

Συνεπάγεται ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y''+3y'+2y=e^x(x^2+1)\sin 2x+3e^{-x}\cos x+4e^x$ είναι η

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0x^2+A_1x+A_2)e^x\sin 2x+(B_0x^2+B_1x+B_2)e^x\cos 2x \\ &\quad + C_0e^{-x}\sin x + D_0e^{-x}\cos x + E_0e^x. \end{aligned}$$

[γ] Οι ρίζες του $r^4+4r^2=r^2(r^2+4)$ είναι το 0 με πολλαπλότητα 2 και τα $0\pm 2i$ με πολλαπλότητα 1.
Η συνάρτηση 4 ισούται με πολυώνυμο βαθμού 0 επί e^{0x}. Επειδή το 0 είναι ρίζα πολλαπλότητας 2 του r^4+4r^2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y^{(4)}+4y^{(2)}=4$ είναι η

$$y_p = x^2A_0e^{0x}=A_0x^2.$$

Η συνάρτηση xe^x ισούται με πολυώνυμο βαθμού 1 επί e^x. Επειδή το 1 είναι ρίζα πολλαπλότητας 0 του r^4+4r^2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y^{(4)}+4y^{(2)}=xe^x$ είναι η

$$y_p = x^0(B_0x+B_1)e^x=(B_0x+B_1)e^x.$$

Η συνάρτηση $\sin 2x$ ισούται με πολυώνυμο βαθμού 0 επί $e^{0x}\sin 2x$. Επειδή τα $0\pm 2i$ είναι ρίζες του r^4+4r^2 πολλαπλότητας 1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y^{(4)}+4y^{(2)}=\sin 2x$ είναι η

$$y_p = x^1C_0e^{0x}\sin 2x + x^1D_0e^{0x}\cos 2x = C_0x\sin 2x + D_0x\cos 2x.$$

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y^{(4)}+4y^{(2)}=\sin 2x+xe^x+4$ είναι η

$$y_p = A_0x^2+(B_0x+B_1)e^x+x(C_0\sin 2x+D_0\cos 2x).$$

3. Αν $\lambda>0$ και $\lambda\neq n\pi$ για $n=1,\dots,N$, βρείτε τη γενική λύση της δ.ε.

$$y''+\lambda^2y=\sum_{n=1}^{N}a_n\sin n\pi x.$$

[$y=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x+\sum_{n=1}^N\frac{a_n}{\lambda^2-n^2\pi^2}\sin n\pi x.$]

4. Λύστε τη δ.ε. $y''+y=g(x)$ στο $[0,+\infty)$, όπου

$$g(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } 0\le x\le\pi \\ \pi+\sin 2x, & \text{αν } \pi\le x<+\infty \end{cases}$$

με αρχικές συνθήκες $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

Λύση. Λύνουμε τη δ.ε. στο διάστημα $[0, \pi]$. Στο $[0, \pi]$ η δ.ε. γράφεται

$$y'' + y = x.$$

Το $r^2 + 1$ έχει ρίζες τα $0 \pm i$ και άρα η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. $y'' + y = 0$ είναι η

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Η συνάρτηση x ισούται με πολυώνυμο βαθμού 1 επί e^{0x}. Επειδή το 0 είναι ρίζα πολλαπλότητας 0 του $r^2 + 1$, μπορούμε να θεωρήσουμε ως ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + y = x$ την

$$y_p = x^0 (A_0 x + A_1) e^{0x} = A_0 x + A_1.$$

Τότε $y_p'' = 0$, οπότε από την μη-ομογενή δ.ε. $y'' + y = x$ έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= x \\ A_0 x + A_1 &= x \\ &\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα μία ειδική λύση της μη-ομογενούς της δ.ε. $y'' + y = x$ είναι η

$$y_p = x.$$

Επομένως, η γενική λύση της $y'' + y = x$ στο $[0, \pi]$ είναι η

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x.$$

Τώρα είναι

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x + 1,$$

οπότε από τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ έχουμε

$$c_2 = 0, \quad c_1 + 1 = 2$$

και η λύση στο διάστημα $[0, \pi]$ είναι η

$$y = \sin x + x.$$

Τώρα θα λύσουμε τη δ.ε. στο διάστημα $[\pi, +\infty)$ η οποία γράφεται

$$y'' + y = \pi + \sin 2x.$$

Επειδή η λύση που ψάχνουμε πρέπει να είναι λύση της δ.ε. στο διάστημα $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι πρέπει να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$. Επομένως οι τιμές της λύσης και της παραγώγου της που θα βρούμε για το $[\pi, +\infty)$ πρέπει να είναι ίσες με τις αντίστοιχες τιμές της λύσης και της παραγώγου της που βρήκαμε για το $[0, \pi]$. Δηλαδή, η λύση που θα βρούμε για το $[\pi, +\infty)$ πρέπει να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$y(\pi) = \sin \pi + \pi = \pi, \qquad y'(\pi) = \cos \pi + 1 = 0.$$

Είδαμε ότι η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. $y'' + y = 0$ είναι η

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Η συνάρτηση π ισούται με πολυώνυμο βαθμού 0 επί e^{0x} και το 0 είναι ρίζα πολλαπλότητας 0 του $r^2 + 1$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + y = \pi$ είναι η
$$y_p = x^0 A_0 e^{0x} = A_0.$$
Από την μη-ομογενή δ.ε. $y'' + y = \pi$ έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες:
$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= \pi \\ A_0 &= \pi. \end{aligned}$$
Άρα μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + y = \pi$ είναι η
$$y_p = \pi.$$
Η συνάρτηση $\sin 2x$ ισούται με πολυώνυμο βαθμού 0 επί $e^{0x} \sin 2x$ και τα $0 \pm 2i$ είναι ρίζες πολλαπλότητας 0 του r^2+1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + y = \sin 2x$ είναι η
$$y_p = x^0 B_0 e^{0x} \sin 2x + x^0 C_0 e^{0x} \cos 2x = B_0 \sin 2x + C_0 \cos 2x.$$
Τότε
$$y_p' = 2B_0 \cos 2x - 2C_0 \sin 2x, \qquad y_p'' = -4B_0 \sin 2x - 4C_0 \cos 2x,$$
οπότε από την μη-ομογενή δ.ε. $y'' + y = \sin 2x$ έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες:
$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= \sin 2x \\ -3B_0 \sin 2x - 3C_0 \cos 2x &= \sin 2x \\ &\begin{cases} B_0 = -\frac{1}{3} \\ C_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
Άρα μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + y = \sin 2x$ είναι η
$$y_p = -\frac{1}{3} \sin 2x.$$
Επομένως, μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. $y'' + y = \pi + \sin 2x$ είναι η
$$y_p = \pi - \frac{1}{3} \sin 2x$$
και η γενική λύση στο $[\pi, +\infty)$ είναι η
$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \pi - \frac{1}{3} \sin 2x.$$
Τώρα
$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x - \frac{2}{3} \cos 2x.$$
Από τις αρχικές συνθήκες $y(\pi) = \pi$, $y'(\pi) = 0$ έχουμε
$$-c_2 + \pi = \pi, \qquad -c_1 - \frac{2}{3} = 0$$
και άρα
$$c_1 = -\frac{2}{3}, \qquad c_2 = 0.$$

Άρα η λύση στο $[\pi, +\infty)$ είναι η

$$y = -\frac{2}{3}\sin x + \pi - \frac{1}{3}\sin 2x.$$

Επομένως, η λύση στο $[0, +\infty)$ είναι η

$$y = \begin{cases} \sin x + x & \text{για } 0 \le x \le \pi \\ -\frac{2}{3}\sin x + \pi - \frac{1}{3}\sin 2x & \text{για } \pi \le x < +\infty \end{cases}$$

Η λύση που βρήκαμε είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ αλλά πρέπει και η y'' να είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.
Στο διάστημα $[0, \pi]$ είναι

$$y'' = -\sin x$$

και στο διάστημα $[\pi, +\infty)$ είναι

$$y'' = \frac{2}{3}\sin x + \frac{4}{3}\sin 2x.$$

Οι δύο αυτές συναρτήσεις έχουν την ίδια τιμή 0 στο σημείο π, οπότε η λύση που βρήκαμε είναι πράγματι λύση της δ.ε. στο $[0, +\infty)$.

5. Βρείτε ειδική λύση των παρακάτω δ.ε. με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων.

   α. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$.
   β. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$. $[y_p = -\frac{2}{3}xe^{-x}.]$
   γ. $y'' + y = \tan x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. $[y_p = -(\cos x)\log(\tan x + \sec x).]$
   δ. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$. $[y_p = \frac{1}{30}e^{4x}.]$

Λύση. [α] Το $r^2 - 5r + 6$ έχει ρίζες τα 2 και 3, οπότε η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. $y'' - 5y' + 6y = 0$ είναι η

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Υποθέτουμε ότι η μη-ομογενής δ.ε. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$ έχει ειδική λύση

$$y_p = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}.$$

Τότε

$$y_p' = 2c_1(x)e^{2x} + 3c_2(x)e^{3x} + c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{3x}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{3x} = 0. \tag{1}$$

Τότε

$$y_p' = 2c_1(x)e^{2x} + 3c_2(x)e^{3x}$$

και άρα

$$y_p'' = 4c_1(x)e^{2x} + 9c_2(x)e^{3x} + 2c_1'(x)e^{2x} + 3c_2'(x)e^{3x}.$$

Τώρα από την μη-ομογενή δ.ε. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$ με την y_p έχουμε

$$\begin{aligned} 4c_1(x)e^{2x} + & 9c_2(x)e^{3x} + 2c_1'(x)e^{2x} + 3c_2'(x)e^{3x} - 5(2c_1(x)e^{2x} + 3c_2(x)e^{3x}) \\ & + 6(c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}) = 2e^x \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$2c_1'(x)e^{2x} + 3c_2'(x)e^{3x} = 2e^x. \tag{2}$$

Οι (1), (2) αποτελούν το σύστημα

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{3x} = 0 \\ 2c_1'(x)e^{2x} + 3c_2'(x)e^{3x} = 2e^x \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, τους τύπους του Cramer, βρίσκουμε

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 2e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{-2e^{4x}}{e^{5x}} = -2e^{-x},$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 2e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{2e^{3x}}{e^{5x}} = 2e^{-2x}.$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τις

$$c_1(x) = 2e^{-x}, \qquad c_2(x) = -e^{-2x}$$

και τότε έχουμε την ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε.

$$y_p = 2e^{-x}e^{2x} - e^{-2x}e^{3x} = e^x.$$

6. Βρείτε με τη μέθοδο των μεταβλητών παραμέτρων τη γενική λύση της δ.ε.

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3 \qquad \text{για } x > 0$$

αφού αποδείξετε ότι οι x, xe^x είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε.

Λύση. Είναι εύκολο με απλή επαλήθευση να αποδείξουμε ότι οι x, xe^x είναι λύσεις της ομογενούς δ.ε. Μπορούμε, επίσης, να δούμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες μέσω της Βρονσκιανής των δύο λύσεων

$$\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = x(e^x + xe^x) - xe^x = x^2e^x \neq 0 \qquad \text{για } x > 0.$$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι η

$$y = c_1x + c_2xe^x.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η

$$y_p = c_1(x)x + c_2(x)xe^x.$$

Τότε

$$y_p' = c_1(x) + c_2(x)(e^x + xe^x) + c_1'(x)x + c_2'(x)xe^x.$$

Υποθέτουμε ότι

$$c_1'(x)x + c_2'(x)xe^x = 0, \tag{3}$$

οπότε

$$y_p' = c_1(x) + c_2(x)(e^x + xe^x).$$

Συνεπάγεται

$$y_p'' = c_2(x)(2e^x + xe^x) + c_1'(x) + c_2'(x)(e^x + xe^x),$$

οπότε η δ.ε. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$ με την y_p γίνεται

$$x^2c_1'(x) + x^2c_2'(x)(e^x + xe^x) = 2x^3. \tag{4}$$

Οι (3), (4) συνδυάζονται στο σύστημα

$$\begin{cases} c_1'(x)x + c_2'(x)xe^x = 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)(e^x + xe^x) = 2x \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους του Cramer, βρίσκουμε

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ 2x & e^x + xe^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{-2x^2e^x}{x^2e^x} = -2,$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{2x^2}{x^2e^x} = 2e^{-x}.$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τις

$$c_1(x) = -2x, \qquad c_2(x) = -2e^{-x},$$

οπότε μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η

$$y_p = -2x^2 - 2e^{-x}xe^x = -2x^2 - 2x.$$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η

$$y = c_1x + c_2xe^x - 2x^2 - 2x = (c_1 - 2)x + c_2xe^x - 2x^2 = c_1x + c_2xe^x - 2x^2.$$

7. Βρείτε τύπο για τη γενική λύση της δ.ε. $y'' - 5y' + 6y = g(x)$, αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. [$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \int_0^x (e^{3(x-t)} - e^{2(x-t)})g(t)\,dt$.]

8. Βρείτε τύπο για τη λύση της δ.ε. $y'' + y = g(x)$ με αρχικές συνθήκες $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. $y'' + y = 0$ είναι η

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Υποθέτουμε ότι μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η

$$y_p = c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x.$$

Τότε

$$y_p' = c_1(x) \cos x - c_2(x) \sin x + c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x.$$

Υποθέτουμε ότι

$$c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = 0, \tag{5}$$

οπότε

$$y_p' = c_1(x) \cos x - c_2(x) \sin x.$$

Συνεπάγεται

$$y_p'' = -c_1(x) \sin x - c_2(x) \cos x + c_1'(x) \cos x - c_2'(x) \sin x,$$

οπότε η δ.ε. $y'' + y = g(x)$ με την y_p γίνεται

$$c_1'(x)\cos x - c_2'(x)\sin x = g(x). \tag{6}$$

Οι (5), (6) αποτελούν το σύστημα

$$\begin{cases} c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = 0 \\ c_1'(x)\cos x - c_2'(x)\sin x = g(x) \end{cases}$$

Με τους τύπους του Cramer, βρίσκουμε

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ g(x) & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = g(x)\cos x,$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = -g(x)\sin x.$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τις

$$c_1(x) = \int_0^x g(t)\cos t\,dt, \qquad c_2(x) = -\int_0^x g(t)\sin t\,dt,$$

οπότε μία ειδική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η

$$y_p = \sin x\int_0^x g(t)\cos t\,dt - \cos x\int_0^x g(t)\sin t\,dt.$$

Τότε

$$y_p' = \cos x\int_0^x g(t)\cos t\,dt + \sin x\int_0^x g(t)\sin t\,dt$$

και έχουμε ότι

$$y_p(0) = 0, \qquad y_p'(0) = 0. \tag{7}$$

Τώρα, η γενική λύση της μη-ομογενούς δ.ε. είναι η

$$y = c_1\sin x + c_2\cos x + y_p.$$

Από τις αρχικές συνθήκες $y(0) = y_0$ και $y'(0) = y_0'$ και από την (7) συνεπάγεται

$$c_2 = y_0, \qquad c_1 = y_0'$$

και άρα η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η

$$\begin{aligned} y_0'\sin x + y_0\cos x + y_p &= y_0'\sin x + y_0\cos x + \int_0^x g(t)(\sin x\cos t - \cos x\sin t)\,dt \\ &= y_0'\sin x + y_0\cos x + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt. \end{aligned}$$