

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις του έβδομου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Λύστε την παρακάτω δ.ε. με τη δοσμένη αρχική συνθήκη. Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές καθώς και το γράφημα της λύσης τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2$.

$$u_t + 3u_x = 0, \quad u(x, 0) = 1/(1 + x^2).$$

Λύση. Βρίσκουμε τη χαρακτηριστική καμπύλη $(x(t), t)$ η οποία τέμνει τον x -άξονα σε τυχόν σημείο $(x_0, 0)$. Αυτή ικανοποιεί το

$$\begin{cases} x'(t) = 3 & \text{για } t \text{ σε κάποιο διάστημα } I \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Από την $x'(t) = 3$ παίρνουμε $x(t) = 3t + c$ για $t \in \mathbb{R}$ και από την $x(0) = x_0$ βρίσκουμε $c = x_0$. Άρα η χαρακτηριστική καμπύλη γράφεται

$$(3t + x_0, t) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Η καρτεσιανή εξίσωση της χαρακτηριστικής είναι $x = 3t + x_0$, οπότε η χαρακτηριστική είναι ευθεία με κλίση 3 ως προς τον t -άξονα.

Τώρα,

$$\frac{d}{dt} u(3t + x_0, t) = 3u_x(3t + x_0, t) + u_t(3t + x_0, t) = 0 \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

οπότε η $u(3t + x_0, t)$ είναι σταθερή συνάρτηση του t στο $\mathbb{R}$. Η σταθερή τιμή εξαρτάται από το x_0 , οπότε

$$u(3t + x_0, t) = f(x_0) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

όπου f είναι μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Γράφουμε $3t + x_0 = x$, οπότε $x_0 = x - 3t$, και έχουμε

$$u(x, t) = f(x - 3t) \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R}.$$

Συνδυάζουμε με την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = 1/(1 + x^2)$ για $t = 0$ και έχουμε

$$f(x) = u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Άρα

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + (x - 3t)^2} \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R}.$$

2. Λύστε την παρακάτω δ.ε. με τη δοσμένη αρχική συνθήκη και σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές.

$$u_t + xu_x = xu, \quad u(x, 0) = \phi(x).$$

Λύση. Η χαρακτηριστική καμπύλη $(x(t), t)$ η οποία τέμνει τον x -άξονα σε τυχόν σημείο $(x_0, 0)$ ικανοποιεί το

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) & \text{για } t \text{ σε κάποιο διάστημα } I \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Από την $x'(t) = x(t)$ παίρνουμε $x(t) = ce^t$ για $t \in \mathbb{R}$ και από την $x(0) = x_0$ βρίσκουμε $c = x_0$. Άρα η χαρακτηριστική καμπύλη γράφεται

$$(x_0 e^t, t) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Η καρτεσιανή εξίσωση της χαρακτηριστικής είναι $x = x_0 e^t$ και αποτελεί το γράφημα της συνάρτησης $x(t) = x_0 e^t$.

Τώρα,

$$\frac{d}{dt} u(x_0 e^t, t) = x_0 e^t u_x(x_0 e^t, t) + u_t(x_0 e^t, t) = x_0 e^t u(x_0 e^t, t) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Για απλούστευση του συμβολισμού γράφουμε, προσωρινά,

$$v(t) = u(x_0 e^t, t) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

οπότε

$$v'(t) = x_0 e^t v(t) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Λύνουμε αυτήν την διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε

$$v(t) = ce^{x_0 e^t} \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Η σταθερά c εξαρτάται από το x_0 , οπότε

$$u(x_0 e^t, t) = v(t) = f(x_0) e^{x_0 e^t} \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

όπου f είναι μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Γράφουμε $x_0 e^t = x$, οπότε $x_0 = x e^{-t}$, και έχουμε

$$u(x, t) = f(x e^{-t}) e^x \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R}.$$

Συνδυάζουμε με την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = \phi(x)$ για $t = 0$ και έχουμε

$$f(x) e^x = u(x, 0) = \phi(x).$$

Άρα $f(x) = \phi(x) e^{-x}$ και

$$u(x, t) = \phi(x e^{-t}) e^{-x e^{-t}} e^x \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R}.$$

3. Λύστε την παρακάτω δ.ε. με τη δοσμένη αρχική συνθήκη και σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές. Να προσδιοριστεί το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο καθορίζεται μονοσήμαντα η λύση από τη δοσμένη αρχική συνθήκη.

$$u_t + (t/x) u_x = 0, \quad u(x, 0) = \phi(x).$$

Λύση. Η χαρακτηριστική καμπύλη $(x(t), t)$ η οποία τέμνει τον x -άξονα σε τυχόν σημείο $(x_0, 0)$ ικανοποιεί το

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t}{x(t)} & \text{για } t \text{ σε κάποιο διάστημα } I \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Επειδή πρέπει να είναι $x(t) \neq 0$, λόγω συνέχειας θα ισχύει είτε $x(t) > 0$ για κάθε $t \in I$ είτε $x(t) < 0$ για κάθε $t \in I$.

Από την $x' = \frac{t}{x}$ παίρνουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\begin{aligned}xx' &= t \\ \int x \frac{dx}{dt} dt &= \int t dt \\ \int x dx &= \int t dt \\ x^2 &= t^2 + c \\ x &= \pm \sqrt{t^2 + c}.\end{aligned}$$

Από την $x(0) = x_0$ βρίσκουμε $c = x_0^2$.

Επειδή πρέπει να είναι $x(0) \neq 0$, έχουμε $x_0 \neq 0$ και άρα $c > 0$.

Άρα είτε $x(t) = \sqrt{t^2 + x_0^2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είτε $x(t) = -\sqrt{t^2 + x_0^2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Στην πρώτη περίπτωση η χαρακτηριστική καμπύλη είναι υπερβολή στο δεξιό xt -ημιεπίπεδο με ασύμπτωτες την ευθεία $x = t$ για $t \rightarrow +\infty$ και την ευθεία $x = -t$ για $t \rightarrow -\infty$. Στη δεύτερη περίπτωση η χαρακτηριστική καμπύλη είναι υπερβολή στο αριστερό xt -ημιεπίπεδο με ασύμπτωτες την ευθεία $x = -t$ για $t \rightarrow +\infty$ και την ευθεία $x = t$ για $t \rightarrow -\infty$.

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = x'(t)u_x(x(t), t) + u_t(x(t), t) = \frac{t}{x(t)}u_x(x(t), t) + u_t(x(t), t) = 0 \text{ για } t \in \mathbb{R}.$$

Άρα $u(x(t), t) = c$, όπου η σταθερά c εξαρτάται από το x_0 που βρίσκεται στον τύπο του $x(t)$. Δηλαδή $c = f(x_0)$ για κάποια συνάρτηση f στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (επειδή $x_0 \neq 0$).

Στην περίπτωση όπου $x(t) = \sqrt{t^2 + x_0^2}$ για κάθε t έχουμε $x_0 = x(0) > 0$ και

$$u(\sqrt{t^2 + x_0^2}, t) = f(x_0) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

και, γράφοντας $\sqrt{t^2 + x_0^2} = x$, οπότε $x > |t|$ και $x_0 = \sqrt{x^2 - t^2}$, έχουμε

$$u(x, t) = f(\sqrt{x^2 - t^2}) \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R} \text{ με } x > |t|.$$

Συνδυάζουμε με την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = \phi(x)$ για $t = 0$ και έχουμε

$$f(x) = u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{για } x > |t|.$$

Άρα

$$u(x, t) = \phi(\sqrt{x^2 - t^2}) \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R} \text{ με } x > |t|.$$

Στην περίπτωση όπου $x(t) = -\sqrt{t^2 + x_0^2}$ για κάθε t έχουμε $x_0 = x(0) < 0$ και

$$u(-\sqrt{t^2 + x_0^2}, t) = f(x_0) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Γράφοντας $-\sqrt{t^2 + x_0^2} = x$, οπότε $x < -|t|$ και $x_0 = -\sqrt{x^2 - t^2}$, έχουμε

$$u(x, t) = f(-\sqrt{x^2 - t^2}) \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R} \text{ με } x < -|t|.$$

Συνδυάζουμε με την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = \phi(x)$ για $t = 0$ και έχουμε

$$f(x) = u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{για } x < -|t|.$$

Άρα

$$u(x, t) = \phi(-\sqrt{x^2 - t^2}) \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R} \text{ με } x < -|t|.$$

Το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο προσδιορίζεται μονοσήμαντα η λύση είναι το σύνολο των σημείων (x, t) που ικανοποιούν την $x > |t|$ ή την $x < -|t|$, δηλαδή η ένωση του δεξιού και του αριστερού τεταρτημορίου που ορίζονται από τις ευθείες $x = \pm t$. Αυτό είναι το χωρίο το οποίο καλύπτεται από τις χαρακτηριστικές οι οποίες τέμνουν τον x -άξονα (εκτός του σημείου $x = 0$).

4. Λύστε την παρακάτω δ.ε. με τη δοσμένη αρχική συνθήκη και σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές. Να προσδιοριστεί το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο καθορίζεται μονοσήμαντα η λύση από τη δοσμένη αρχική συνθήκη.

$$u_t + u_x = 4, \quad u(x, 0) = \sin x \quad \text{για } 0 < x < \pi.$$

$$[u(x, t) = \sin(x - t) + 4t \text{ για } 0 < x - t < \pi.]$$

5. Λύστε την παρακάτω δ.ε. με τη δοσμένη αρχική συνθήκη και σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές. Να προσδιοριστεί το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο καθορίζεται μονοσήμαντα η λύση από τη δοσμένη αρχική συνθήκη.

$$u_t + xu_x = (x + t)u, \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{για } -1 < x < 1.$$

Λύση. Η χαρακτηριστική καμπύλη $(x(t), t)$ η οποία τέμνει τον x -άξονα σε τυχόν σημείο $(x_0, 0)$ ικανοποιεί το

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) & \text{για } t \text{ σε κάποιο διάστημα } I \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Από την $x'(t) = x(t)$ παίρνουμε $x(t) = ce^t$ για $t \in \mathbb{R}$ και από την $x(0) = x_0$ βρίσκουμε $c = x_0$. Άρα η χαρακτηριστική καμπύλη γράφεται

$$(x_0 e^t, t) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Η καρτεσιανή εξίσωση της χαρακτηριστικής είναι $x = x_0 e^t$ και αποτελεί το γράφημα της συνάρτησης $x(t) = x_0 e^t$.

Τώρα,

$$\frac{d}{dt} u(x_0 e^t, t) = x_0 e^t u_x(x_0 e^t, t) + u_t(x_0 e^t, t) = (x_0 e^t + t)u(x_0 e^t, t) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Για απλούστευση του συμβολισμού γράφουμε, προσωρινά,

$$v(t) = u(x_0 e^t, t) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

οπότε

$$v'(t) = (x_0 e^t + t)v(t) \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Λύνουμε αυτήν την διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε

$$v(t) = ce^{x_0 e^t + \frac{t^2}{2}} \quad \text{για } t \in \mathbb{R}.$$

Η σταθερά c εξαρτάται από το x_0 , οπότε

$$u(x_0 e^t, t) = v(t) = f(x_0) e^{x_0 e^t + \frac{t^2}{2}} \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

όπου f είναι μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Γράφουμε $x_0 e^t = x$, οπότε $x_0 = x e^{-t}$, και έχουμε

$$u(x, t) = f(x e^{-t}) e^{x + \frac{t^2}{2}} \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R}.$$

Συνδυάζουμε με την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = \phi(x)$ για $t = 0$ και έχουμε

$$f(x) e^x = u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{για } -1 < x < 1.$$

Άρα $f(x) = \phi(x)e^{-x}$ για $-1 < x < 1$ και

$$u(x, t) = \phi(xe^{-t})e^{-xe^{-t}}e^{x+\frac{t^2}{2}} \quad \text{για } x, t \in \mathbb{R} \text{ με } -1 < xe^{-t} < 1.$$

Το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο καθορίζεται μονοσήμαντα η λύση από την αρχική συνθήκη είναι το σύνολο των (x, t) που ικανοποιούν τις $-e^t < x < e^t$. Αυτό είναι και το σύνολο που καλύπτεται από τις χαρακτηριστικές οι οποίες τέμνουν τον x -άξονα στο διάστημα $(-1, 1)$.

6. Λύστε την παρακάτω δ.ε. με τη δοσμένη αρχική συνθήκη και σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές.

$$u_t + u_x = x(u + 1), \quad u(x, 0) = \sin x.$$

$$[u(x, t) = -1 + \sin(x - t)e^{xt - \frac{t^2}{2}}.]$$

7. Λύστε την παρακάτω δ.ε. με τη δοσμένη αρχική συνθήκη.

$$u_t - (x + t)u_x = (x + t - 1)e^t, \quad u(x, 0) = \phi(x).$$

$$[u(x, t) = t(x + t - 1) + \phi(x + t).]$$