

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις του όγδου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Βρείτε τα χωρία του $\mathbb{R}^2$ στα οποία η παρακάτω δ.ε. είναι υπερβολικού, ελλειπτικού και παραβολικού τύπου.

$$u_{xx} - 2xu_{xy} + y^2u_{yy} + 4u_x + yu_y + xyu = e^x.$$

[Υπερβολική στα σημεία (x, y) με $|x| > |y|$. Ελλειπτική στα σημεία (x, y) με $|x| < |y|$. Παραβολική στα σημεία (x, y) με $|x| = |y|$.]

2. Λύστε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = x^2, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Λύση. Χρησιμοποιούμε τον τύπο του d' Alembert:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin s \, ds \\ &= x^2 + t^2 - \frac{\cos(x+t) - \cos(x-t)}{2} = x^2 + t^2 + \sin x \sin t. \end{aligned}$$

3. Έστω ότι η $u(x, t)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

όπου η ϕ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει $\phi(x) = 0$ για $x \leq 0$ και για $x \geq 1$ και $\phi(x) > 0$ για $0 < x < 1$. Προσδιορίστε (και σχεδιάστε) το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο ισχύει $u(x, t) > 0$.

Λύση. Ο τύπος του d' Alembert δίνει

$$u(x, t) = \frac{\phi(x-2t) + \phi(x-2t)}{2}.$$

Επειδή είναι $\phi(x) \geq 0$ για κάθε x , συνεπάγεται $u(x, t) \geq 0$ για κάθε x, t . Επομένως, το να ισχύει $u(x, t) > 0$ ισοδυναμεί με το να ισχύει είτε $\phi(x-2t) > 0$ είτε $\phi(x+2t) > 0$ κι αυτό ισοδυναμεί με το να ισχύει είτε $0 < x-2t < 1$ είτε $0 < x+2t < 1$. Άρα το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο ισχύει $u(x, t) > 0$ είναι το

$$\{(x, t) \mid 0 < x-2t < 1\} \cup \{(x, t) \mid 0 < x+2t < 1\}.$$

4. Έστω ότι η $u(x, t)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

όπου η ψ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει $\psi(x) = 0$ για $x \leq 0$ και για $x \geq 1$ και $\psi(x) > 0$ για $0 < x < 1$. Προσδιορίστε (και σχεδιάστε) το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο ισχύει $u(x, t) > 0$.

Λύση. Ο τύπος του d' Alembert δίνει

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \psi(s) ds.$$

Επειδή είναι $\psi(x) \geq 0$ για κάθε x , συνεπάγεται $u(x, t) \geq 0$ για κάθε x, t με $x - ct \leq x + ct$ και $u(x, t) \leq 0$ για κάθε x, t με $x + ct \leq x - ct$. Άρα για να ισχύει $u(x, t) > 0$ πρέπει να είναι $x - ct < x + ct$, δηλαδή $t > 0$.

Αν $t > 0$, τότε το να ισχύει $u(x, t) > 0$ ισοδυναμεί με το ότι το διάστημα $[x - ct, x + ct]$ τέμνει το διάστημα $[0, 1]$ σε κάποιο διάστημα θετικού μήκους. Αυτό ισοδυναμεί με $x - 2t < 1$ και $x + 2t > 0$.

Άρα το χωρίο του xt -επιπέδου στο οποίο ισχύει $u(x, t) > 0$ είναι το

$$\{(x, t) \mid t > 0 \text{ και } -2t < x < 2t + 1\}.$$