

Διαφορικές Εξισώσεις.

Εαρινό εξάμηνο 2015-16.

Λύσεις του ένατου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. Θεωρήστε τις συναρτήσεις f , g και h των οποίων οι τύποι στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ είναι

$$f(x) = |x| \quad g(x) = x \quad h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

και οι οποίες είναι 2π -περιοδικές στο $\mathbb{R}$.

Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier τους και υπολογίστε το άθροισμα της σειράς Fourier τους για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Λύση. (i) Εύκολα βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της f ότι αυτή είναι συνεχής και άρτια στο $\mathbb{R}$. Επίσης $f(-\pi) = |-\pi|$.

Άρα έχουμε $b_k = 0$ για $k \geq 1$ και $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx$ για $k \geq 0$. Υπολογίζουμε τα a_k ως εξής:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

και για $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos kx \, dx = \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi x (\sin kx)' \, dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^\pi \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{k^2\pi} \int_0^\pi (\cos kx)' \, dx = \frac{2}{k^2\pi} (\cos k\pi - 1) = \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2\pi} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{k^2\pi}, & k \text{ περιττός} \\ 0, & k \text{ άρτιος} \end{cases} \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι συνεχής, το άθροισμα της σειράς Fourier της σε κάθε x είναι ίσο με την τιμή $f(x)$ στο ίδιο x . Δηλαδή

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x = |x| \quad \text{για } -\pi \leq x \leq \pi.$$

(ii) Από τη γραφική παράσταση της g βλέπουμε ότι η g είναι συνεχής σε κάθε $x \in (-\pi, \pi)$ και ασυνεχής στα $\pm\pi$. Το αριστερό πλευρικό όριο της g σε καθένα από τα $\pm\pi$ είναι ίσο με π ενώ το δεξιό πλευρικό όριό της σε καθένα από τα $\pm\pi$ είναι ίσο με $-\pi$.

Υπολογίζουμε

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x \cos kx \, dx = 0,$$

διότι η συνάρτηση x είναι περιττή στο $(-\pi, \pi)$. Δεν μας απασχολούν οι τιμές της g στα άκρα $\pm\pi$ διότι αυτά είναι μόνο δύο σημεία.

Κατόπιν, λαμβάνοντας πάλι υπ' όψη ότι η συνάρτηση x είναι περιττή στο $(-\pi, \pi)$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^\pi x (\cos kx)' \, dx \\ &= -\frac{2}{k\pi} \pi \cos k\pi + \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi \cos kx \, dx \\ &= -\frac{2(-1)^k}{k} + \frac{2}{k^2\pi} \int_0^\pi (\sin kx)' \, dx = -\frac{2(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Το άθροισμα της σειράς Fourier της g σε κάθε $x \in (-\pi, \pi)$ είναι ίσο με την τιμή $g(x)$ επειδή η g είναι συνεχής σε κάθε τέτοιο x . Όμως, στα $x = \pm\pi$ το άθροισμα της σειράς Fourier είναι ίσο με το ημιάθροισμα των πλευρικών ορίων της g στα σημεία αυτά. Άρα

$$-2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin kx = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi \\ \frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0, & x = \pm\pi \end{cases}$$

2. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = -2 \sin 2x + 4 \sin 5x, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 3 \sin x + 3 \sin 2x + \sin 7x, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε $c = 2$ και οι ϕ, ψ είναι πεπερασμένα αθροίσματα ημιτόνων $\sin kx$. Για την ϕ οι συντελεστές των ημιτόνων είναι $b_2 = -2, b_5 = 4$ και $b_k = 0$ για κάθε άλλο k και για την ψ οι συντελεστές των ημιτόνων είναι $\tilde{b}_1 = 3, \tilde{b}_2 = 3, \tilde{b}_7 = 1$ και $\tilde{b}_k = 0$ για κάθε άλλο k . Άρα

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{3}{2 \cdot 1} \sin(2 \cdot 1t) \sin 1x + \left(-2 \cos(2 \cdot 2t) + \frac{3}{2 \cdot 2} \sin(2 \cdot 2t) \right) \sin 2x \\ &\quad + 4 \cos(2 \cdot 5t) \sin 5x + \frac{1}{2 \cdot 7} \sin(2 \cdot 7t) \sin 7x \\ &= \frac{3}{2} \sin 2t \sin x + \left(-2 \cos 4t + \frac{3}{4} \sin 4t \right) \sin 2x + 4 \cos 10t \sin 5x \\ &\quad + \frac{1}{14} \sin 14t \sin 7x. \end{aligned}$$

3. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Λύση. Η $\psi(x) = x(\pi - x)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και είναι $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$. Γράφουμε την ψ ως σειρά ημιτόνων $\sin kx$ υπολογίζοντας

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin kx \, dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^\pi x(\pi - x)(\cos kx)' \, dx \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos kx \, dx = \frac{2}{k^2\pi} \int_0^\pi (\pi - 2x)(\sin kx)' \, dx \\ &= \frac{4}{k^2\pi} \int_0^\pi \sin kx \, dx = -\frac{4}{k^3\pi} \int_0^\pi (\cos kx)' \, dx = \frac{4(1 - (-1)^k)}{k^3\pi}. \end{aligned}$$

Άρα

$$x(\pi - x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^k)}{k^3\pi} \sin kx, \quad \text{για } 0 \leq x \leq \pi.$$

Επειδή $c = 3$ έχουμε

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^k)}{3k \cdot k^3\pi} \sin 3kt \sin kx \\ &= \frac{8}{3\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \sin 3(2n-1)t \sin(2n-1)x. \end{aligned}$$

4. Λύστε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Είστε βέβαιοι ότι η λύση που βρήκατε ικανοποιεί την δ.ε. σε ολόκληρο το χωρίο $\{(x, t) \mid 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}\}$;

Λύση. Η συνάρτηση ϕ είναι ίδια με τη συνάρτηση ψ της προηγούμενης άσκησης, οπότε χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα που έχουμε ήδη βρει για να γράψουμε

$$x(\pi - x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^k)}{k^3 \pi} \sin kx, \quad \text{για } 0 \leq x \leq \pi$$

και επομένως

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1 - (-1)^k)}{k^3 \pi} \cos 3kt \sin kx \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cos 3(2n-1)t \sin(2n-1)x. \end{aligned}$$

Η $\phi(x) = x(\pi - x)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και ισχύει $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$, αλλά $\phi''(0) = \phi''(\pi) = -2 \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι, όταν επεκτείνουμε την ϕ στο $\mathbb{R}$ ώστε να είναι 2π -περιοδική και περιττή, η ϕ'' δεν θα είναι συνεχής στα σημεία $k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, η $u(x, t)$ θα παρουσιάζει πρόβλημα στις δεύτερης τάξης παραγώγους της στα σημεία όλων των χαρακτηριστικών ευθειών οι οποίες διέρχονται από όλα σημεία $(k\pi, 0)$ με $k \in \mathbb{Z}$ του x -άξονα. Αυτές οι ευθείες έχουν καρτεσιανές εξισώσεις $x - 3t = k\pi$ και $x + 3t = k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Σχεδιάστε τις προσεκτικά καθώς και τις τομές τους με την κατακόρυφη ζώνη $\{(x, t) \mid 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}\}$. Αυτό που απομένει από την κατακόρυφη ζώνη αν αφαιρεθούν οι τομές της με τις χαρακτηριστικές ευθείες που αναφέραμε είναι το μέρος της ζώνης στο οποίο η $u(x, t)$ είναι λύση του προβλήματος.