Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Άσκηση 1. Είναι η $\vec{\gamma}(t) = (t^2, t^4)$ παραμέτρηση της παραβολής $y = x^2$;

Άσκηση 2. Βρείτε παραμετρήσεις των παρακάτω καμπυλών στάθμης, καθώς και τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα. Σχεδιάστε τις τροχιές τους.

$$y^2 - x^2 = 1, \quad \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{9} = 1.$$

Άσκηση 3. Βρείτε τις καρτεσιανές εξισώσεις των παρακάτω παραμετρημένων καμπυλών, καθώς και τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα. Σχεδιάστε τις τροχιές τους.

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t), \quad \vec{\gamma}(t) = (e^t, t^2).$$

Άσκηση 4. Σχεδιάστε προσεκτικά τις τροχιές των παρακάτω παραμετρημένων καμπυλών, και βρείτε τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα.

$$\vec{\gamma}(t) = \big((1 + 2\cos t)\cos t, (1 + 2\cos t)\sin t\big), \quad \vec{\gamma}(t) = (t^2 - 1, t^3 - t).$$

Άσκηση 5. Θεωρήστε $a > b > 0$ και την έλλειψη

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ο αριθμός $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ονομάζεται *εκκεντρότητα* της έλλειψης και τα σημεία $\vec{f_1} = (-\epsilon a, 0)$, $\vec{f_2} = (\epsilon a, 0)$ του x-άξονα ονομάζονται *εστίες* της έλλειψης. Θεωρήστε και την παραμέτρηση

$$\vec{\gamma}(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

της έλλειψης.

(i) Αποδείξτε ότι το άθροισμα των αποστάσεων οποιουδήποτε σημείου p της έλλειψης από τις εστίες είναι σταθερό και ίσο με $2a$.

(ii) Αποδείξτε ότι το γινόμενο των αποστάσεων της εφαπτόμενης ευθείας σε οποιοδήποτε σημείο p της έλλειψης από τις εστίες είναι σταθερό και ίσο με b^2.

(iii) Αποδείξτε ότι για κάθε σημείο p της έλλειψης η ευθείες που συνδέουν το σημείο p με τις εστίες σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτόμενη ευθεία στο ίδιο σημείο p της έλλειψης.

Άσκηση 6. Ένας κύκλος ακτίνας $r > 0$ πάνω στο xy-επίπεδο κυλά χωρίς να ολισθαίνει πάνω στον x-άξονα. Θεωρήστε ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο του κύκλου και αποδείξτε ότι η τροχιά που διαγράφει το σημείο αυτό μπορεί να παραμετρηθεί ως εξής:

$$\vec{\gamma}(t) = \big(r(t - \sin t), r(1 - \cos t)\big).$$

Άσκηση 7. Έστω σφαίρα στον xyz-χώρο ακτίνας 1 και κέντρου $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$, και ο κυκλικός κύλινδρος ακτίνας $\frac{1}{2}$ και με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας τον z-άξονα. Αποδείξτε ότι η

$$\vec{\gamma}(t) = \big(\cos^2 t - \tfrac{1}{2}, \sin t\cos t, \sin t\big)$$

είναι παραμέτρηση της τομής των δύο αυτών επιφανειών.

Άσκηση 8. Υπολογίστε την συνάρτηση μήκους της καμπύλης

$$\vec{\gamma}(t) = \big(t, \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})\big)$$

με σημείο εκκίνησης το $(0, 1)$.

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω παραμετρημένες καμπύλες είναι μοναδιαίας ταχύτητας.

$$\vec{\gamma}(t) = \big(\tfrac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \tfrac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \tfrac{t}{\sqrt{2}}\big), \quad \vec{\gamma}(t) = \big(\tfrac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\tfrac{3}{5}\cos t\big).$$

Άσκηση 10. Θεωρούμε λεία *θετική* συνάρτηση $r : I \to \mathbb{R}$ σε διάστημα I και την παραμετρημένη καμπύλη

$$\vec{\gamma}(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t).$$

Βρείτε όλες τις συναρτήσεις r για τις οποίες η παραπάνω καμπύλη είναι μοναδιαίας ταχύτητας, και αποδείξτε ότι σε κάθε περίπτωση η τροχιά της καμπύλης είναι κυκλική.

Άσκηση 11. Θεωρήστε οποιαδήποτε καμπύλη $\vec{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ σε διάστημα I, η τροχιά της οποίας περιέχει τα σημεία $\vec{p}_1 = \vec{\gamma}(t_1), \vec{p}_2 = \vec{\gamma}(t_2)$ με $t_1 < t_2$. Επίσης, έστω $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Θεωρήστε οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{u} = (a, b, c)$ με $\|\vec{u}\| = 1$ και αποδείξτε ότι

$$(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{u} = \int_{t_1}^{t_2} (ax'(t) + by'(t) + cz'(t))\, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{\gamma}'(t)\|\, dt.$$

Κατόπιν, θεωρώντας κατάλληλο $\vec{u}$, αποδείξτε ότι

$$\|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{\gamma}'(t)\|\, dt,$$

δηλαδή ότι *η συντομότερη διαδρομή ανάμεσα σε δύο σημεία είναι η ευθεία.*

Άσκηση 12. Ποιές από τις παρακάτω καμπύλες είναι κανονικές;
(i) Η $\vec{\gamma}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ με $t \in \mathbb{R}$.
(ii) Η $\vec{\gamma}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ με $0 < t < \frac{\pi}{2}$.
(iii) Η $\vec{\gamma}(t) = \left(t, \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\right)$ με $t \in \mathbb{R}$.
Βρείτε αναπαραμετρήσεις μοναδιαίας ταχύτητας για τις κανονικές.

Άσκηση 13. Θεωρήστε πάλι την πρώτη καμπύλη της άσκησης 4 και αποδείξτε ότι είναι κλειστή με ελάχιστη θετική περίοδο το 2π.

Άσκηση 14. Αν T_1, T_2 είναι δύο περίοδοι μίας καμπύλης $\vec{\gamma}$ στο $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι το $k_1T_1 + k_2T_2$ είναι επίσης περίοδος της $\vec{\gamma}$ για κάθε $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 15. Έστω T_0 η ελάχιστη θετική περίοδος μίας καμπύλης $\vec{\gamma}$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι οι περίοδοι της $\vec{\gamma}$ είναι οι αριθμοί kT_0 για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και μόνο αυτοί.

Άσκηση 16. Έστω καμπύλη $\vec{\gamma}$ στο $\mathbb{R}$ με τουλάχιστον μία θετική περίοδο. Αν η $\vec{\gamma}$ δεν είναι σταθερή, αποδείξτε ότι έχει ελάχιστη θετική περίοδο και ότι, επομένως, είναι κλειστή.

Υπόδειξη. Υποθέστε ότι η $\vec{\gamma}$ δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο, οπότε υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία περιόδων (T_n) της $\vec{\gamma}$ έτσι ώστε $T_n \to 0$, και τότε αποδείξτε ότι η $\vec{\gamma}$ είναι σταθερή.