Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

Άσκηση 1. Υπολογίστε την καμπυλότητα των παρακάτω καμπυλών του επιπέδου ή του χώρου.
(i) $\vec{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ με $-1 < t < 1$.
(ii) $\vec{\gamma}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$ με $t \in \mathbb{R}$.
(iii) $\vec{\gamma}(t) = (t, \cosh t)$ με $t \in \mathbb{R}$.
(iv) $\vec{\gamma}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ με $t \in \mathbb{R}$. Πώς συμπεριφέρεται η καμπυλότητα αυτής της καμπύλης στα σημεία της που είναι πολύ κοντά στα τέσσερα σημεία $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$;

Άσκηση 2. Υπολογίστε την καμπυλότητα κ, την στρέψη τ, και τα διανύσματα $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ για καθεμία από τις παρακάτω καμπύλες και ελέγξτε ότι ικανοποιούν τις εξισώσεις Frenet-Serret.
(i) $\vec{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ με $-1 < t < 1$.
(ii) $\vec{\gamma}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$ με $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αυτή η καμπύλη είναι κύκλος και βρείτε το κέντρο του, την ακτίνα του και το επίπεδο στο οποίο ανήκει.

Άσκηση 3. Μία καμπύλη του χώρου με θετική καμπυλότητα ονομάζεται *γενικευμένη έλικα* αν σε κάθε σημείο της το εφαπτόμενο διάνυσμά της σχηματίζει σταθερή γωνία, έστω θ, με ένα σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα, έστω $\vec{a}$.
(i) Αποδείξτε ότι μία έλικα είναι γενικευμένη έλικα.
(ii) Αποδείξτε η καμπυλότητα $\kappa(t) > 0$ και η στρέψη $\tau(t)$ της γενικευμένης έλικας ικανοποιούν την σχέση
$$\tau(t) = \pm\kappa(t)\cot\theta.$$

Άσκηση 4. Έστω καμπύλη $\vec{\gamma}(t)$ μοναδιαίας ταχύτητας με $\kappa(t) > 0$ και $\tau(t) \neq 0$ για κάθε t. Αποδείξτε ότι, αν η τροχιά της καμπύλης περιέχεται σε μία σφαίρα (δηλαδή είναι σφαιρική), τότε ισχύει
$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa'(t)}{\tau(t)\kappa^2(t)}\right) \qquad \text{για κάθε } t.$$

Άσκηση 5. Δίνεται καμπύλη $\vec{\gamma}(t)$ του χώρου με $t \in (-1, 1)$, η τροχιά της οποίας περιέχεται στο xy-επίπεδο, με μοναδιαία ταχύτητα και καμπυλότητα $\kappa(t) > 0$. Δίνεται και η καμπύλη
$$\vec{\gamma}_1(t) = \vec{\gamma}(t) + (0, 0, (\tan\theta)t)$$
με $t \in (-1, 1)$, όπου $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι σταθερή γωνία.
Να βρείτε αναπαραμέτρηση μήκους τόξου $\vec{\gamma}_1(s)$ της $\vec{\gamma}_1(t)$ και να υπολογίσετε την καμπυλότητα $\kappa_1(s)$ και την στρέψη $\tau_1(s)$ συναρτήσει της καμπυλότητας $\kappa(t)$ της καμπύλης $\vec{\gamma}(t)$.

Άσκηση 6. Δίνεται καμπύλη $\vec{\gamma}(t)$ του χώρου με $t \in I$, όπου I είναι ανοικτό διάστημα που περιέχει το 0, η οποία είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Επίσης δίνεται ότι για κάθε $t \in I$ η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\vec{\gamma}(t) + \cos t\, \vec{N}(t)$ και είναι παράλληλη στο $\vec{B}(t)$ διέρχεται και από το $(0, 0, 0)$. Τέλος δίνεται ότι ισχύει $\vec{\gamma}(0) + \vec{N}(0) = \vec{B}(0)$.
(i) Να βρείτε την καμπυλότητα $\kappa(t)$ και την στρέψη $\tau(t)$ της $\vec{\gamma}(t)$.
(ii) Να βρείτε το μέγιστο δυνατό μήκος της $\vec{\gamma}(t)$.

Άσκηση 7. Περιγράψτε όλες τις καμπύλες του χώρου που έχουν σταθερή καμπυλότητα $\kappa > 0$ και σταθερή στρέψη τ.
Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε ένα γνωστό μας θεώρημα, καθώς και ότι μια κυκλική έλικα ακτίνας $r > 0$ και βήματος $2\pi b \neq 0$ έχει σταθερή καμπυλότητα $\kappa = \frac{r}{r^2+b^2}$ και σταθερή στρέψη $\tau = \frac{b}{r^2+b^2}$.

Άσκηση 8. Δίνεται η καμπύλη
$$\vec{\gamma}(t) = (2t - \sqrt{5}\,\sin t, \sqrt{5}\,t + 2\sin t, -3\cos t) \qquad \text{με } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
και το σημείο $P = (0, 0, -3)$.

(i) Να αποδειχθεί ότι το P είναι σημείο της καμπύλης και να παραμετρήσετε την καμπύλη ως προς μήκος τόξου με αφετηρία το σημείο P.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση του καθέτου επιπέδου της καμπύλης στο σημείο P.

(iii) Να βρεθεί η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης στο τυχόν σημείο της.

(iv) Να αποδειχθεί ότι η καμπύλη είναι κυκλική έλικα με βήμα 6π.