Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Άσκηση 1. Θεωρήστε την επιφάνεια Σ που ορίζεται από την (μοναδική) παραμέτρηση $\vec{\sigma}(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$ για $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Να υπολογίσετε σε κάθε σημείο $p = \vec{\sigma}(u,v)$ της επιφάνειας:

(i) την βάση του εφαπτόμενου επιπέδου $T_p(\Sigma)$ καθώς και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(u,v)$ που ορίζονται από την παραμέτρηση $\vec{\sigma}$,

(ii) τους συντελεστές $E(u,v), F(u,v), G(u,v), L(u,v), M(u,v), N(u,v)$ των δύο θεμελιωδών μορφών,

(iii) τους συντελεστές των εξισώσεων Gauss που συνδέουν τις $\vec{\sigma}_{uu}(u,v), \vec{\sigma}_{uv}(u,v), \vec{\sigma}_{vv}(u,v)$ με τα $\vec{\sigma}_u(u,v), \vec{\sigma}_v(u,v), \vec{n}(u,v)$ (Μην χρησιμοποιήσετε τους τύπους που έχουμε μάθει. Γράψτε τις εξισώσεις Gauss και από αυτές υπολογίστε τους συντελεστές, όπως κάναμε στην θεωρία.)

(v) την μέση καμπυλότητα $H(u,v)$, την καμπυλότητα Gauss $K(u,v)$, και τις κύριες καμπυλότητες $\kappa_1(u,v), \kappa_2(u,v)$. (Υπολογίστε πρώτα τις κ_1, κ_2 και από αυτές βρείτε τις H, K. Κατόπιν, υπολογίστε πρώτα τις H, K και από αυτές βρείτε τις κ_1, κ_2.)

(vi) τον 2×2 πίνακα της απεικόνισης Weingarten $\mathcal{W}_p : T_p(\Sigma) \to T_p(\Sigma)$ ως προς την βάση $\{\vec{\sigma}_u(u,v), \vec{\sigma}_v(u,v)\}$ του $T_p(\Sigma)$. (Πρώτα βασιστείτε στις σχέσεις $\mathcal{W}(\vec{\sigma}_u) = -\vec{n}_u$, $\mathcal{W}(\vec{\sigma}_v) = -\vec{n}_v$ που μάθαμε στην θεωρία για να βρείτε τον ζητούμενο πίνακα. Κατόπιν, βρείτε τον ζητούμενο πίνακα βάσει των πινάκων $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$.)

Τέλος, υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου $\vec{\sigma}(R)$, όπου $R = \{(u,v) \mid -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1\}$.

Άσκηση 2. Επαναλάβατε την άσκηση 1 για όσες περισσότερες από τις παρακάτω επιφάνειες αντέχετε:

(α) την μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Ασχοληθείτε μόνο με μία από τις γνωστές παραμετρήσεις $\vec{\sigma}(\theta,\phi)$,

(β) τον κύλινδρο $\Sigma = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1\}$. Ασχοληθείτε μόνο με μία από τις γνωστές παραμετρήσεις $\vec{\sigma}(\theta,t)$,

(γ) τον κώνο $\Sigma = \{(x,y,z) \mid z^2 = x^2+y^2, z > 0\}$. Χρησιμοποιήστε την παραμέτρηση $\vec{\sigma}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ για $(x,y) \neq (0,0)$,

(δ) την επιφάνεια που ορίζεται από την (μοναδική) παραμέτρηση $\vec{\sigma}(u,v) = (u,v,u^2-v^2)$ για $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

(ε) την επιφάνεια που ορίζεται από την (μοναδική) παραμέτρηση $\vec{\sigma}(u,v) = (u-v,u+v,u^2+v^2)$ για $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

(στ) την επιφάνεια που ορίζεται από την (μοναδική) παραμέτρηση $\vec{\sigma}(u,v) = (\cosh u, \sinh u, v)$ για $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Άσκηση 3. Έστω παραμέτρηση $\vec{\sigma}(u,v)$ ενός τμήματος επιφάνειας και έστω $\vec{n}(u,v)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σημείο $\vec{\sigma}(u,v)$. Αν $E(u,v), F(u,v), G(u,v)$ είναι οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής στο σημείο $\vec{\sigma}(u,v)$, αποδείξτε ότι

$$\vec{n} \times \vec{\sigma}_u = \frac{E\vec{\sigma}_v - F\vec{\sigma}_u}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \vec{n} \times \vec{\sigma}_v = \frac{F\vec{\sigma}_v - G\vec{\sigma}_u}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Άσκηση 4. Έστω ότι η επιφάνεια Σ είναι το γράφημα συνάρτησης $z = f(x,y)$ για (x,y) σε ένα ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι σε κάθε σημείο $(x,y,f(x,y))$ της Σ η μέση καμπυλότητα $H(x,y)$ και η καμπυλότητα Gauss $K(x,y)$ της Σ δίνονται από τους τύπους

$$H = \frac{(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}.$$

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση Weingarten $\mathcal{W}_p$ μίας επιφάνειας Σ σε σημείο p της Σ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathcal{W}_p^2 - 2H(p)\mathcal{W}_p + K(p)I = O,$$

όπου I, O είναι η ταυτοτική και η μηδενική απεικόνιση του $T_p(\Sigma) = \mathbb{R}^2$, και $H(p), K(p)$ είναι η μέση καμπυλότητα και η καμπυλότητα Gauss της Σ στο p.

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι η εικόνα ενός κώνου μέσω της απεικόνισης Gauss του κώνου είναι ένας κύκλος στην σφαίρα $\mathbb{S}^2$. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss του κώνου σε κάθε σημείο του είναι ίση με 0.

Άσκηση 7. Θεωρούμε παραμέτρηση τμήματος επιφάνειας $\vec{\sigma}(u,v)$ με $u > 0$, $v > 0$, και υποθέτουμε ότι οι συντελεστές της πρώτης θεμελιώδους μορφής σε κάθε σημείο $\vec{\sigma}(u,v)$ του τμήματος επιφάνειας δίνονται από τους τύπους

$$E(u,v) = \frac{v}{\sqrt{u}}, \quad F(u,v) = -\sqrt{v}, \quad G(u,v) = 2\sqrt{u}.$$

Να υπολογίσετε:

(i) το μήκος της καμπύλης $\vec{\gamma}(t) = \vec{\sigma}(t, 4t)$ για $1 \le t \le 16$,

(ii) το εμβαδόν του χωρίου $\vec{\sigma}(K)$ του τμήματος επιφάνειας, όπου K είναι το τετράπλευρο στο uv-επίπεδο με κορυφές τα σημεία $(1,1)$, $(4,4)$, $(4,16)$, $(1,4)$,

(iii) την γωνία των παραμετρικών καμπυλών $\vec{\sigma}(u, v_0)$ και $\vec{\sigma}(u_0, v)$ στο σημείο $\vec{\sigma}(u_0, v_0)$.

(iv) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\sigma}_{uu} \cdot \vec{\sigma}_u$, $\vec{\sigma}_{uu} \cdot \vec{\sigma}_v$, $\vec{\sigma}_{uv} \cdot \vec{\sigma}_u$, $\vec{\sigma}_{uv} \cdot \vec{\sigma}_v$, $\vec{\sigma}_{vv} \cdot \vec{\sigma}_u$, $\vec{\sigma}_{vv} \cdot \vec{\sigma}_v$ για κάθε (u,v).

Άσκηση 8. Θεωρούμε καμπύλη $\vec{\gamma}(t) = (x(t), z(t))$ στο xz-επίπεδο μοναδιαίας ταχύτητας, δηλαδή υποθέτουμε ότι $x'(t)^2 + z'(t)^2 = 1$ για κάθε $t \in (a,b)$. Επίσης, υποθέτουμε ότι $x(t) > 0$ για κάθε $t \in (a,b)$. Κατόπιν θεωρούμε την επιφάνεια Σ η οποία παράγεται με μία πλήρη περιστροφή της τροχιάς της γ γύρω από τον z-άξονα, δηλαδή

$$\Sigma = \{(x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t)) \,|\, t \in (a,b), \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Παρατηρήστε ότι η Σ καλύπτεται από δύο τμήματα επιφάνειας, το ένα με παραμέτρηση

$$\vec{\sigma}(t,\theta) = (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t)) \qquad \text{για } t \in (a,b), \theta \in (0, 2\pi),$$

και το άλλο με παραμέτρηση

$$\vec{\sigma}(t,\theta) = (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t)) \qquad \text{για } t \in (a,b), \theta \in (-\pi, \pi).$$

Υπολογίστε την μέση καμπυλότητα και την καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας Σ σε κάθε σημείο της.

Άσκηση 9. Έστω $\kappa(p)$ μία από τις δύο κύριες καμπυλότητες $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ μίας επιφάνειας Σ στο σημείο p της Σ. Λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{w}$ του εφαπτόμενου χώρου $T_p(\Sigma)$ είναι *κύριο διάνυσμα* της Σ στο p αν το $\vec{w}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten $\mathcal{W}_p$ για την ιδιοτιμή $\kappa(p)$, δηλαδή αν

$$\mathcal{W}_p(\vec{w}) = \kappa(p)\vec{w}.$$

Μία καμπύλη $\vec{\gamma}(t)$ της Σ λέμε ότι είναι *γραμμή καμπυλότητας* της Σ αν σε κάθε σημείο $\vec{\gamma}(t)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{\gamma}'(t)$ είναι κύριο διάνυσμα της Σ στο $\vec{\gamma}(t)$.

Αποδείξτε ότι η $\vec{\gamma}(t)$ είναι γραμμή καμπυλότητας της Σ αν και μόνο αν ισχύει

$$\frac{d}{dt}\vec{n}(\vec{\gamma}(t)) = -\lambda(t)\vec{\gamma}'(t) \qquad \text{για κάθε } t,$$

όπου σ' αυτήν την περίπτωση το $\lambda(t)$ είναι μία από τις δύο κύριες καμπυλότητες $\kappa_1(\vec{\gamma}(t)), \kappa_2(\vec{\gamma}(t))$ της Σ στο σημείο $\vec{\gamma}(t)$.

Άσκηση 10. Ένα σημείο μίας επιφάνειας λέμε ότι είναι *ομφαλικό* αν οι κύριες καμπυλότητες της επιφάνειας στο σημείο αυτό είναι ίσες.

(i) Αποδείξτε ότι κάθε σημείο μίας σφαιρικής επιφάνειας καθώς και μίας επίπεδης επιφάνειας είναι ομφαλικό.

(ii) Αντιστρόφως, αποδείξτε ότι, αν όλα τα σημεία μίας επιφάνειας είναι ομφαλικά, τότε η επιφάνεια είναι υποσύνολο μίας σφαίρας ή ενός επιπέδου.

Άσκηση 11. Αποδείξτε ότι, αν η δεύτερη θεμελιώδης μορφή μίας επιφάνειας είναι ταυτοτικά μηδενική σε κάθε σημείο της επιφάνειας, τότε η επιφάνεια είναι υποσύνολο ενός επιπέδου.

Άσκηση 12. Αποδείξτε ότι, αν αλλάξει ο προσανατολισμός μίας (προσανατολισμένης) επιφάνειας, τότε η αντίστοιχη απεικόνιση Weingarten αλλάζει πρόσημο.

Άσκηση 13. Αποδείξτε ότι η κάθετη καμπυλότητα σε οποιοδήποτε σημείο καμπύλης η τροχιά της οποίας περιέχεται σε μία σφαίρα ακτίνας $R > 0$ είναι ίση με $\pm\frac{1}{R}$.