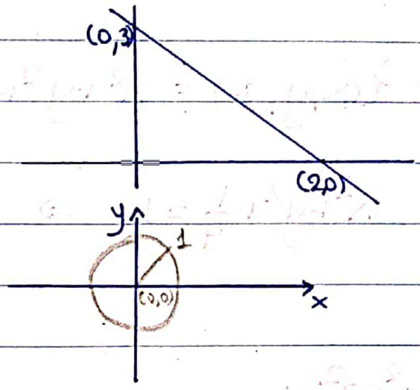
Διαφορική Γεωμετρία: Παπαδημητράκης ΕΑΠ.2022

Διάλεξη 1 15/02/22

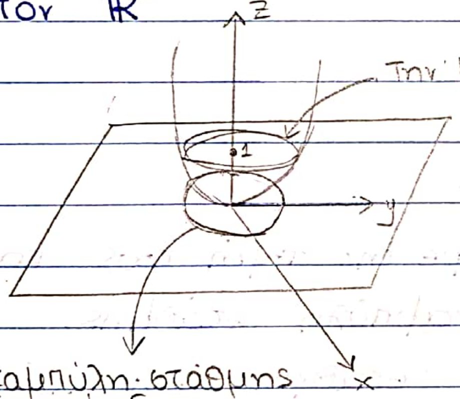
Καμπύλες στάθμης στο επίπεδο

π.χ. $\{(x,y) : 3x+2y=6\}$
↳ $f(x,y) = 3x+2y$

· $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$
↳ $f(x,y) = x^2+y^2$



γιατί "στάθμης";
διότι αν $z = f(x,y) = x^2+y^2$ τότε μπορώ να το μεταφέρω στον $\mathbb{R}^3$



Την μεταφέρω στο επίπεδο

Παίρνουμε $z=1$ (στην ουσία η στάθμη είναι 1)

καμπύλη στάθμης στο επίπεδο (με ύψος στάθμη 1)

Ορισμός : "ΚΑΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ"

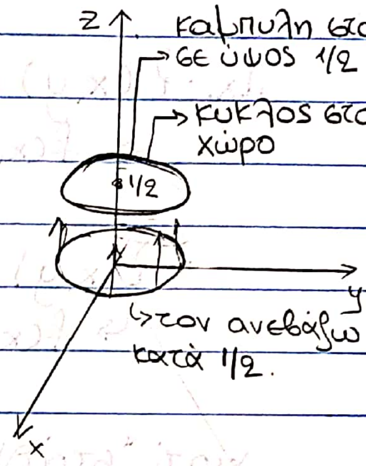
$f(x,y)$, c αριθμός
$\{(x,y), f(x,y)=c\}$ καμπύλη στάθμης (δεν είναι γενικό υπάρχουν και "κακές" συναρτήσεις).

Καμπύλη στάθμης στο χώρο

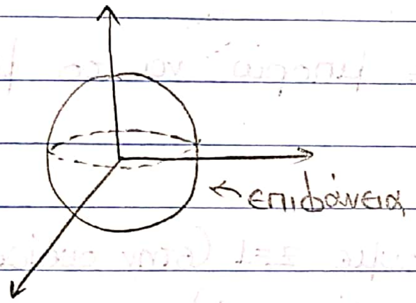
$\{(x,y,z) : f(x,y,z)=c \quad , g(x,y,z)=d\}$
τα ζευγάρια που ικανοποιούν αυτό συνήθως λέμε ότι είναι καμπύλη στάθμης στο χώρο.

π.χ. $\{(x,y,z) = x^2+y^2+z^2=1 \quad , z=1/2\}$:

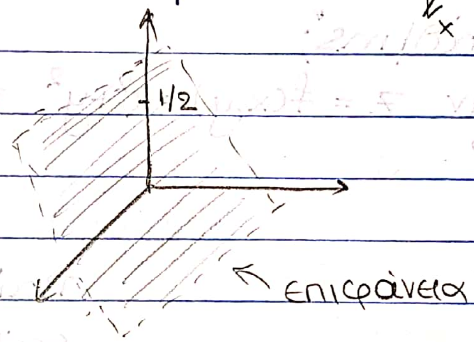
$$x^2+y^2+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow x^2+y^2=3/4$$



$x^2+y^2+z^2=1$

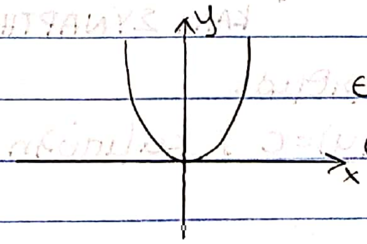


$z=1/2$



Πρέπει να τα ενώσουμε παίρναμε την τομή τους και τότε συνήθως παίρνουμε την καμπύλη στάθμης.
Άρα όταν θέλουμε καμπύλη στάθμης στο χώρο χρειαζόμαστε δύο πράξεις ή εξισώσεις για να καταλήξουμε σε καμπύλη.

π.χ. $\{(x,y) : x^2-y=0\}$
$f(x,y)=x^2-y$



είναι μία καμπύλη στάθμης στο επίπεδο.

Παραμετρημένες καμπύλες στο επίπεδο

(καμπύλες που περιγράφονται με μία παράμετρο)

Σχόλιο: Οι καμπύλες στάθμης είναι σύνολα σημείων ενώ οι παραμετρημένες είναι συναρτήσεις.

- $\vec{\gamma}$: Διάστημα $I \to \mathbb{R}^2$

  $I = (a,b)$ ή $[a,b]$ ή $[a,b)$ ή $(a,b]$

  ↳ το παραμετρικό διάστημα.

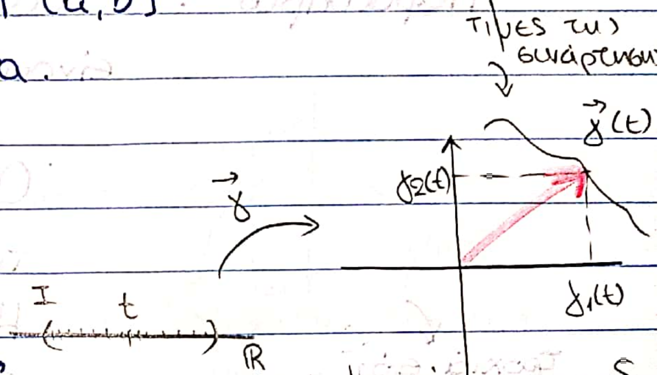
  $t \in I$: παράμετρος

  $\vec{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^2$

  $\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

  $\left.\begin{array}{l} \gamma_1 : I \to \mathbb{R} \\ \gamma_2 : I \to \mathbb{R} \end{array}\right\}$ συντεταγμένες συναρτήσεις της $\vec{\gamma}$

  δηλαδή $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$

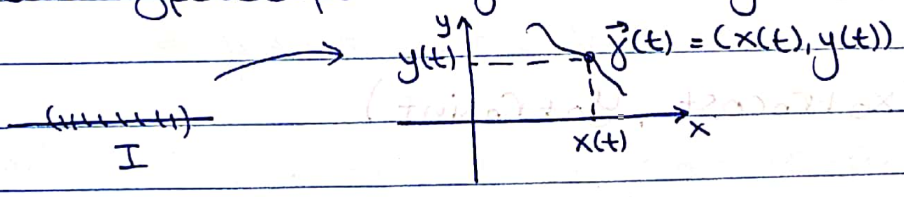


μπορώ να το δω σαν διάνυσμα.

$\{\vec{\gamma}(t) : t \in I\}$: η τροχιά της $\vec{\gamma}$

$\vec{\gamma}$: παραμετρημένη καμπύλη (είναι μια συνάρτηση, το σχήμα είναι η τροχιά της καμπύλης)

Συνήθως γράφουμε : $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$



Παράδειγμα

$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$

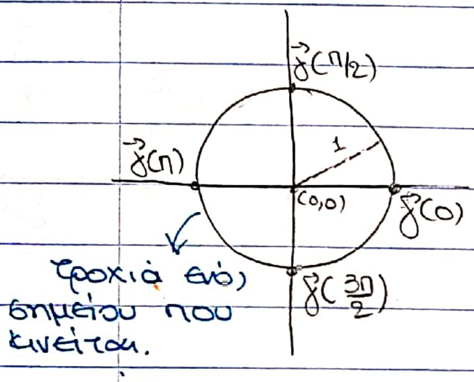
$x(t) = \cos t$ $\qquad \vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$y(t) = \sin t$ $\qquad x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\qquad y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ποια είναι η τροχιά; ο κύκλος

Παρατηρώ: $x^2(t) + y^2(t) = 1$ άρα το σημείο είναι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.



Όταν μεταβάλλω το t τότε ακολουθεί την τροχιά κατά τη θετική φορά. Η καμπύλη αυτή καλύπτει τα σημεία του κύκλου άπειρες φορές.

Όμως ο κύκλος είδαμε στην αρχή ότι είναι καμπύλη στάθμης δηλαδή $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$ αλλά εμφανίζεται και σαν τροχιά σε μια παραμετριμένη καμπύλη.

Παράδειγμα

$r_0 > 0$

$\vec{\gamma}(t) = (x_0 + r_0\cos t, y_0 + r_0 \sin t)$

Λύση

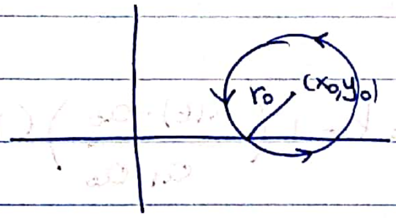
$x(t) = x_0 + r_0 \cos t$ $\qquad \frac{x(t)-x_0}{r_0} = \cos t$, $\frac{y(t)-y_0}{r_0} = \sin t$

$y(t) = y_0 + r_0 \sin t$

Άρα $\frac{(x(t)-x_0)^2}{r_0^2} + \frac{(y(t)-y_0)^2}{r_0^2} = 1 \iff$

$(x(t)-x_0)^2 + (y(t)-y_0)^2 = r_0^2$

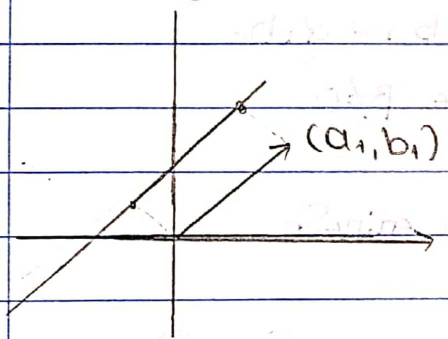
$\{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r_0^2\}$ καμπύλη στάθμης



Άρα το σημείο $\vec{\gamma}(t)$ είναι πάνω σε αυτόν τον κύκλο.

Άρα πάλι αυτό το σημείο μπορούμε να το δούμε είτε σαν καμπύλη στάθμης είτε σαν τροχιά παραμετρισμένης καμπύλης.

Παράδειγμα



παίρνω τυχαία ευθεία
παίρνω δύο σημεία.
Πώς το γράφω σαν τροχιά παραμετρ. καμπύλη;

$$(x-a_0,\ y-b_0) = t(a_1-a_0,\ b_1-b_0)$$
$$x-a_0 = t(a_1-a_0) \Rightarrow x = t(a_1-a_0)+a_0 \Rightarrow$$
$$y-b_0 = t(b_1-b_0) \Rightarrow y = t(b_1-b_0)+b_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = a_0 + t\cdot(a_1-a_0)$$
$$\Rightarrow y(t) = b_0 + t(b_1-b_0)$$

$\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) = (a_0 + t(a_1-a_0),\ b_0 + t(b_1-b_0))$
αυτή είναι η παραμετρισμένη καμπύλη που η τροχιά της είναι η ευθεία.

Για να βρω την καμπύλη στάθμης θέλω να διώξω το t.

Για να βρω την καμπύλη στάθμης, θέλω να διώξω το t.

· Άρα $t = \dfrac{x(t) - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}$ $\quad y(t) = b_0 + \left(\dfrac{x(t) - a_0}{a_1 - a_0}\right)(b_1 - b_0)$

$$(a_1 - a_0)y(t) = b_0(a_1 - a_0) + (x(t) - a_0)(b_1 - b_0)$$
$$= b_0 a_1 - \cancel{b_0 a_0} + x(t)\cdot b_1 - x(t) b_0 - a_0 b_1 + \cancel{a_0 b_0}$$
$$\Leftrightarrow (a_1 - a_0)y(t) = x(t)(b_1 - b_0) + b_0 a_1 - a_0 b_1$$
$$\Leftrightarrow (b_1 - b_0)x(t) - (a_1 - a_0)y(t) = a_0 b_1 - b_0 a_1$$
$$(b_1 - b_0)x + (\alpha_0 - \alpha_1)y = a_0 b_1 - \alpha_1 b_0$$

Δηλαδή $\boxed{\alpha x + \beta y = \gamma}$ με $\beta \neq 0$

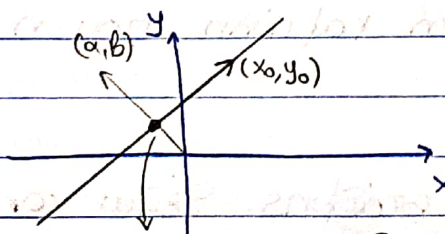
↳ καμπύλη στάθμης

εξίσωση ευθείας στο επίπεδο

Αν $a_1 = a_0$ θα έλυνα την άλλη εξίσωση δηλαδή:
$t = \dfrac{y(t) - b_0}{b_1 - b_0}$ ...

Δεν γίνεται να είναι να είναι και $a_1 = a_0$ και $b_0 = b_1$ καθώς έχω ξεκινήσει με 2 διαφορετικά σημεία!
Τότε $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

(ii) Μπορώ να βρω ένα κάθετο διάνυσμα και ένα σημείο της ευθείας.



μπορώ να προσδιορίσω αυτό το σημείο.

$(x_0 - x_1, y_0 - y_1) \perp (a, b)$

Άρα το εσωτερικό γινόμενο είναι 0.

$(x_0 - x_1, y_0 - y_1)\cdot(a, b) = 0$

$(x_0 - x_1)\cdot \alpha + (y_0 - y_1) b = 0$

$a x_1 + b y_1 = x_0 a + y_0 b$ (1)

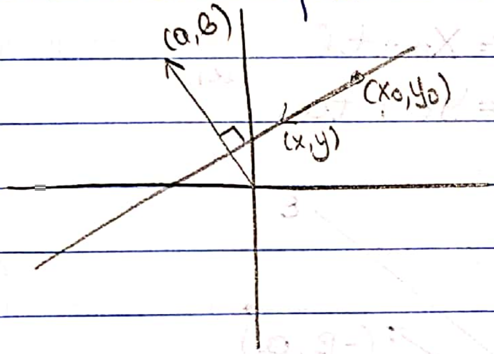
$$(x_1, y_1) = t(a,\beta)$$

$$① \Longrightarrow a^2 t + b^2 t = x_0 a + y_0 b$$

$$t = \frac{x_0 a + y_0 b}{a^2+b^2}$$ μπορώ να διαιρέσω γιατί δεν μπορεί $a=0$ και $b=0$.

Άρα $(x_1, y_1) = \left(\frac{a x_0 + b y_0}{a^2+\beta^2}\cdot a,\ \frac{a x_0 + b y_0}{a^2+b^2}\cdot b\right)$ και συνεχίζω όπως πριν βρίσκω τις συναρτήσεις $x(t)=\dots$, $y(t)=\dots$

Για να βρω την καμπύλη στάθμης



$$(x-x_0,\ y-y_0)\cdot(\alpha,\beta)=0$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax+by = a x_0 + b y_0 \text{ σταθ.}$$

$$\Leftrightarrow ax+\beta y = \gamma$$ άρα καμπύλη στάθμης

Διάλεξη 2

17/02/22

Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$:

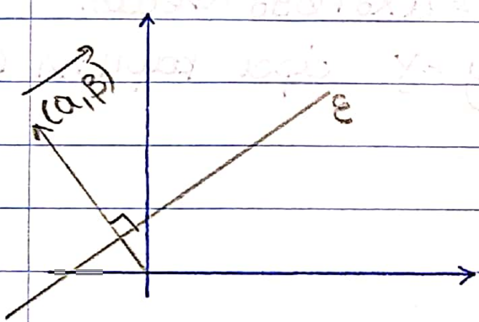
Καμπύλες Στάθμης — γνωρίζοντας τη μία πάμε στην άλλη — **Παραμετρικές καμπύλες**

ΕΥΘΕΙΑ!!

$ax+\beta y=\gamma$

με προϋπόθεση

$a^2+\beta^2\neq 0$



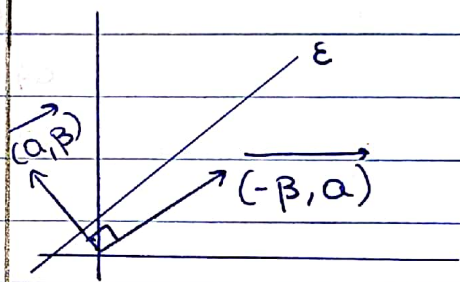
$\overrightarrow{(a,\beta)}\perp\varepsilon \Rightarrow$

$\overrightarrow{(a,\beta)}\cdot\overrightarrow{(x-x_0,y-y_0)}=0 \Rightarrow$

$ax+\beta y=\underbrace{ax_0+\beta y_0}_{\gamma}$

$x=x_0-t\beta$ και

$y=y_0+ta$



$\overrightarrow{(-\beta,a)}\parallel\varepsilon \Rightarrow$

$\overrightarrow{(x-x_0,y-y_0)}=t\,\overrightarrow{(-\beta,a)}\quad t\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$x=x_0-t\beta$ και

$y=y_0+ta$

ΚΥΚΛΟΣ

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r_0^2\quad r_0>0$

$\vec{\gamma}(t)=(x_0+r_0\cos t,\ y_0+r_0\sin t)$

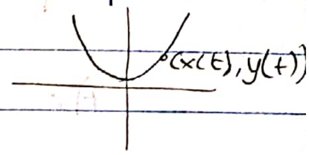
με $\vec{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

$y = x^2$ ή $y - x^2 = 0$

Αν $x(t) = t$ τότε $y(t) = t^2$

Άρα $\vec{\gamma}(t) = (t, t^2)$ με
$\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



Στο χώρο $\mathbb{R}^3$:

Καμπύλες Στάθμης | Παραμετρικές καμπύλες

ΕΥΘΕΙΑ

$\Pi_1 : a_1 x + b_1 y + \gamma_1 z = \delta_1$
με $a_1^2 + b_1^2 + \gamma_1^2 \neq 0$
ώστε $\overrightarrow{(a_1, b_1, \gamma_1)} \perp \Pi_1$

και

$\Pi_2 : a_2 x + b_2 y + \gamma_2 z = \delta_2$
με $a_2^2 + b_2^2 + \gamma_2^2 \neq 0$
ώστε $\overrightarrow{(a_2, b_2, \gamma_2)} \perp \Pi_2$

ε: Τομή των Π_1 και Π_2

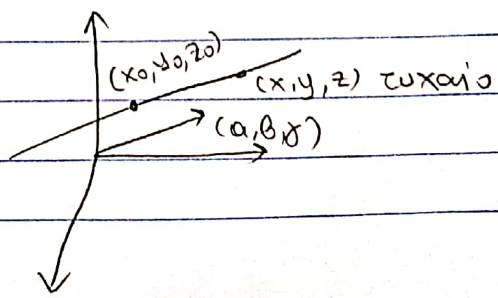
βρίσκω παράλληλο διάνυσμα της ευθείας. Έχω ένα σημείο (x_0, y_0, z_0).
Έστω τυχαίο σημείο (x, y, z) τότε:

$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(a, \beta, \gamma) \quad t \in \mathbb{R}$

$x(t) = x_0 + ta$
$y(t) = y_0 + tb$
$z(t) = z_0 + t\gamma$

Άρα $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\vec{\gamma}(t) = (x_0 + ta, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma) =$
$= (x_0, y_0, z_0) + t(a, \beta, \gamma)$



Παράδειγμα (κύκλος)

$x^2+y^2+z^2=1 \quad z=1/2$ (καμπύλη στάθμης)

Παραμετρική καμπύλη: $x^2+y^2=\frac{3}{4}$, $z=1/2$

Αν $x(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t$ και $y(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$

τότε $x^2(t)+y^2(t)=\frac{3}{4}$
$z(t)=\frac{1}{2}$

$\vec{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με $\vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t),z(t))=$
$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\frac{1}{2}\right)$

Γενικά στον $\mathbb{R}^3$ θέλουμε 2 εξισώσεις ως καμπύλες στάθμης.

με $f(x,y,z)=c$, $c\in\mathbb{R}$
και $g(x,y,z)=d$ $\quad d>0$

- στον $\mathbb{R}^2$ θέλουμε 1 εξίσωση
- στον $\mathbb{R}^n$ θέλουμε $n-1$ εξισώσεις

Παραμετρημένες καμπύλες: $\vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t),z(t))$
με $\vec{\gamma}:I\to\mathbb{R}^3$ όπου $I\subseteq\mathbb{R}$

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

Η $\vec{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n$ με $\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$ λέγεται ΛΕΙΑ ή ΑΠΕΙΡΕΣ ΦΟΡΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ όταν οι πραγματικές συναρτήσεις $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)$ δηλαδή οι συντεταγμένες της $\vec{\gamma}(t)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες. με:

$$\vec{\gamma}'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

και

$$\vec{\gamma}''(t) = (\gamma_1''(t), \gamma_2''(t), \ldots, \gamma_n''(t))$$

και

$$\vdots$$

όπου: $$\gamma_1'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}$$

$$\vdots$$

$$\text{ή} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t+h) - \gamma_n(t))}{h}$$

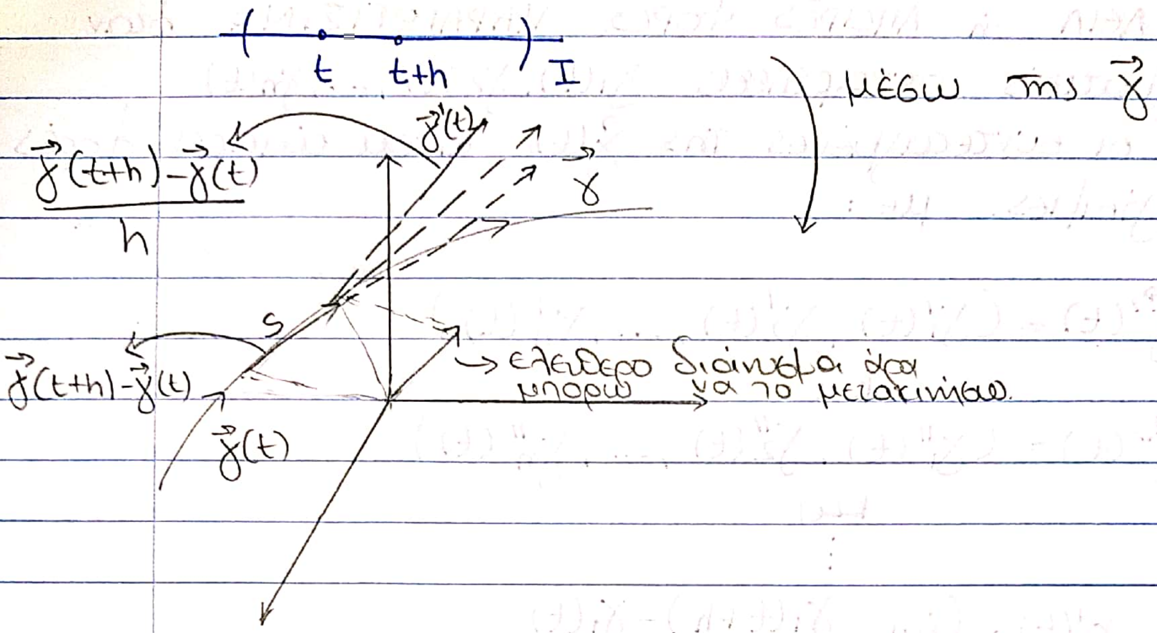
$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \ldots, \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \ldots, \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \right)$$

$$= (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)) = \vec{\gamma}'(t)$$

Άρα $\vec{\gamma}'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$ ή $\vec{\gamma}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{\gamma}(t+h) - \vec{\gamma}(t)}{h}$

· ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ $\vec{\gamma}'(t)$:



$\vec{\gamma}'(t)$: διάνυσμα εφαπτόμενο στην τροχιά της καμπύλης $\vec{\gamma}$ στο σημείο $\vec{\gamma}(t)$ της τροχιάς.

· Ευκλείδιο μήκος:

$$\| \vec{\gamma}'(t) \| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\| \vec{\gamma}'(t+h) - \vec{\gamma}'(t) \|}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{s}{h}$$

Στη φυσική : $\| \vec{\gamma}'(t) \|$: η ΣΤΙΓΜΙΑΙΑ ΒΑΘΜΩΤΗ/ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ του κινητού σημείου της τροχιάς στη θέση $\vec{\gamma}(t)$

$\neq$

$\gamma'(t)$: η (ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ) ΤΑΧΥΤΗΤΑ.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\delta}(t)\right) = \vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\delta}(t) + \vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\delta}'(t)$$ διότι

$\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, $\vec{\delta}(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_n(t))$

Εσωτερικό Γινόμενο: $\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\delta}(t) = \gamma_1(t)\cdot\delta_1(t) + \dots + \gamma_n(t)\cdot\delta_n(t)$

Παραγωγίζω:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\delta}(t)\right) = \gamma_1'(t)\delta_1(t) + \gamma_1(t)\delta_1'(t) + \dots + \gamma_n'(t)\delta_n(t) + \gamma_n(t)\delta_n'(t)$$

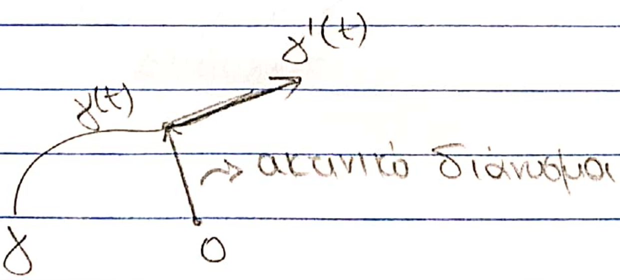
$$= \gamma_1'(t)\delta_1(t) + \dots + \gamma_n'\delta_n(t) + \gamma_1(t)\delta_1'(t) + \dots + \gamma_n(t)\delta_n'(t)$$

$$= (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))\cdot(\delta_1(t), \dots, \delta_n(t)) +$$

$$(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))\cdot(\delta_1'(t), \dots, \delta_n'(t)) =$$

$$= \vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\delta}(t) + \vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\delta}'(t)$$

Πρόταση: Αν $\|\gamma(t)\|$ = σταθερό τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι κάθετο στο ακτινικό διάνυσμα σε κάθε σημείο.



Απόδειξη. Αν $\|\gamma(t)\| = c$ τότε $\|\gamma(t)\|^2 = c^2 \Rightarrow \gamma(t)\cdot\gamma(t) = c^2$

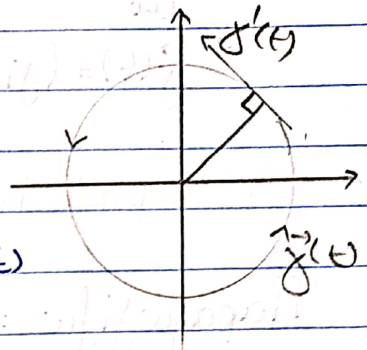
Παραγωγίζω $(\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}(t))' = 0 \Longrightarrow \vec{\gamma}'(t)\cdot\gamma(t) + \vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}'(t) = 0$

$\xrightarrow{(*)} 2\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}(t) = 0 \Rightarrow \vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}(t) = 0$ άρα $\gamma'(t) \perp \gamma(t)$.

(*) Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (μεταθετική)

Παράδειγμα (Ο κύκλος με κέντρο (0,0))

$\vec{\gamma}(t) = (r_0 \cos t , r_0 \sin t)$

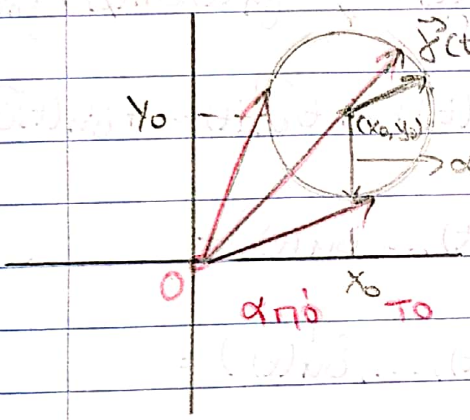


$\|\vec{\gamma}(t)\| = r_0$ άρα $\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{\gamma}'(t) = 0$

$\gamma'(t) = (-r_0 \sin t, r_0 \cos t)$ είναι σαφές

ότι $\vec{\gamma}(t)\gamma'(t) = 0$

Δεν ισχύει για κύκλο με κέντρο (x_0, y_0), τυχαίο κύκλο



$(\vec{\gamma}(t) - (x_0, y_0))\, \vec{\gamma}'(t) = 0$

από το κέντρο δεν είναι σταθερό

έστω $\|\vec{\gamma}(t) - (x_0, y_0)\| = r_0$

$(\vec{\gamma}(t) - (x_0, y_0))\cdot\vec{\gamma}'(t) = 0$

Πόρισμα: Αν η $\vec{\gamma}(t)$ έχει σταθερή βαθμωτή ταχύτητα $\|\vec{\gamma}'(t)\|$ τότε $\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}''(t) = 0$

διανυσματική ταχύτητα

έχει να κάνει με την καμπυλότητα.