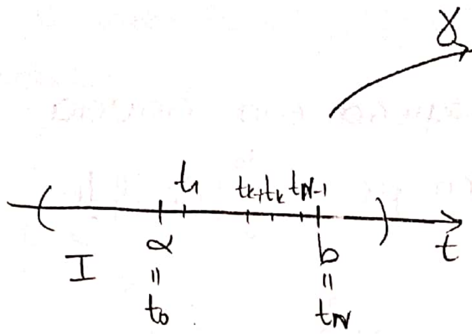
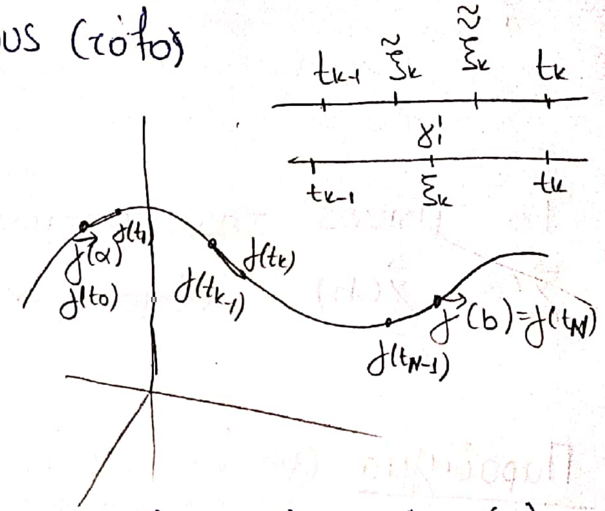
Διαφορική Γεωμετρία - Διάλεξη 3

22/02/22

$\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$, I διάστημα στο $\mathbb{R}$

Θα δούμε την έννοια του μήκους (τόξου)





$$\|\vec{\gamma}(t_1)-\underset{\vec{\gamma}(\alpha)}{\underset{\shortparallel}{\vec{\gamma}(t_0)}}\| + \dots + \|\vec{\gamma}(t_k)-\vec{\gamma}(t_{k-1})\| + \dots + \|\underset{\vec{\gamma}(b)}{\underset{\shortparallel}{\vec{\gamma}(t_N)}}-\vec{\gamma}(t_{N-1})\| \quad (1)$$

$$\vec{\gamma}(t_k)-\vec{\gamma}(t_{k-1}) = (\gamma_1(t_k),\dots,\gamma_n(t_k)) - (\gamma_1(t_{k-1}),\dots,\gamma_n(t_{k-1}))$$

$$= (\gamma_1(t_k)-\gamma_1(t_{k-1}),\dots,\gamma_n(t_k)-\gamma_n(t_{k-1}))$$

$$\overset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{=} (\gamma_1'(\tilde{\xi}_k)(t_k-t_{k-1}),\dots,\gamma_n'(\tilde{\tilde{\xi}}_k)(t_k-t_{k-1}))$$

$$\approx (\gamma_1'(\xi_k)(t_k-t_{k-1}),\dots,\gamma_n'(\xi_k)(t_k-t_{k-1})) \quad (*)$$

$$\|\vec{\gamma}(t_k)-\vec{\gamma}(t_{k-1})\| \approx \|(*)\| = \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2(t_k-t_{k-1})^2+\dots+\gamma_n'(\xi_k)^2(t_k-t_{k-1})^2}$$

$$= \sqrt{\gamma_1'(\xi_k)^2+\dots+\gamma_n'(\xi_k)^2}\,(t_k-t_{k-1})$$

$$= \|\gamma'(\xi_k)\|\cdot(t_k-t_{k-1})$$

Δηλαδή $(1) \approx \|\gamma'(\xi_1)\|(t_1-t_0)+\dots+\|\vec{\gamma}'(\xi_k)\|(t_k-t_{k-1})+\dots+$

$$+\|\gamma'(\xi_N)\|(t_N-t_{N-1}) \approx \int_\alpha^b \|\vec{\gamma}'(t)\|dt$$

ξ_k
$\downarrow$
t_{k-1} t_k

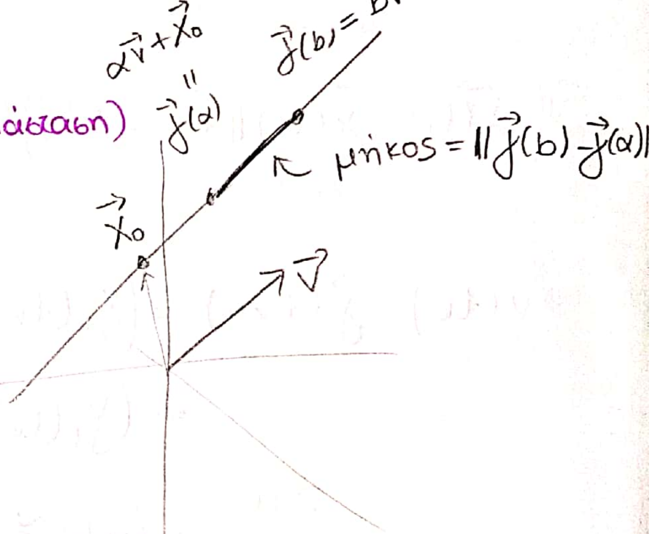
Θυμόμαι από Απειροστικό ότι: Αθροισμα Riemann

$$\int_a^b f(t)\,dt \longleftarrow f(\xi_1)(t_1-\overset{\alpha}{\overset{\parallel}{t_0}}) + \dots + f(\xi_k)(t_k-t_{k-1})+\dots+f(\xi_N)(\overset{b}{\overset{\parallel}{t_N}}-t_{N-1})$$

Το μήκος της τροχιάς της $\vec{\gamma}$ ανάμεσα στα σημεία $\vec{\gamma}(\alpha), \vec{\gamma}(b)$ (όπου $\alpha<b$) είναι ίσο με $\int_\alpha^b \|\vec{\gamma}'(t)\|dt$

Παράδειγμα (για να ελέγξουμε αν δουλεύει το ολοκλήρωμα)

$\vec{\gamma}(t) = t\vec{v}+\vec{x}_0$ (σε οποιαδήποτε διάσταση)



Ας δούμε δύο σημεία σε δύο διαφ. χρονικές στιγμές.

$t=a$
$t=b$ με $\alpha<b$

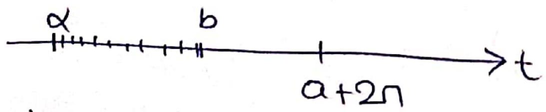
$$\text{μήκος} = \|\vec{\gamma}(b)-\vec{\gamma}(\alpha)\| = \|(b-\alpha)\vec{v}\| = (b-a)\|\vec{v}\|$$

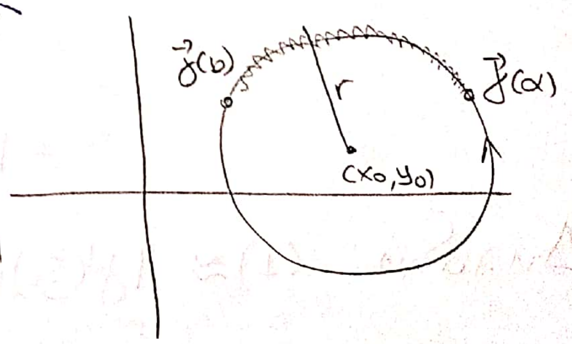
$$\text{μήκος} = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\|dt = \int_a^b \|\vec{v}\|dt = (b-a)\|\vec{v}\|$$

Παράδειγμα: Κύκλος στο επίπεδο

$\vec{\gamma}(t) = (x_0+r_0\cos t, y_0+r_0\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$

$\alpha < b < a+2\pi$





$$\int_\alpha^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_\alpha^b r_0\,dt = r_0(b-\alpha)$$ → η ευκλείδια γωνία

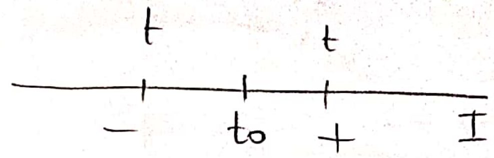
$\gamma'(t) = (-r_0\sin t, r_0\cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r_0^2\sin^2 t + r_0^2\cos^2 t} = \sqrt{r_0^2} = r_0 \qquad \sin^2 t+\cos^2 t = 1$

Συνάρτηση μήκους

$\vec{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n \qquad t_0 \in I \;,\; t \in I$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{\gamma}\,'(u)\|\,du \;,\quad t \in I$$

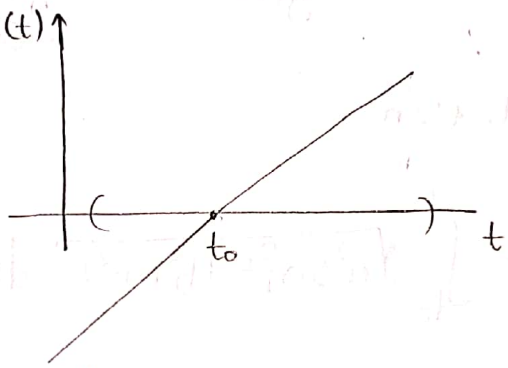


$s : I \to \mathbb{R}$

Είναι μήκος άρα είναι θετική συνάρτηση
Προσοχή αν $t < t_0$ βγαίνει αρνητικό αποτέλεσμα.

$s'(t) = \|\vec{\gamma}\,'(t)\| \quad t \in I$

$s \uparrow \qquad s(t_0) = 0$

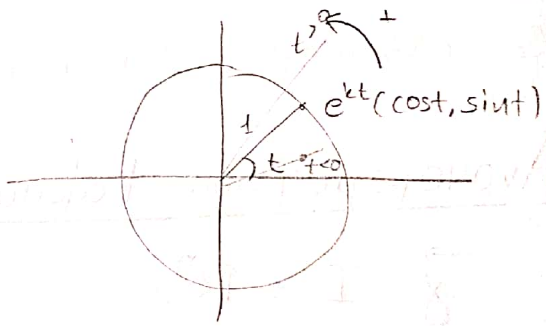


Παράδειγμα Λογαριθμική σπείρα.

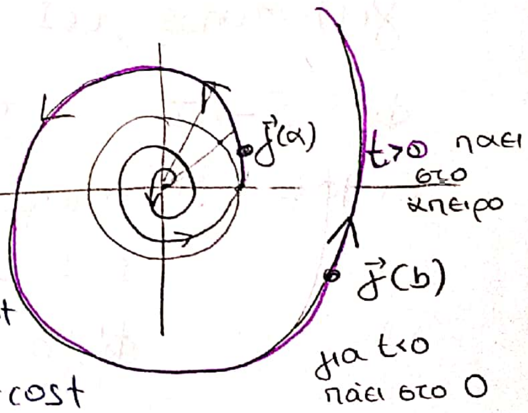
$\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\vec{\gamma}(t) = (e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t) \qquad k>0$

$= \underbrace{e^{kt}}_{>0}(\cos t, \sin t)$



Θέλω να βρω μήκος της σπείρας
από το $\vec{\gamma}(a)$ στο $\vec{\gamma}(b)$



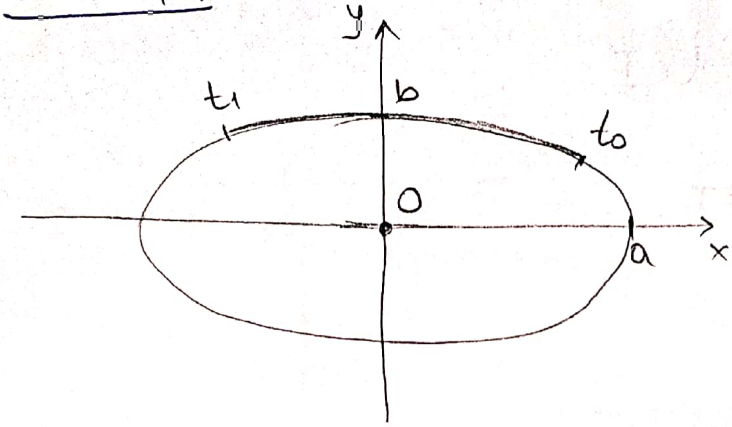
$\vec{\gamma}\,'(t) = (ke^{kt}\cos t - e^{kt}\sin t,$
$\qquad ke^{kt}\sin t + e^{kt}\cos t)$

$\|\gamma'(t)\|^2 = k^2 e^{2kt}\cos^2 t + e^{2kt}\sin^2 t - 2ke^{2kt}\cancel{\sin t\cos t}$
$\qquad + k^2 e^{2kt}\sin^2 t + e^{2kt}\cos^2 t + 2ke^{2kt}\cancel{\sin t\cos t}$
$\qquad = k^2 e^{2kt} + e^{2kt} = (k^2+1)e^{2kt}$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{k^2+1}\cdot e^{kt}$

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{k^2+1}\, e^{kt}\,dt = \sqrt{k^2+1}\int_a^b e^{kt}\,dt = \sqrt{k^2+1}\cdot\frac{e^{kb}-e^{ka}}{k}$$

Έλλειψη



$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}_{f(x,y)}=1$$

$\vec{\gamma}(t) = (\underbrace{a\cos t}_{x(t)}, \underbrace{b\sin t}_{y(t)})$ παραμετρημένη καμπύλη που μας δίνει σαν τροχιά την έλλειψη.

$t_0 < t_1 < t_0 + 2\pi$

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\;dt$$

$\alpha \neq b$ (γνήσια έλλειψη)

$\gamma'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$

Το ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται ακριβώς.

Αναπαραμέτρηση καμπύλης

$\vec{\gamma} : I \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ I: διάστημα

$\vec{\gamma}(t)$: τύπος, $t \in I$

$\phi : J \to I$ $\quad$ J διάστημα

Θέλουμε ϕ : άπειρες φορές παραγωγίσιμη

1-1 στο J, επί του I

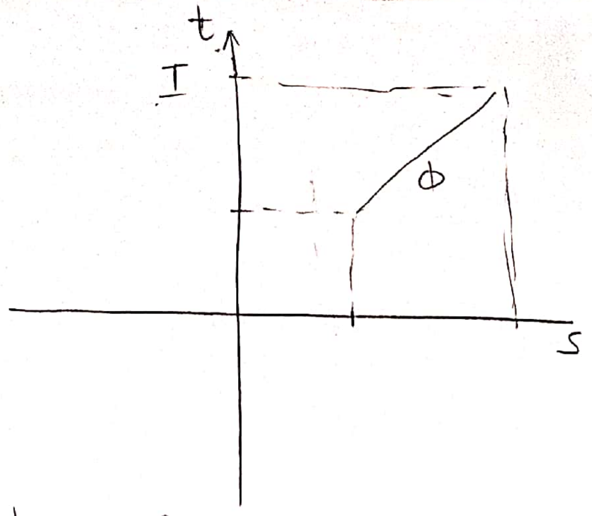
$\phi' \neq 0$ στο J

$\Downarrow$ (ϕ συνεχής Bolzano)

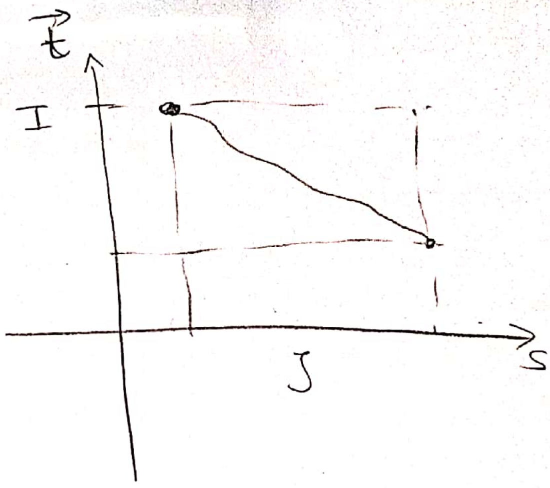
$\phi' > 0$ στο J ή $\phi' < 0$ στο J.

$\Downarrow$ ϕ γν. αύξ στο J

$\Downarrow$ ϕ γν. φθίνουσα στο J



ϕ : αύξουσα



ϕ : φθίνουσα

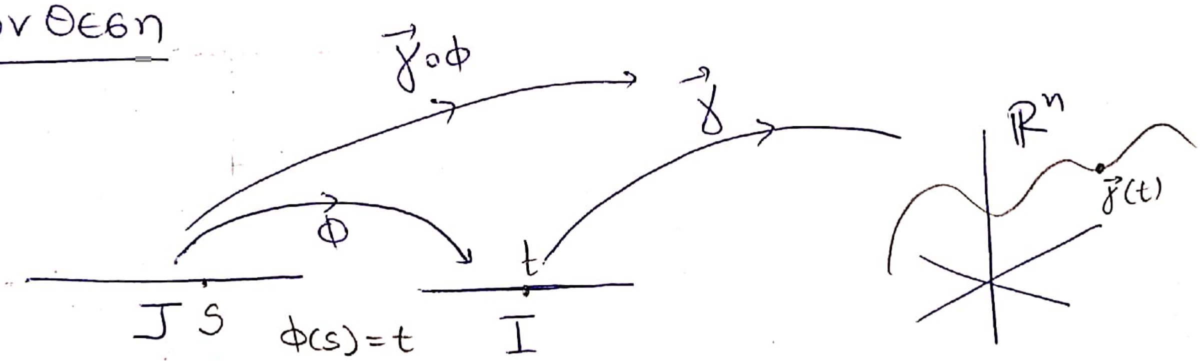
Η ϕ θα έχει αντίστροφη

$$\phi^{-1} : \underset{t}{I} \to \underset{s}{J}$$

$$(\phi^{-1})'(t) = \frac{1}{\phi'(s)} \qquad \text{όπου } \begin{aligned} s &= \phi^{-1}(t) \\ t &= \phi(s) \end{aligned}$$

(*) Ότι ιδιότητες έχει η ϕ θα έχει και η ϕ^{-1}

Σύνθεση



$$\boxed{\vec{\tilde{\gamma}} = \vec{\gamma}\circ\phi : J \to \mathbb{R}^n}$$

$$\vec{\tilde{\gamma}}(s) = \vec{\gamma}(\underbrace{\phi(s)}_{t})$$

↓
αναπαραμετροποιημένη καμπύλη.
σαν να αλλάξουμε το μέτρημα του χρόνου

Την προηγούμενη φορά είδαμε Αλλαγή Παραμέτρου

$\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$, I διάστημα

$\phi: J \to I$, J διάστημα

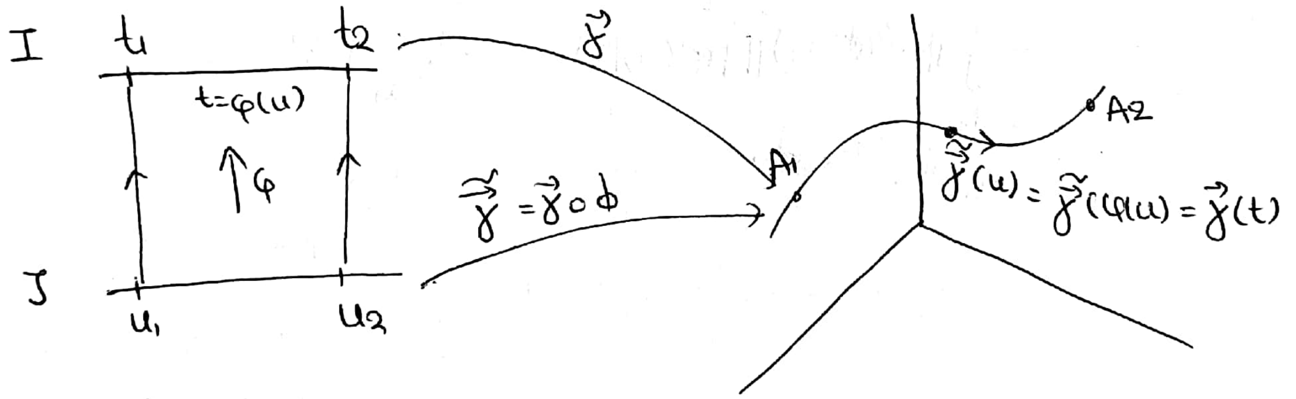
1-1, επί, άπειρες φορές παραγωγίσιμη

$\phi' > 0$ στο J ή $\phi' < 0$ στο J

(ίδια φορά διαγραφής με $\vec{\gamma}$) (αντίθετη φορά διαγραφής με $\vec{\gamma}$)

$\tilde{\vec{\gamma}} = \vec{\gamma} \circ \phi : J \to \mathbb{R}^n$

$t = \varphi(u)$, $u = \phi^{-1}(t)$ $\tilde{\vec{\gamma}}(u) = \vec{\gamma}(\underbrace{\phi(u)}_{t})$



πρέπει $t_1 = \varphi(u_1)$
$t_2 = \varphi(u_2)$

στέλνουν στο ίδιο σημείο το u ή το t τους

Θέλαμε να μετρήσουμε το μήκος από το A_1 μέχρι το A_2

Για να μετρήσω τα μήκη παίρνω δύο τυχαία σημεία που είναι οι εικόνες των u, t οι οποίες είναι χρονικές στιγμές. Δηλαδή τα A_1, A_2 και μετράνε τα $t_1 u_1$ και $t_2 u_2$ αντίστοιχα θα ισχύει: $t_1 = \varphi(u_1)$ $t_2 = \varphi(u_2)$

μήκος από A_1 σε A_2 $= \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$

$= \int_{u_1}^{u_2} \|\tilde{\vec{\gamma}}'(u)\| du$ ‖; είναι ίσα; πρέπει να τα ελέγξουμε.

Ελέγχω αν είναι ίσα:

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = \int_{u_1}^{u_2} \|\gamma'(\varphi(u))\| \phi'(u) du = \dots$$

$t=\varphi(u)$

έχουμε ότι ισχύει

$\tilde{\vec{\gamma}}(u) = \vec{\gamma}(\varphi(u)) = \vec{\gamma}(t)$

$\tilde{\vec{\gamma}}'(u) = \vec{\gamma}'(\varphi(u))\, \varphi'(u)$

Αν $\phi'>0$

$$\dots = \int_{u_1}^{u_2} \|\vec{\gamma}'(\varphi(u))\| \, |\varphi'(u)| du = \int_{u_1}^{u_2} \|\vec{\gamma}'(\varphi(u))\varphi'(u)\| du =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \|\tilde{\vec{\gamma}}'(u)\| du.$$

Αν $\phi'<0$

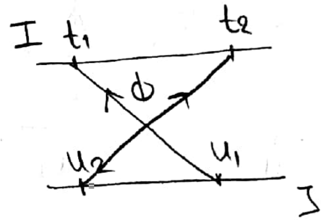
$$\dots = -\int \|\vec{\gamma}'(\phi(u))\| \, |\varphi'(u)| du = -\int_{u_1} \|\tilde{\vec{\gamma}}'(u)\| du$$

ϕ' φθίνουσα

$u_2<u_1$ για αυτό βγαίνει αρνητικό.

$$= \int_{u_1}^{u_2} \|\tilde{\vec{\gamma}}'(u)\| du$$

Δηλαδή έχουμε την εξής αλλαγή χρόνου:



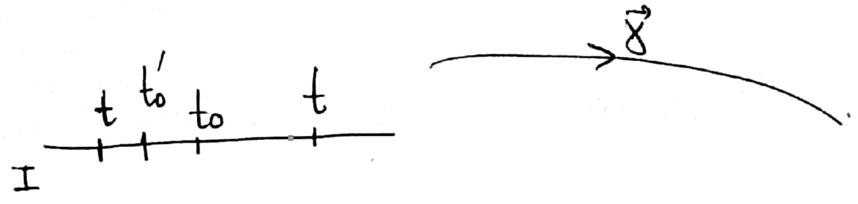
Έχουμε $\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$

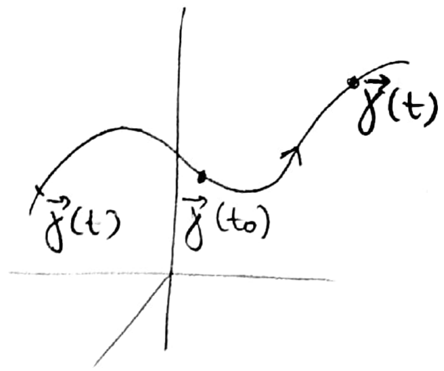
Η $\vec{\gamma}$ λέμε ότι είναι <u>κανονική</u> αν $\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{0}$ για κάθε $t \in I$

<u>Ισοδύναμα</u>: $\|\vec{\gamma}'(t)\| > 0$

<u>Συνάρτηση μήκους</u>: $s: I \to \mathbb{R}$

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\vec{\gamma}'(u)\| du = \begin{cases} \text{μήκος από } \vec{\gamma}(t_0) \text{ σε } \vec{\gamma}(t), & t \geq t_0 \\ -\text{μήκος από } \vec{\gamma}(t_0) \text{ σε } \gamma(t), & t < t_0 \end{cases}$$





για $t < t_0$ η συνάρτηση υπολογίζει το αντίθετο του μήκους από $\vec{\gamma}(t_0)$ σε $\vec{\gamma}(t)$.

για $t > t_0$ η συνάρτηση υπολογίζει το μήκος από $\vec{\gamma}(t_0)$ σε $\vec{\gamma}(t)$.

Αν έχω t_0' έχουμε:

$$\int_{t_0'}^{t} \|\vec{\gamma}'(u)\|du = \int_{t_0}^{t} \|\vec{\gamma}'(u)\|du + \underbrace{\int_{t_0'}^{t_0} \|\vec{\gamma}'(u)\|du}_{= c}$$

$\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$, ; $\phi: \underset{u}{J} \to \underset{t}{I}$ $\quad t = \varphi(u)$

ώστε η $\tilde{\vec{\gamma}} = \vec{\gamma} \circ \phi : J \to \mathbb{R}^n$ να έχει βαθμωτή ταχύτητα σταθερή 1.

Δηλαδή $\|\tilde{\vec{\gamma}}'(u)\| = 1$ για κάθε $u \in J$

$\|\vec{\gamma}'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\| = 1$ για κάθε $u \in J$

$\|\vec{\gamma}'(\varphi(u))\| \, |\varphi'(u)| = 1$ για κάθε $u \in J$ $(*)$

Αναγκαία συνθήκη : $\|\vec{\gamma}'(\phi(u))\| > 0$ για κάθε $u \in J$

$\|\vec{\gamma}'(t)\| > 0$ για κάθε $t \in$

Τι σημαίνει $\|\vec{\gamma}'(t)\| > 0$; Σημαίνει ότι $\vec{\gamma}$ είναι κανονική καμπύλη.

Συμπέρασμα: Για να υπάρχει μια αναπαραμέτριση όπου η αναπαραμετρ. καμπύλη να έχει βαθμωτή ταχύτητα 1 πρέπει η καμπύλη να είναι κανονική. Είναι ικανή συνθήκη;

→ Υπάρχει όμως η κατάλληλη ϕ; (Θέλω να βρω τη ϕ)

Έστω (υποθέτω) ότι $\|\vec{\gamma}'(\varphi(u))\|>0$:

$$(*) \Rightarrow \quad |\phi'(u)| = \frac{1}{\|\gamma'(\phi(u))\|} > 0$$ που δείνει την απόλυτη τιμή της $\phi'(u)$

$$\phi'(u) = \frac{1}{\|\vec{\gamma}'(\phi(u))\|} \ \forall u \in J \quad \text{ή} \quad \phi'(u) = -\frac{1}{\|\vec{\gamma}'(\phi(u))\|} \ \forall u \in J$$

Θα βρω την αντίστροφη

$$\underset{t}{\phi^{-1}: I} \to \underset{u}{J} \quad , u = \phi(t)$$

$$(\phi^{-1})'(t) = \frac{1}{\phi'(u)}$$

<u>Πρώτη περίπτωση</u> : $(\phi^{-1})'(t) = \|\vec{\gamma}'(t)\|$

$$\phi^{-1}(t) - \phi^{-1}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{\gamma}'(v)\| \, dv = s(t)$$

$$\boxed{\phi^{-1}(t) = s(t) + \text{σταθερά}}$$

$\phi^{-1} \nearrow$ άρα και ϕ γν. αύξουσα

Δεύτερη περίπτωση: $(\phi^{-1})'(t) = -\|\vec{\gamma}'(t)\|$

$$\phi^{-1}(t) - \phi^{-1}(t_0) = -\int_{t_0}^{t} \|\vec{\gamma}'(v)\| \, dv = -s(t)$$

$$\boxed{\phi^{-1}(t) = -s(t) + \text{σταθερά}}$$

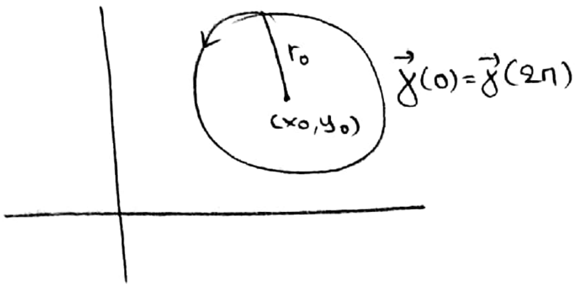
$\phi^{-1} \searrow$ άρα και ϕ γν. φθίνουσα

Κλειστή καμπύλη

$\vec{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ με $\vec{\gamma}(a)=\vec{\gamma}(b)$

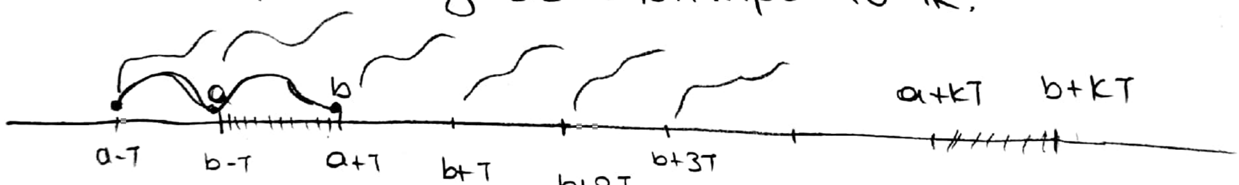
π.χ κύκλος ή έλλειψη

$\vec{\gamma}(t)=(x_0+r_0\cos t,\, y_0+r_0\sin t)$ $t\in[0,2\pi]$ $r_0>0$



έλλειψη: $\vec{\gamma}(t)=(x_0+a\cos t,\, x_0+\beta\sin t)$

Αν ταυτίζονται οι τιμές στα δύο άκρα, Μπορούμε να επεκτείνουμε την $\vec{\gamma}$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.



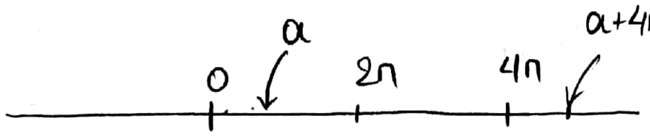
$T:=b-a>0$

Ορίζουμε για $k\neq 0$: $\vec{\gamma}:[a+kT,\, b+kT]\to\mathbb{R}^n$

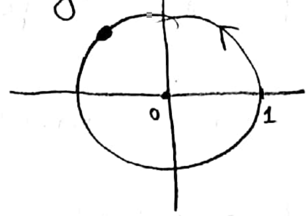
$\vec{\gamma}(t):=\vec{\gamma}(t-kT)$ $\quad\vec{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ περιοδική με περίοδο $T>0$

Συνεχής αφού $\vec{\gamma}(a)=\vec{\gamma}(b)$

$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \vec{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$



$\vec{\gamma}(\alpha) = \vec{\gamma}(\alpha + 4\pi)$



$\vec{\gamma} : [\alpha, \alpha+4\pi] \to \mathbb{R}^2$

Ποια η διαφορά αν πάρω $[0, 2\pi]$ και $[0, 4\pi]$

$[0,2\pi] \downarrow$ διαγράφει την τροχιά 1 φορά

$[0,4\pi] \downarrow$ διαγράφει την τροχιά 2 φορές.

Ουσιαστική διαφορά: $\vec{\gamma}(t + \kappa 2\pi) = \vec{\gamma}(t)$

$\vec{\gamma}(t+T) = \vec{\gamma}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

$\left(\gamma(t+T+T) = \gamma(t+T) = \gamma(t)\right)$

Άρα γενικότερα : $\vec{\gamma}(t + kT) = \vec{\gamma}(t)$.

Η $\vec{\gamma}$ λέγεται περιοδική αν υπάρχει $T > 0$ ώστε να ισχύει $\vec{\gamma}(t+T) = \vec{\gamma}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Περίοδος της $\vec{\gamma}$ ονομάζεται το μικρότερο τέτοιο $T > 0$

Αν η καμπύλη είναι σταθερή τι γίνεται;

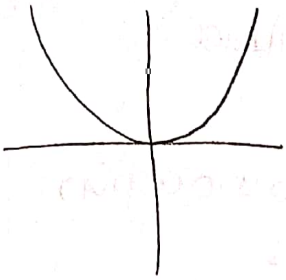
$\vec{\gamma}(t) = 3 \quad t \in \mathbb{R}$

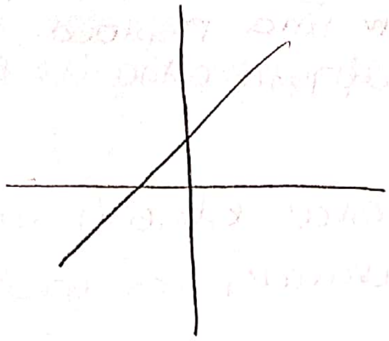
είναι περιοδική αλλά δεν έχει περίοδο.

Διαφορική Γεωμετρία - Διάλεξη 5

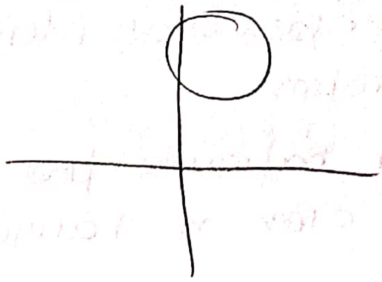
8/3/22

$y=x^2$





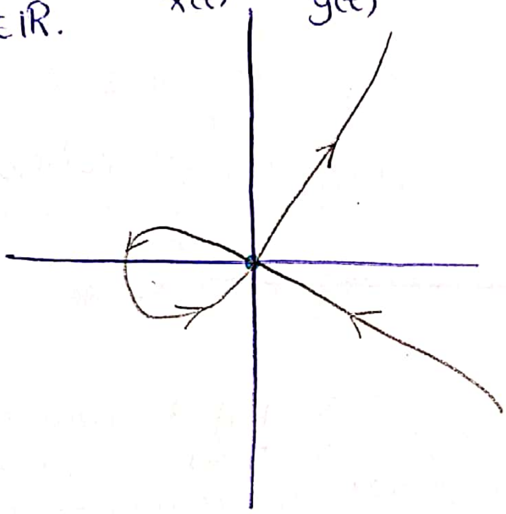
κύκλος



περνάει άπειρες φορές από τον εαυτό του.

$\vec{\gamma}(t) = (\underbrace{t^2-1}_{x(t)}, \underbrace{t^3-t}_{y(t)})$ (στο βιβλίο γράφει t^3-1, είναι λάθος)

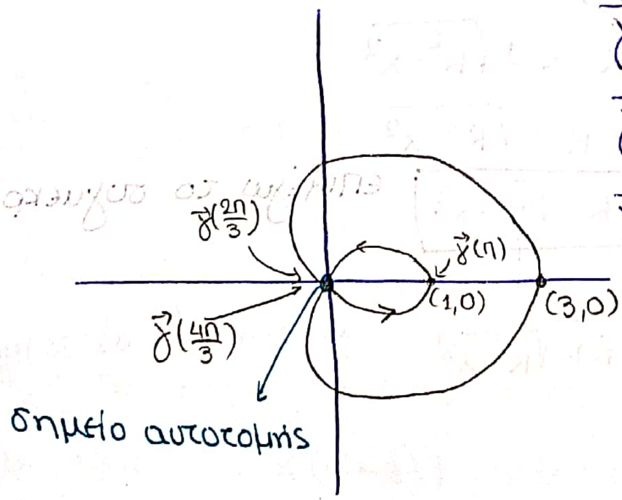
$t\in\mathbb{R}$.



$t=-1$, $t=1$

$\vec{\gamma}(-1)=\vec{\gamma}(1)=(0,0)$ σημείο αυτοτομής

$\vec{\gamma}(t) = ((\underbrace{(1+\cos t)\cos t}_{x(t)}, \underbrace{(1+2\cos t)\sin t}_{y(t)})$



$\vec{\gamma}(t+2\pi)=\vec{\gamma}(t)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$

$\vec{\gamma}(0)=\vec{\gamma}(2\pi)=(3,0)$

$\vec{\gamma}(\frac{2\pi}{3}) = \vec{\gamma}(\frac{4\pi}{3})=(0,0)$

συναντάει τον εαυτό της στο ίδιο σημείο και στο $\frac{2\pi}{3}$ και στο $\frac{4\pi}{3}$.

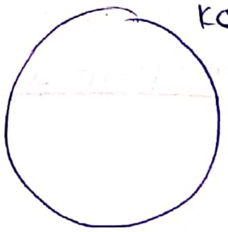
Είναι κλειστή καμπύλη με περίοδο 2π

Σημείο αυτοτομής: Όταν η καμπύλη συναντάει ξανά τον εαυτό της μέσα στην ίδια περίοδο.

Ο κύκλος είναι κλειστή καμπύλη αλλά δεν έχει σημεία αυτοτομής.

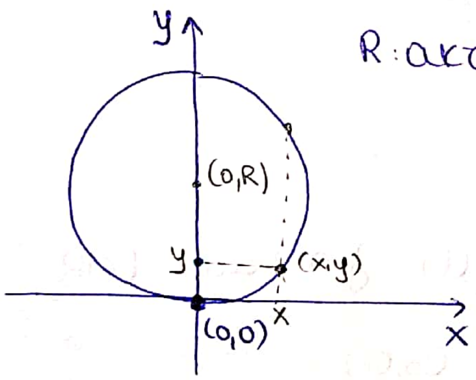
Αν η καμπύλη μας δεν είναι κλειστή σημείο αυτοτομής είναι όταν η καμπύλη συναντάει τον εαυτό της.

Καμπυλότητα



Για κύκλο : καμπυλότητα $= \dfrac{1}{\text{ακτίνα}}$ — όσο πιο μεγάλη είναι η ακτίνα, τόσο πιο μικρή είναι η καμπυλότητα.

R: ακτίνα



$$x^2+(y-R)^2=R^2$$

$$(y-R)^2=R^2-x^2 \qquad x<R$$

$$y-R=\pm\sqrt{R^2-x^2}$$

$$y=R\pm\sqrt{R^2-x^2}$$

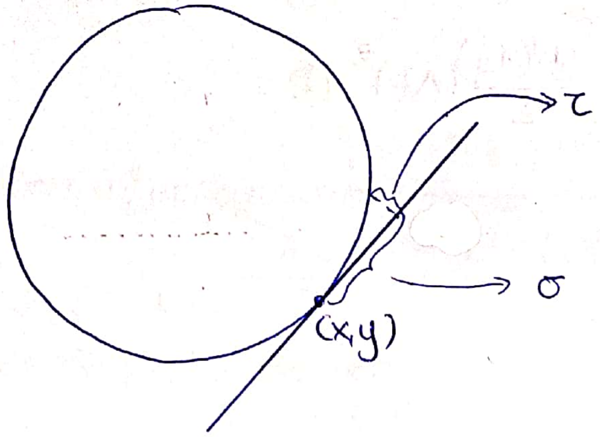
$$\boxed{y=R-\sqrt{R^2-x^2}}$$ επιλέγω το συγκεκριμ. y

$$y=\frac{x^2}{R+\sqrt{R^2-x^2}}$$ ταυτότητα διαφ. τετραγ.

$$\Rightarrow \frac{2y}{x^2}=\frac{2}{R+\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2y}{x^2}=\frac{1}{R}$$ Αυτό είναι ίσο με την καμπυλότητα

$$\text{καμπυλότητα}=\frac{1}{\text{ακτίνα}}=\lim_{x\to 0}\frac{2y}{x^2}$$



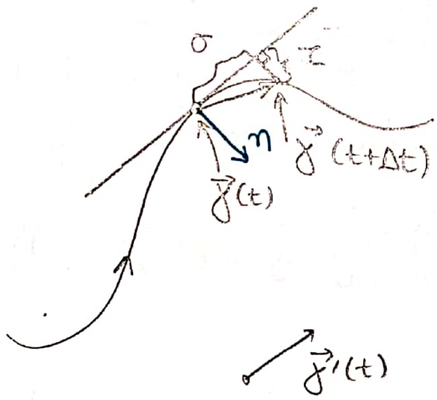
$\frac{2\tau}{\sigma^2} \longrightarrow$ καμπυλότητα στο σημείο (x,y)

όταν $(x',y') \to (x,y)$

Καμπυλότητα για επίπεδες κανονικές καμπύλες

$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ $\quad \vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^2$

$\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ για κάθε $t \in I$



$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{2\tau}{\sigma^2} =:$ καμπυλότητα στο σημείο $\vec{\gamma}(t)$

Από Θεωρ. Taylor

$x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t_x)\Delta t \left(+ \frac{x''(t)}{2}(\Delta t)^2 + \frac{x''(t)}{6}(\Delta t)^3 + \dots \right)$

βάζω t_x ανάμεσα στο t και $t+\Delta t$ Θ.Μ.Τ

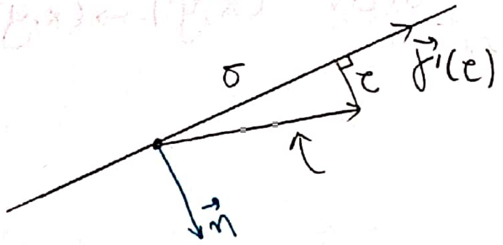
Άρα έχω: $x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t_x)\Delta t$ ① όπου ανάμεσα

$y(t+\Delta t) = y(t) + y'(t_y)\Delta t$ ② στα t, $t+\Delta t$

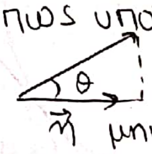
$\left(\begin{array}{c} t < t_x < t+\Delta t \\ \text{ή} \\ t+\Delta t < t_x < t \end{array} \right)$

$x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + \frac{x''(t'_x)}{2}(\Delta t)^2$ ③ t'_x, t'_y ανάμεσα στο $t, t+\Delta t$

$y(t+\Delta t) = y(t) + y'(t)\Delta t + \frac{y''(t'_y)}{2}(\Delta t)^2$ ④



πως υπολογίζω προβολή.



$\vec{n}$ μηκος 1

εσωτ. γινόμενο

προβολή $= |\|\vec{x}\|\,\|\vec{n}\|\cos\theta|$
$= |\vec{x}\cdot\vec{n}|$

$$\sigma = \frac{|(\vec{\gamma}(t+\Delta t)-\vec{\gamma}(\tau))\cdot\vec{\gamma}'(t)|}{\|\gamma'(t)\|}$$

Παίρνω $\vec{n}$ μοναδιαίο στο πίσω σχήμα για βρω το τ.

$$\tau = |(\vec{\gamma}(t+\Delta t) - \vec{\gamma}(t))\cdot\vec{n}|$$

$\vec{\gamma}(t+\Delta t) - \vec{\gamma}(t) = (x'(t_x), y'(t_y))\Delta t$ αφαιρώ ①, ②

$(\vec{\gamma}(t+\Delta t) - \vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}'(t) = (x'(t_x)x'(t) + y'(t_y)y'(t))\Delta t$

$$\sigma = \frac{|x'(t_x)x'(t) + y'(t_y)y'(t)|\,|\Delta t|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

Για το τ.

$\vec{\gamma}(t+\Delta t) - \vec{\gamma}(t) = (x'(t), y'(t))\Delta t + \frac{1}{2}(x''(t'_x), y''(t'_y))(\Delta t)^2$

γιατί $\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{n} = 0$

$$(\vec{\gamma}(t+\Delta t) - \vec{\gamma}(t))\cdot\vec{n} = 0\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-x''(t'_x)y'(t) + y''(t'_y)\cdot x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}(\Delta t)^2\right)$$

για $(x'(t), y'(t))$
διαλέγω $\vec{n} = \left(\frac{-y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\right)$

Άρα έχουμε: $\sigma = \overline{|x'(t_x)\,x'(t)}$

$$\tau = \frac{|-x''(t_x)\,y'(t) + y''(t_y)\,x'(t)|}{2\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}(\Delta t)^2$$

$\Delta t \to 0 \quad t_x, t_y, t_x', t_y' \to t$

$$\text{Καμπυλότητα} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\tau}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{|-x''(t_x)\,y'(t) + y''(t_y)\,x'(t)|\cancel{(\Delta t)^2}}{\sqrt{\cancel{(x'(t))^2} + (y'(t))^2}} \cdot \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^{\cancel{2}}}}{(x'(t_x)\,x'(t) + y'(t_y)\,y'(t))^2\cancel{(\Delta t)^2}} =$$

$$= \frac{|-x''(t)\cdot y'(t) + y''(t)\,x'(t)| \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^2} =$$

$$= \frac{|-x''(t)\,y'(t) + y''(t)\,x'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} = \frac{|x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}$$

Παράδειγμα κύκλος

$$\vec{\gamma}(t) = (\underbrace{x_0 + r_0\cos t}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + r_0 \sin t}_{y(t)})$$

$x'(t) = -r_0 \sin t \quad , y'(t) = r_0 \cos t$

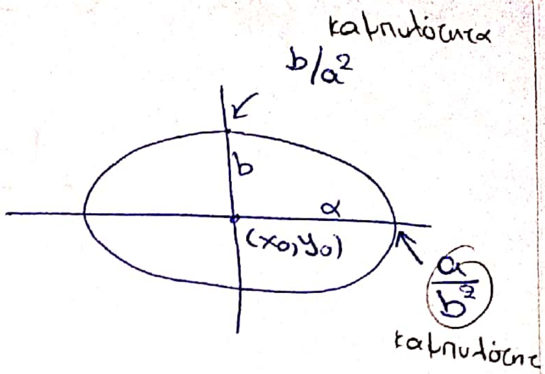
$x''(t) = -r_0 \cos t \quad , y''(t) = -r_0 \sin t$

αριθμητής καμπυλότητας
$\shortparallel$
$r_0^2 \sin^2 t + r_0^2 \cdot \cos^2 t = r_0^2$

$$\text{καμπυλότητα} = \frac{r_0^2}{(r_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{r_0}$$

Παράδειγμα Έλλειψη

$$\vec{\gamma}(t) = (\underbrace{x_0 + a\cos t}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + b\sin t}_{y(t)})$$



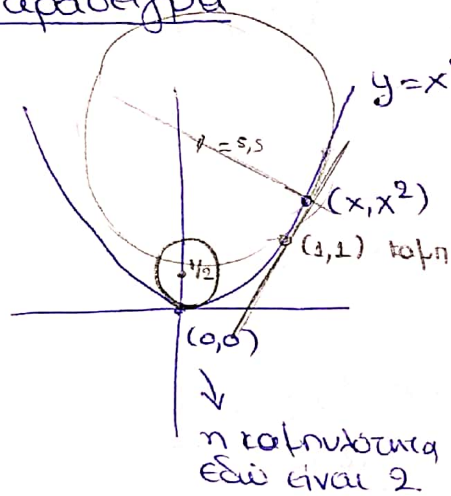
$x'(t) = -a\sin t$ $x''(t) = -a\cos t$

$y'(t) = b\cdot\cos t$ $y''(t) = -b\cdot\sin t.$

$$\text{καμπυλότητα} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

εξαρτάται από το t

Παράδειγμα



Παραμετροποιώ: $x(t) = t$
$y(t) = t^2$

Δηλαδή γράφεται: $\vec{\gamma}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$

$x'(t) = 1$ $x''(t) = 0$

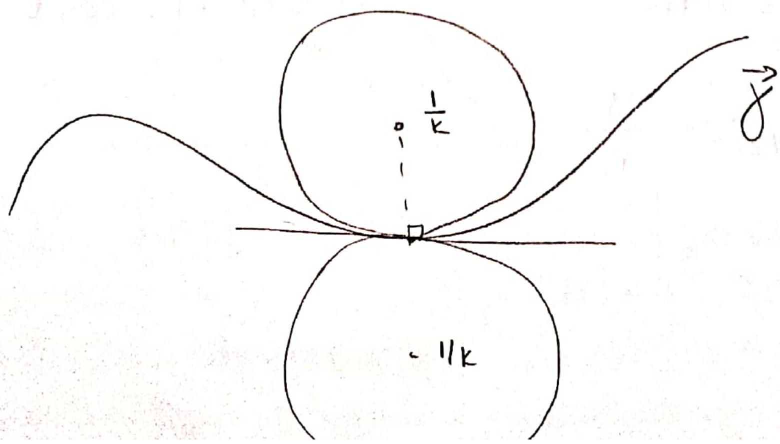
$y'(t) = 2t$ $y''(t) = 2$

$$\text{καμπυλότητα} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

Παίρνω κέντρο στο $\frac{1}{2}$

Κύκλος και παραβολή έχουν την ίδια καμπυλότητα στο (0,0)

k = καμπυλότητα



Δ.α λέγομε τον πάνω κύκλο.

Διαφορική Γεωμετρία - Διάλεξη 6

10/03/22

$\vec{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2 \qquad \vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$

Καμπυλότητα στο σημείο $\vec{\gamma}(t)$ είναι

$$\frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} = \frac{\qquad}{\|\vec{\gamma}'(t)\|^3} \qquad (1)$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \|\vec{\gamma}'(t)\|^2$$

Υπενθύμιση ΑΠ ΙΙ - Εξωτερικό γινόμενο

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

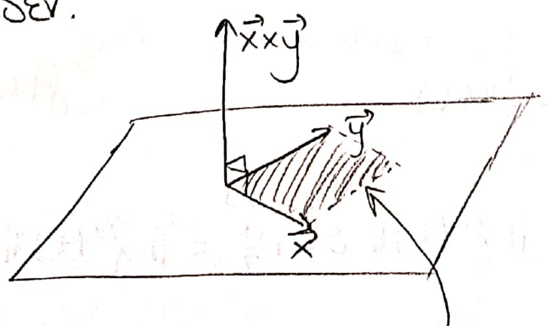
$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ιδιότητες οριζουσών

- όταν αλλάζω γραμμές αλλάζει το πρόσημο της.
- Αν $\vec{x}, \vec{y}$ συνευθειακά το εξ. γινόμενο είναι μηδέν.

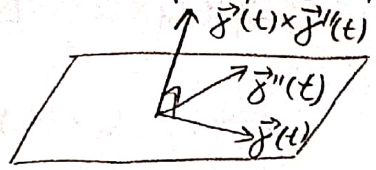
Κατεύθυνση εξωτερικού γινομένου: σκεφτόμαστε ότι το $\vec{x}$ θέλουμε να πάει στο $\vec{y}$ από κάτω έχει βίδα, από κει που ανεβαίνει η βίδα είναι η κατεύθυνση του.



- $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cdot \sin\theta$ = εμβαδόν παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\vec{x}, \vec{y}$.

- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Εμείς είμαστε στον $\mathbb{R}^2$ θέλαμε $\mathbb{R}^3$ άρα το κάνουμε:



$$\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t), 0)$$

$$\vec{\gamma}''(t) = (x''(t), y''(t), 0)$$

$$\vec{\gamma}'(t)\times\vec{\gamma}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}\right)$$

$$\|\vec{\gamma}'(t)\times\vec{\gamma}''(t)\| = |x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)| = (0, 0, x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))$$

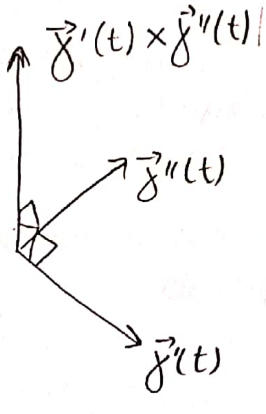
Άρα η (1) γίνεται:

$$\frac{|x''(t)\cdot y'(t) - x'(t)y''(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} = \frac{\|\vec{\gamma}'(t)\times\vec{\gamma}''(t)\|}{\|\vec{\gamma}'(t)\|^3}$$

στον $\mathbb{R}^3$ με τρίτη συντεταγμένη 0.

Έστω $\vec{\gamma}$ μοναδιαίας βαθμωτής ταχύτητας.

$\|\vec{\gamma}'(t)\| =$ σταθερό 1. (*)



$$\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}'(t) = 1$$

$$\vec{\gamma}''(t)\cdot\vec{\gamma}'(t) + \vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}''(t) = 0$$

$$\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{\gamma}''(t) = 0 \qquad \vec{\gamma}'(t)\perp\vec{\gamma}''(t)$$

$$\|\vec{\gamma}'(t)\times\vec{\gamma}''(t)\| = \|\vec{\gamma}'(t)\|\cdot\|\vec{\gamma}''(t)\|\cdot \cancel{\sin\tfrac{\pi}{2}}^{\,1} \overset{(*)}{=} \|\vec{\gamma}''(t)\|$$

Άρα καμπυλότητα $= \|\vec{\gamma}''(t)\| \to$ μέτρος της επιτάχυνσης.

Όταν η καμπύλη μας έχει σταθερή βαθμωτή ταχύτητα ίση με 1.

$$\| \vec{\gamma}'(t) \| = 1$$

$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$ παραγωγίζω ως προς t.

$$2x'(t) \cdot x''(t) + 2y'(t)\, y''(t) = 0$$

Έστω $x'(t) \neq 0$

$$x''(t) = -\frac{y'(t)}{x'(t)}\, y''(t)$$

$$\text{Η καμπυλότητα} = \frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}} =$$

$$= \left| -\frac{(y'(t))^2}{x'(t)}\, y''(t) - x'(t) y''(t) \right|$$

$$= |y''(t)| \left| \frac{(y'(t))^2 + (x'(t))^2}{x'(t)} \right| = \left| \frac{y''(t)}{x'(t)} \right| \overset{?}{=}$$

$$= \sqrt{(x''(t))^2 + (y''(t))^2} \quad \text{που ισχύει γιατί:}$$

(;) γιατί: $\sqrt{(x''(t))^2 + (y''(t))^2} = \sqrt{\frac{(y'(t))^2}{(x'(t))^2}(y''(t))^2 + (y''(t))^2} = \ldots = \left| \frac{y''(t)}{x'(t)} \right|$

Άρα η καμπυλότητα $= \|\vec{\gamma}''(t)\|$

Ευθεία καμπύλη $\Rightarrow$ καμπυλότητα $=0$ (σταθερή)

Υποθέτουμε ότι καμπυλότητα = σταθερή 0

και χ.β.γ. $\|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$

Τότε $\|\gamma''(t)\| = 0$

Δηλαδή $x''(t) = 0$, $y''(t) = 0$ σταθερά.

Όμως αν σε ένα διάστημα $x''(t)=0$ και $y''(t)=0$

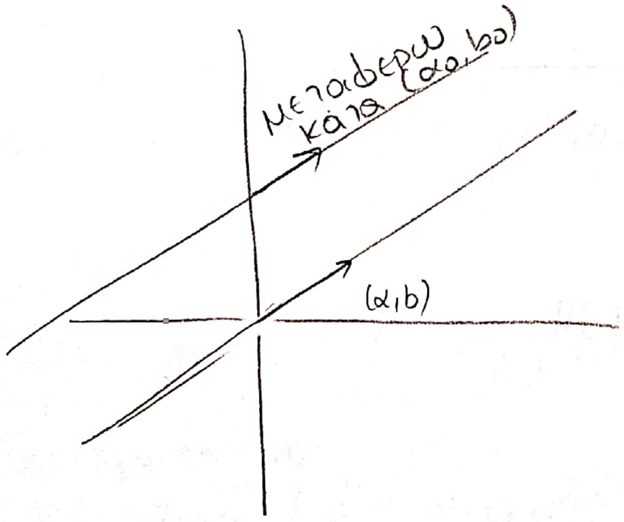
τότε $x'(t) = a$, $y'(t) = b$ σταθερά

Ολοκληρώνω:

$$x(t) = at + a_0$$
$$y(t) = bt + b_0$$

$$\vec{\gamma}(t) = (at + a_0, bt + b_0) = t(a,b) + (a_0, b_0)$$

$\downarrow$ μοναδιαίο διάνυσμα $(a^2+b^2=1)$



Αυτή ήταν αποδ. όταν η καμπυλότητα $=0$ η καμπύλη είναι ευθεία.

$$\vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t))$$

$$\text{καμπ}=\frac{|x''(t)y'(t)-x'(t)y''(t)|}{\left((x'(t))^2+(y'(t))^2\right)^{3/2}} \quad (*)$$

Τι γίνεται όταν έχω καμπύλη στάθμης;

$f(x,y)=c$ μπορώ να υποθέσω ότι $c=0$

$f(x,y)=0$

Θα χρησιμοποιήσω το τύπο $(*)$ για να βρω ένα νέο.
Παραμετροποιώ και κάπως εξαφανίζω το t.

$f(x(t),y(t))=0 \quad t\in I$

(Υπενθύμιση: κανόνας αλυσίδας ΑΠ ΙΙ)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t))=0 \quad (1)$$

Θα γράφουμε:
για συντόμευση.
$$\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$$

Υποθέτουμε για καμπύλες στάθμης. (Θεώρημα ΑΠ ΙΙ, πεπλεγμένης συνάρτησης)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \text{ Δεν είναι και οι δύο } 0.$$

Εδώ έστω $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq 0$. Τότε $y'(t)=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\cdot x'(t)$ (2)

παραγωγίζω την (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}x''(t)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'(t)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'(t)\right)x'(t)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}y''(t)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}x'(t)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'(t)\right)y'(t)=0$$

Λύνω ως προς $y''(t)=\ldots$ (3)

στο (*) αντικαθιστώ την (2) και (3)

και έχουμε:

$$\text{καμπ} = \frac{|x''(t)\,y'(t) - x'(t)\,y''(t)|}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} =$$

= πράξεις ... πράξεις .. πράξεις = ..

$$\text{καμπυλότητα} = \frac{\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right|}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}}$$

<u>Παράδειγμα</u> (κύκλος)

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \iff \underbrace{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2}_{f(x,y)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-x_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-y_0)$$

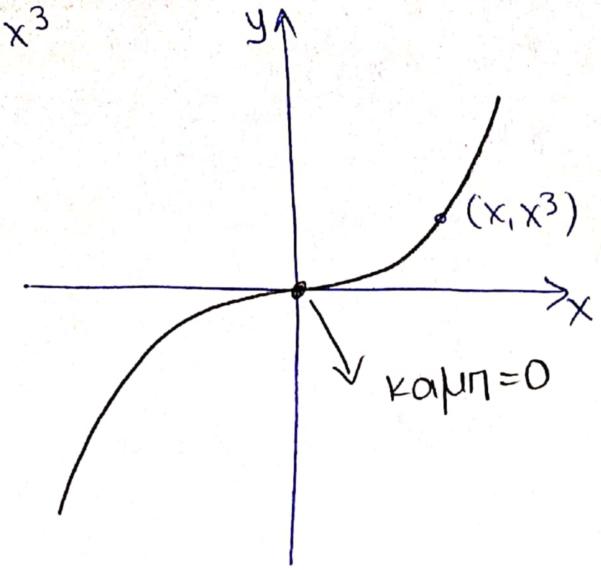
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{καμπυλότητα} = \frac{|2\cdot 4\cdot(y-y_0)^2 + 2\cdot 4\,(x-x_0)^2|}{\left(4(x-x_0)^2 + 4(y-y_0)^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{8R^2}{8R^3} = \frac{1}{R}.$$

Παράδειγμα

$y = x^3$



(α) $\underbrace{x^3 - y}_{} = 0$

$f(x,y) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$$\text{καμπ} = \frac{|6x|}{(9x^4+1)^{3/2}}$$

(β) σαν παραμετριμένη καμπύλη

$x(t) = t \qquad \vec{\gamma}(t) = (t, t^3) \qquad \text{καμπ} = \frac{|0 \cdot 3t^2 - 1 \cdot 6t|}{(9t^4+1)^{3/2}} = \frac{6|t|}{(9t^4+1)^{3/2}}$

$y(t) = t^3$

$x'(t) = 1 \quad , \quad y'(t) = 3t^2$

$x''(t) = 0 \quad , \quad y''(t) = 6t$

Όταν ~~η καμπύλη που είναι~~ γράφημα μιας συνάρτησης

Όταν έχω γράφημα συνάρτησης $y = g(x)$

(το βλέπω σαν καμπύλη στάθμης)

$$\underbrace{g(x) - y}_{f(x,y)=0} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = g'(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g''(x) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{καμπ} = \frac{|g''(x)|}{\left((g'(x))^2 + 1\right)^{3/2}}$$

15/03/22 - Διάλεξη 7

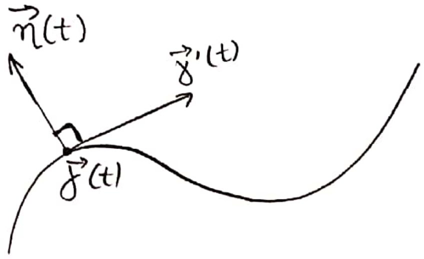
Κανονική καμπύλη στο επίπεδο με μοναδιαία ταχύτητα

$\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$

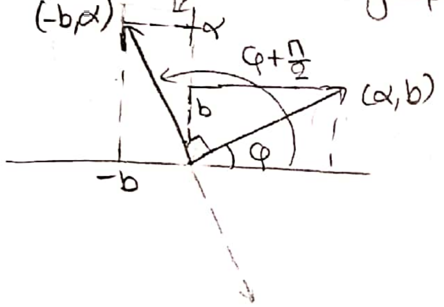
$\|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$ για $t \in I$ τότε $\vec{\gamma}''(t) \cdot \vec{\gamma}'(t) = 0$ (*)

$\|\vec{\gamma}'(t)\|^2 = 1 \Leftrightarrow \vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}'(t) = 1$
παραγωγίζω και έχω.
$2\vec{\gamma}''(t) \cdot \gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow$
$\gamma''(t) \cdot \gamma'(t) = 0$

Καμπυλότητα $= \|\vec{\gamma}''(t)\|$



Όταν έχουμε ένα διάνυσμα (α, b) έχει δύο κάθετα διανύσματα
επιλέγουμε αυτό με την θετική φορά (αντιωρολογιακή)



$2^{ος}$ τρόπος να το βρίσκω

$\alpha = \cos\varphi$
$b = \sin\varphi$

$\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi = -b$
$\sin(\varphi + \pi/2) = \cos\varphi = \alpha$

$\vec{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t))$, $\vec{n}(t) = (-y'(t), x'(t))$

(*) η δευτερη παράγωγος είναι κάθετη στην πρώτη άρα θα είναι κάποιο πολλαπλάσιο του $\vec{n}(t)$

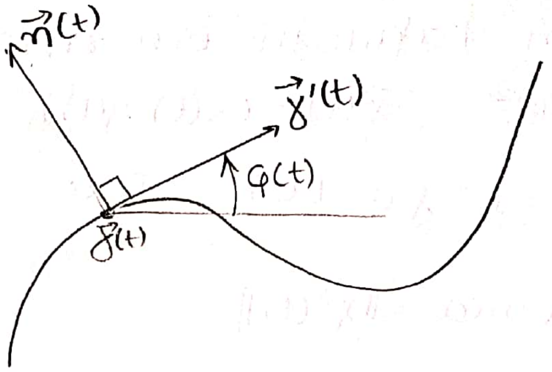
Δηλαδή $\boxed{\vec{\gamma}''(t) = k(t)\vec{n}(t)}$

Μήκος: $\|\vec{\gamma}''(t)\| = |k(t)|$ = καμπυλότητα

Άρα $k(t) = \pm$ καμπυλότητα

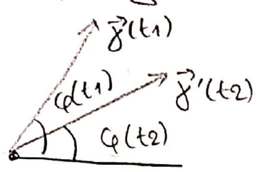
Οπότε το k είναι συνάρτηση και ονομάζεται συνάρτηση <u>προσημασμένης καμπυλότητας.</u> $k: I \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} x''(t) &= -k(t)\cdot y'(t) \\ y''(t) &= k(t)\cdot x'(t) \end{aligned}} \quad \begin{aligned}&(1)\\&(2)\end{aligned}$$



$x'(t) = \cos\varphi(t)$
$y'(t) = \sin\varphi(t)$

Υπάρχει πρόβλημα η γωνία δεν είναι μοναδική. Κάθε διάνυσμα έχει άπειρες γωνίες.



π.χ. $45+360°$
$45-360°$
και όλα
τα πολ/σια του 360

Όπου $\varphi: I \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση γωνίας του $\vec{\gamma}'$. (αυτό το υποθέτω)

$x''(t) = -\varphi'(t)\sin\varphi(t) = -\varphi'(t)\cdot y'(t)$ (3)
$y''(t) = \varphi'(t)\cos\varphi(t) = \varphi'(t)\,x'(t)$ (4)

Αντικαθιστώ τις (1),(2) στις (3),(4) έχουμε:

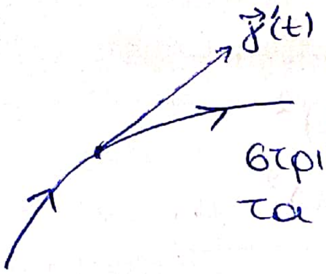
$$\left.\begin{aligned} -k(t)\,y'(t) &= -\varphi'(t)\,y'(t) \\ k(t)\,x'(t) &= \varphi'(t)\,x'(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

σίγουρα από τη μία ταυτόχρονα παίρνω $k(t)=\varphi'(t)$
σίγουρα ένα από τα δύο $x'(t), y'(t) \neq 0$

$\boxed{k(t)=\varphi'(t)}$ προσημασμένη καμπυλότητα = παράγωγος γωνίας ταχύτητας.

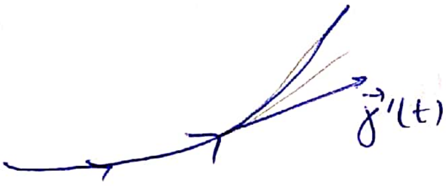
$\varphi(t) = \int k(t)\,dt$.

Παραδείγματα



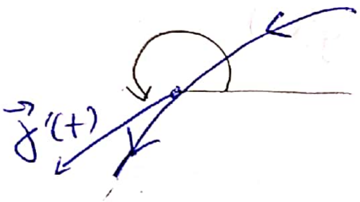
στρίβουμε προς τα δεξιά

$\kappa<0$ επειδή η γωνία μικραίνει
Η φ είναι φθίνουσα

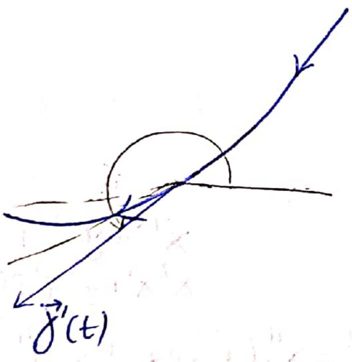


$\kappa>0$ επειδή η γωνία μεγαλώνει
Η φ είναι αύξουσα

Αλλάζουμε φορά διαγραφής (αλλάζει και η καμπυλότητα)



φ αύξουσα άρα $\kappa>0$



φ φθίνουσα άρα $\kappa<0$

Ορισμός της συνάρτησης $\phi: I \to \mathbb{R}$ γωνίας της ταχύτητας $\vec{\gamma}'$

$x''(t) = -\varphi'(t)\,y'(t)$
$y''(t) = \varphi'(t)\,x'(t)$

Αν έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει η $\varphi(t)$

$$\begin{array}{rl} & -x''(t)\,y'(t) = \varphi'(t)\,y'(t)^2 \\ + & y''(t)\,x'(t) = \varphi'(t)\,x'(t)^2 \\ \hline & y''(t)\,x'(t) - x''(t)\,y'(t) = \varphi'(t) \end{array}$$

Ορίζουμε $\phi: I \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$\varphi(t) := \int_{t_0}^{t} \left(y''(s)\,x'(s) - x''(s)\,y'(s) \right) ds + \varphi_0$$

όπου φ_0 είναι μια οποιαδήποτε γωνία του $\vec{\gamma}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$
$\varphi(t_0) = \varphi_0$

φ παραγωγίσιμη, $\varphi'(t) = y''(t)\,x'(t) - x''(t)\,y'(t)$
φ άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

Ορίζουμε $F(t) := x'(t)\cos\varphi(t) + y'(t)\sin\varphi(t)$
$G(t) := x'(t)\sin\varphi(t) - y'(t)\cos\varphi(t)$

$$F' = x''\cos\varphi - x'\varphi'\cdot\sin\varphi + y''\sin\varphi + y'\varphi'\cdot\cos\varphi$$
$$= (x'' + y'\varphi')\cos\varphi + (y'' - x'\varphi')\sin\phi$$

$x'^2 + y'^2 = 1 \quad (*)$
$x''x' + y''y' = 0 \quad (*)'$

$$x'' + y'\varphi' = x'' + y'(y''x' - x''y') = x'' + y'y''x' - x''y'^2 = x''(1 - y'^2) + y'y''x' \overset{(*)}{=}$$
$$= x''x'^2 + y'y''x' = x'(\cancel{x''x' + y''y'}^{\,0}) \overset{(*)'}{=} 0$$

$$y'' - x'(y''x' - x''y') = y'' - y''x'^2 + x'x''y' = y''(1 - x'^2) + x'x''y' =$$
$$\overset{(*)}{=} y''y'^2 + x'x''y' = y'(x''x' + y''y') \overset{(*)'}{=} 0$$

Άρα $F' = 0$ δηλαδή F σταθερή στο I
Ομοίως $G' = 0$ δηλαδή G σταθερή στο I

$$F(t) = F(t_0) = x'(t_0)\cdot\cos\varphi_0 + y'(t_0)\sin\varphi_0 =$$
$$= \cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 = 1$$

$$G(t) = G(t_0) = x'(t_0)\sin\varphi_0 - y'(t_0)\cdot\cos\varphi_0 =$$
$$= \cos\varphi_0\cdot\sin\varphi_0 - \sin\varphi_0\cdot\cos\varphi_0 = 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

$$F(t) := x'(t)\cos\varphi(t) + y'(t)\sin\varphi(t) \equiv 1$$
$$G(t) := x'(t)\sin\varphi(t) - y'(t)\cos\varphi(t) \equiv 0$$

πολ/ζω	πολ/ζω και προσθέτω
$\cdot\cos\varphi(t)$	$\sin\varphi(t)$
$\cdot\sin\varphi(t)$	$-\cos\varphi(t)$
$x'(t) = \cos\varphi(t)$	$y'(t) = \sin\varphi(t)$

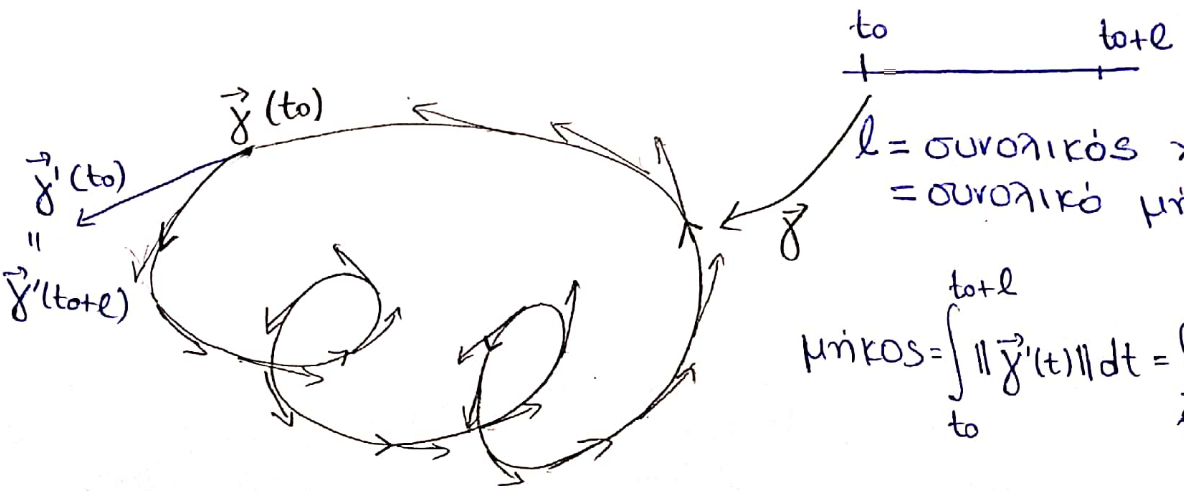
απαλείφω τα $x'(t)$ και τα $y'(t)$

Άρα $x'(t) = \cos\varphi(t)$
$y'(t) = \sin\varphi(t)$

$$\vec{\gamma}'(t) = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$$

Άρα η φ είναι συνάρτηση γωνίας της ταχύτητας, άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

$\vec{\gamma}$ κλειστή καμπύλη στο επίπεδο με μοναδιαία ταχύτητα.



ℓ = συνολικός χρόνος
= συνολικό μήκος.

$$\text{μήκος} = \int_{t_0}^{t_0+\ell} \|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\ell} dt = \ell$$

Ολική προσημασμένη καμπυλότητα $= \int_{t_0}^{t_0+\ell} k(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\ell} \varphi'(t)\,dt =$

↓

που λέει πόσες πλήρεις περιστροφές
έχει κάνει το διάνυσμα της ταχύτητας. $= \varphi(t_0+\ell) - \varphi(t_0) =$

$=$ γωνία του $\underset{\underset{\vec{\gamma}'(t_0)}{\shortparallel}}{\vec{\gamma}'(t_0+\ell)}$ $-$ γωνία του $\vec{\gamma}'(t_0)$

$= 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$

Διαφορική Γεωμ. **Διάλεξη 8.** 17/3/22

Παπαδημητράκης

Καμπύλες στον χώρο ($\mathbb{R}^3$)

$\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^3$ με $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

εφαπτ. διαν. (ταχύτητα): $\vec{\gamma}'(t)$, 2η παράγ.: $\vec{\gamma}''(t)$

καμπυλότητα $k(t) = \dfrac{\| \vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t) \|}{\| \vec{\gamma}'(t) \|^3}$

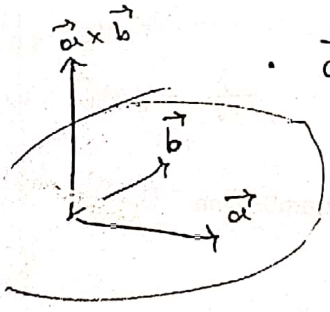
$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix} = \vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)$$

Ειδική περίπτωση: για $\vec{\gamma}$ με μοναδιαία ταχύτητα δηλ. $\| \vec{\gamma}'(t) \| = 1$ τότε $k(t) = \| \vec{\gamma}''(t) \|$.

Γιατί $\vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}''(t) = 0$ δηλ. είναι κάθετα και

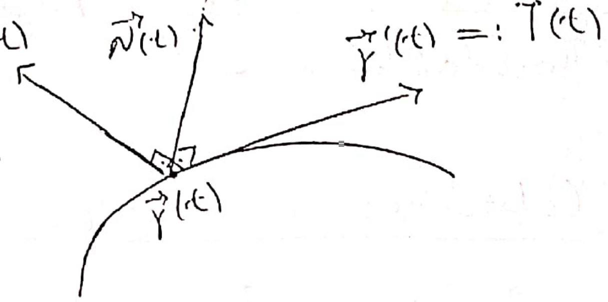
$\| \vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t) \| = \| \vec{\gamma}'(t) \| \cdot \| \vec{\gamma}''(t) \|$ (αφού γωνία 90°).

Γενικά:
- $\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \| \cdot \sin\theta$
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
- $(\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2) \times b = \lambda \vec{a}_1 \times \vec{b} + \lambda \vec{a}_2 \times \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$ (το εξ. γιν. είναι $\perp$ και στο $\vec{a}$ και στο $\vec{b}$)



Στρέψη καμπύλης στον χώρο

Ειδική περίπτωση: $\vec{\gamma}$ με μοναδιαία ταχύτητα.



$\vec{T}(t) := \vec{\gamma}'(t)$

Επειδή έχω μοναδιαία ταχύτητα θα ισχύει $\vec{\gamma}''(t) \perp \vec{\gamma}'(t)$

Κανονικοποιώ την $\vec{\gamma}''(t)$

$$\vec{N}(t) := \frac{1}{k(t)} \cdot \vec{\gamma}''(t).$$

$\vec{T}(t)$ και $\vec{N}(t)$ μοναδιαία διανύσματα

Προϋπόθεση: $k(t) \neq 0$

Παίρνω και τρίτο διάνυσμα κάθετο σ' αυτά ώστε να δημιουργήσω ορθοκανονικό σύστημα (όπως $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) κι αυτό θα είναι το εξωτερικό τους γινόμενο:

$\vec{B}(t) := \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$ (με μήκος ίσο με 1)

Έτσι έχω $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ <u>δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα.</u>

$\vec{B}(t)$ μοναδιαίο διάνυσμα $\rightarrow$ $\vec{B}'(t) \perp \vec{B}(t)$

$\vec{B}'(t) = \vec{T}'(t) \times \vec{N}(t) + \vec{T}(t) \times \vec{N}'(t)$

(ως άσκηση η απόδειξη από την ιδιότητα του εξωτερικού γινομ.)

Όμως

$\vec{T}'(t) =$ πολλαπλάσιο του $\vec{N}(t)$

$\Rightarrow \vec{T}'(t) \times \vec{N}(t) = 0$

$\longrightarrow$

Άρα $\vec{B}'(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}'(t) \Rightarrow \vec{B}'(t) \perp \vec{T}(t)$

και άρα $\vec{B}'(t) \perp \vec{B}(t), \vec{T}(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{B}'(t) =$ πολλ/σιο του $\vec{N}(t)$

Δηλαδή υπάρχει αριθμός που τον συμβολίζουμε

$\tau(t)$ ώστε $\vec{B}'(t) = -\tau(t)\cdot\vec{N}(t)$ και τον

ονομάζουμε στρέψη της καμπύλης στο σημείο $\vec{\gamma}(t)$.

Ισχύει $\tau: I \to \mathbb{R}$, $k: I \to \mathbb{R}$ (παίνει με $k(t) \neq 0$).

Αυτό το δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα είναι

το λεγόμενο "τρίεδρο Frenet".

Πρόταση: Για γενική καμπύλη στον χώρο (όχι μόνο μοναδιαίας ταχύτητας) η στρέψη $\tau(t)$ έχει τύπο:

$$\tau(t) = \frac{(\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)) \cdot \vec{\gamma}'''(t)}{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|^2}$$

Απόδειξη: Πρώτα όταν $\|\vec{\gamma}'(t)\| = 1$ σταθερό.

$\vec{B}'(t) = -\tau(t)\cdot\vec{N}(t) \Rightarrow -\tau = \vec{N}(t)\cdot\vec{B}'(t)$

$\Rightarrow \tau(t) = -\vec{N}(t)\cdot(\vec{T}(t) \times \vec{N}'(t))$

$$= -\frac{1}{k(t)}\cdot\vec{\gamma}''(t)\cdot\left(\vec{\gamma}'(t) \times \left(-\frac{k'(t)}{k(t)^2}\cdot\vec{\gamma}''(t) + \frac{1}{k(t)}\cdot\vec{\gamma}'''(t)\right)\right)$$

$\vec{N}(t) = \frac{1}{k(t)}\cdot\vec{\gamma}''(t)$

$\vec{N}'(t) = \frac{-k'(t)}{k(t)^2}\cdot\vec{\gamma}''(t) + \frac{1}{k(t)}\cdot\vec{\gamma}'''(t)$ $\longrightarrow$

$$= -\frac{1}{k(t)} \cdot \vec{\gamma}''(t) \circ \left(-\frac{k'(t)}{k(t)^2} \cdot \vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot \vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}'''(t) \right)$$

$$= \frac{k'(t)}{k(t)^3} \cdot \underbrace{\vec{\gamma}''(t) \cdot \left(\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\right)}_{=0} - \frac{1}{k(t)^2} \vec{\gamma}''(t) \circ \left(\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}'''(t)\right)$$

$$\Rightarrow \tau(t) = -\frac{1}{k(t)^2} \cdot \underbrace{\vec{\gamma}''(t) \circ \left(\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}'''(t)\right)}_{\text{μικτό γινόμενο}}$$

μικτό γινόμενο (εσωτ. γιν. ενός με το εξ. γιν. δύο άλλων)

γενικά:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \right)$$

Άρα $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$

$$= \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot a_1 + \det \begin{bmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \cdot a_2 + \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \cdot a_3$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \tau(t) = \frac{1}{k(t)^2} \cdot \vec{\gamma}'''(t) \circ \left(\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\right)$$

και $k(t) = \|\vec{\gamma}''(t)\| = \|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|$

αντικαθιστώ και καταλήγω στον τύπο της $\tau(t)$.

Η γενική περίπτωση:

$\vec{\gamma}(t)$, $\vec{\gamma}(s)$ όπου s νέα παράμετρος

ώστε $\left\| \frac{d\vec{\gamma}}{ds} \right\| = 1$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = \frac{d\vec{\gamma}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{δηλ.} \quad \boxed{\vec{\gamma}'(t) = s'(t) \cdot \vec{\gamma}'(s)}$$

αριθμός άρα το βγάζω μπροστά

Παίρνω 2η παράγωγο:

$$\boxed{\vec{\gamma}''(t) = s''(t) \cdot \vec{\gamma}'(s) + s'(t) \cdot \underbrace{s'(t) \cdot \vec{\gamma}''(s)}}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{\gamma}'(s) = \frac{d\vec{\gamma}'(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = s'(t) \cdot \vec{\gamma}''(s) \right)$$

Παίρνω 3η παράγωγο:

$$\vec{\gamma}'''(t) = s'''(t) \cdot \vec{\gamma}'(s) + s''(t) \cdot s'(t) \cdot \vec{\gamma}''(s) + $$
$$+ 2s'(t) \cdot s''(t) \cdot \vec{\gamma}''(s) + (s'(t))^2 \cdot s'(t) \cdot \vec{\gamma}'''(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}'''(t) = s'''(t) \cdot \vec{\gamma}'(s) + 3 \cdot s'(t) \cdot s''(t) \cdot \vec{\gamma}''(s) + (s'(t))^3 \cdot \vec{\gamma}'''(s)}$$

$$\text{θέλω στρέψη} = \frac{(\vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s)) \cdot \vec{\gamma}'''(s)}{\|\vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s)\|^2}$$

$$\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t) =$$

$$= s'(t) \cdot \vec{\gamma}'(s) \times \left(s'''(t) \cdot \vec{\gamma}'(s) + (s'(t))^2 \cdot \vec{\gamma}''(s) \right)$$

$$= s'(t) \cdot s''(t) \cdot \cancel{\vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s)}^{\,\to 0} + (s'(t))^3 \cdot \vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t) = (s'(t))^3 \cdot \vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s)}$$

$$\left(\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\right) \cdot \vec{\gamma}'''(t) =$$

$$= (s'(t))^3 \cdot \left(\vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s) \right) \cdot \Big(s'''(t) \cdot \vec{\gamma}'(s) + 3\, s'(t) \cdot s''(t) \cdot \vec{\gamma}''(s) + (s'(t))^3 \cdot \vec{\gamma}'''(s) \Big)$$

$$= (s'(t))^6 \cdot \left(\vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s) \right) \cdot \vec{\gamma}'''(s).$$

$$\tau(t) = \frac{\left(\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\right) \cdot \vec{\gamma}'''(t)}{\| \vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t) \|^2} = \frac{\cancel{(s'(t))^6} \cdot \left(\vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s) \right) \cdot \vec{\gamma}'''(s)}{\cancel{(s'(t))^6} \cdot \| \vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s) \|^2}$$

Άρα $\tau(t) =$ στρέψη.

Διαφορική Γεωμετρία - Διάλεξη 9

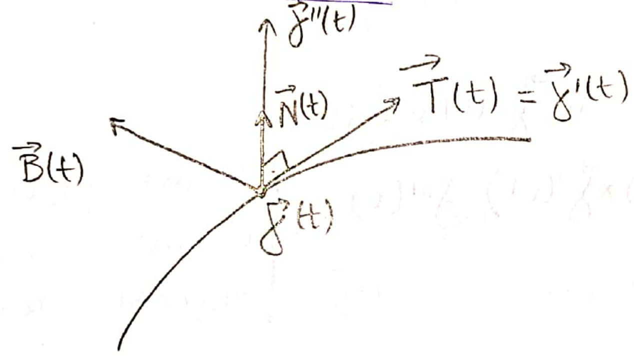
22/3/22

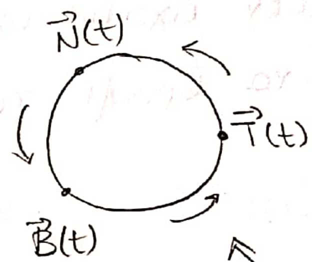
$\vec{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$

<u>καμπυλότητα</u> : $\quad k(t) = \dfrac{\| \vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t) \|}{\|\gamma'(t)\|^3}$

- για μοναδιαία ταχύτητα: $\quad k(t) = \|\gamma''(t)\|$
- Αν $k(t) \neq 0$ <u>στρέψη</u> : $\quad \tau(t) = \dfrac{(\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t))\, \vec{\gamma}'''(t)}{\|\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)\|^2}$

<u>Για μοναδιαία ταχύτητα</u> :





$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$

$\vec{B}'(t) = -\tau(t)\vec{N}(t)$

στρέψη.

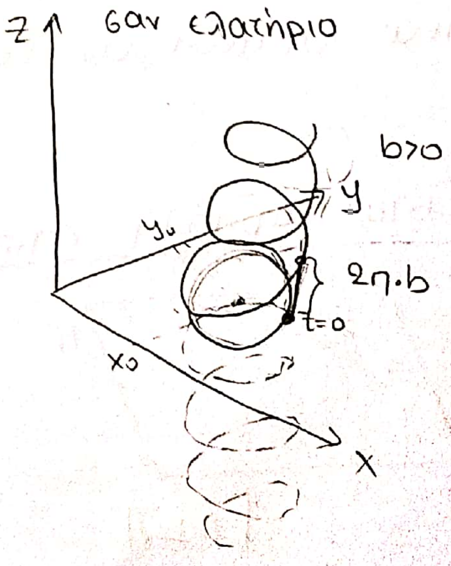
$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

$\vec{T} = \vec{N} \times \vec{B}$

$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$

<u>Παράδειγμα</u> $\quad \vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad r>0 \quad b \in \mathbb{R}$

(κυκλική έλικα) σαν ελατήριο



$\vec{\gamma}(t) = (x_0 + r\cos t,\, y_0 + r\sin t,\, bt)$

τροχιά : κυκλική αυτίνα
με ακτίνα r και βήμα $2\pi b$

$\gamma'(t) = (-r_0 \sin t, r_0 \cos t, b)$

$\gamma''(t) = (-r_0 \cos t, -r_0 \sin t, 0)$

$\gamma'''(t) = (r_0 \sin t, -r_0 \cos t, 0)$

Scanned with CamScanner

$$\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r_0\sin t & r_0\cos t & b \\ -r_0\cos t & -r_0\sin t & 0 \end{vmatrix} = (b r_0 \sin t, -b r_0 \cos t, r_0^2)$$

$$k(t) = \frac{(b^2 r_0^2 + r_0^4)^{1/2}}{(r_0^2+b^2)^{3/2}} = \frac{r_0}{b^2+r_0^2} > 0$$

$$\tau(t) = \frac{b r_0^2}{b^2 r_0^2 + r_0^4} = \frac{b}{b^2+r_0^2}$$

Αν δεν είχαμε υπολογίσει το $\vec{\gamma}'(t) \times \vec{\gamma}''(t)$ για να βρούμε το $(\vec{\gamma}'(t)\times\vec{\gamma}''(t))\cdot\gamma'''(t) = \begin{vmatrix} r_0\sin t & -r_0\cos t & 0 \\ -r_0\sin t & r_0\cos t & b \\ -r_0\cos t & -r_0\sin t & 0 \end{vmatrix}$

Αν $b=0$; Τότε παίρνω ένα κύκλο στο επίπεδο και $k(t)=\frac{1}{r_0}$ και $\tau(t)$ = σταθερή 0 (αφού έχω καμπύλη στο επίπεδο)

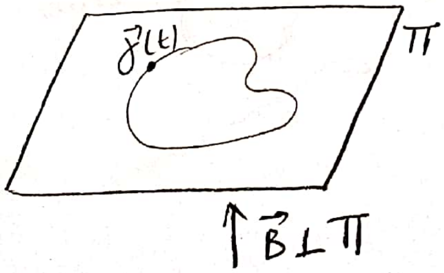
<u>Πρόταση</u>: Έστω καμπύλη με καμπυλότητα $\neq 0$. Τότε η τροχιά είναι επίπεδη αν και μόνο αν στρέψη $=0$

Απόδειξη

<u>Έστω καμπύλη επίπεδη.</u>

εξίσωση επιπέδου: $\alpha x+\beta y+\gamma z=c$

$(\alpha,\beta,\gamma)\cdot(x,y,z)=c$



$\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{B} = c$ σταθερά

$\vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\gamma}'(t)\perp\vec{B}$

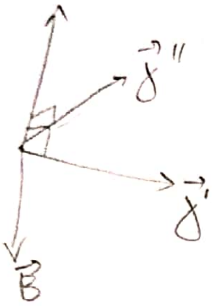
$\vec{\gamma}''(t)\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\gamma}''(t)\perp\vec{B}$

$\vec{\gamma}'''(t)\cdot\vec{B} = 0$

Θέλω να υπολογίσω τη στρέψη.

Αν πάρω το εξωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma}'(t)\times\vec{\gamma}''(t)$ = πολλαπλάσιο του $\vec{B}$

$\vec{\gamma}''' \perp \vec{B}$ $\Big\} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \left(\vec{\gamma}'(t)\times\vec{\gamma}''(t)\right)\cdot\vec{\gamma}'''(t) = 0$$

$$\tau(t) = 0$$

Έστω ότι η στρέψη $\tau(t)=0$

Άρα απ' τον τύπο $\vec{B}'(t) = -\tau(t)\cdot\vec{N}(t)$ έχω ότι $\vec{B}'(t) = \vec{0}$

άρα $\vec{B}(t) = \vec{B}$ σταθερό.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{B}\right) = \vec{\gamma}'(t)\cdot\vec{B} = \vec{\gamma}'(t)\cdot\big(\underbrace{\vec{T}(t)}_{\vec{\gamma}'(t)}\times\vec{N}(t)\big) = 0$$

$\vec{\gamma}(t)\cdot\vec{B} = C$ σταθερή

Άρα $\vec{\gamma}(t)$ σε ένα επίπεδο κάθετο στο $\vec{B}$.

$$\vec{T}'(t) = \vec{\gamma}''(t) = k(t)\vec{N}(t)$$

$$\left(\vec{N}(t) = \frac{1}{\|\gamma''(t)\|}\,\gamma''(t) = \frac{1}{k(t)}\cdot\vec{\gamma}''(t)\right)$$

$$\vec{B}'(t) = -\tau(t)\vec{N}(t)$$

$N'(t) = ;;$

$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$

$$\vec{N}'(t) = \vec{B}'(t) \times \vec{T}(t) + \vec{B}(t) \times \vec{T}'(t) = -\tau(t)\underbrace{\vec{N}(t) \times \vec{T}(t)}_{-\vec{B}(t)} + k(t)\underbrace{\vec{B}(t) \times \vec{N}(t)}_{-\vec{T}(t)}$$

$$= \tau(t)\vec{B}(t) - k(t)\vec{T}(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{T}' &= \qquad\quad k\vec{N} \\ \vec{N}' &= -k\vec{T} + 0\cdot\vec{N} + \tau\vec{B} \\ \vec{B}' &= \qquad -\tau\cdot\vec{N} \end{aligned}}$$

Εξισώσεις Frenet-Serret. Μπορώ να τις γράψω και σε μορφή πίνακα.

Για μοναδιαία ταχύτητα: οι εξισώσεις Frenet-Serret.

$$\begin{pmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}}_{\text{αντισυμμετρικός πίνακας.}} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω γ μοναδιαίας ταχύτητας και καμπυλότητας $\neq 0$.
Αν καμπυλότητα = σταθερή και στρέψη = 0 τότε η τροχιά είναι κυκλική. (Δηλαδή είτε ολόκληρος κύκλος είτε τόξο)

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι: $k(t) = k \neq 0$ και $\tau(t) = 0$

Δηλαδή οι εξισώσεις Frenet-Serret είναι:

$$\vec{T}'(t) = k\cdot\vec{N}(t)$$
$$\vec{N}'(t) = -k\vec{T}(t)$$
$$\vec{B}'(t) = 0$$

Άρα (α) $\vec{B}(t) = \vec{B}$ σταθερό

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t)\cdot\vec{B}) = \gamma'(t)\cdot\vec{B} = \vec{T}(t)\cdot\vec{B} = 0$$

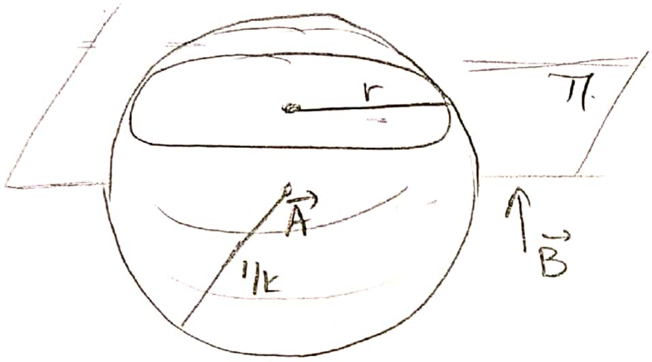
$\vec{\gamma}(t) \cdot \vec{B} = c$ σταθερά

$\vec{\gamma}(t)$ σε επίπεδο Π κάθετο στο $\vec{B}$

(β) $\frac{d}{dt}\left(\vec{\gamma}(t) + \frac{1}{k}\vec{N}(t)\right) = \vec{\gamma}'(t) + \frac{1}{k}\vec{N}'(t) = \vec{T}(t) - \vec{T}(t) = \vec{0}$

$\vec{\gamma}(t) + \frac{1}{k}\vec{N}(t) = \vec{A}$ σταθερό

$\|\vec{\gamma}(t) - \vec{A}\| = \frac{1}{k}$ σταθερό δηλ. $\vec{\gamma}(t)$ ανήκει σε σφαίρα κέντρου $\vec{A}$ και ακτίνας $\frac{1}{k}$.



Η τροχιά είναι στην κυκλική τομή $\overbrace{\text{του επιπέδου } \Pi}^{\text{ακτίνας } r}$ και της σφαίρας κέντρου $\vec{A}$ και ακτίνας $\frac{1}{k}$.

Η καμπυλότητα της γ είναι k οπότε $k = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{k}$

οπότε το επίπεδο περιέχει το $\vec{A}$ οπότε η τροχιά είναι μέρος ενός ισημερινού της σφαίρας.

Διαφορική Γεωμετρία - Διάλεξη 10

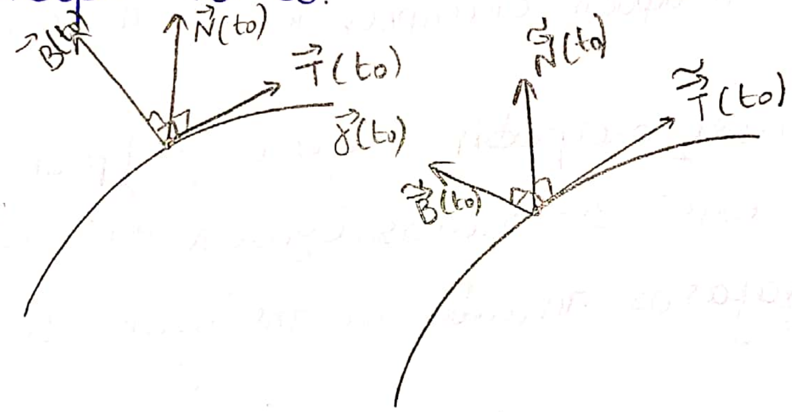
24/03/22

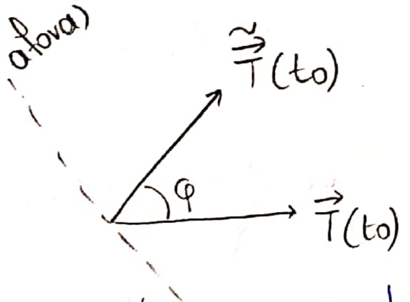
<u>Θεώρημα</u>. Έστω καμπύλες $\vec{\gamma}, \tilde{\vec{\gamma}}$ με μοναδιαία ταχύτητα με τις ίδιες συναρτήσεις καμπυλότητας $k>0$ και στρέψης τ. Τότε υπάρχει ισομετρία M του $\mathbb{R}^3$ ώστε $\tilde{\vec{\gamma}}(t)=M(\vec{\gamma}(t))$ για κάθε t.

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε τις τριάδες $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$, $\{\tilde{\vec{T}}(t), \tilde{\vec{N}}(t), \tilde{\vec{B}}(t)\}$ τα τρίακμα Frenet για τις $\vec{\gamma}(t), \tilde{\vec{\gamma}}(t)$ αντιστοίχως.

Σταθεροποιούμε το t_0.





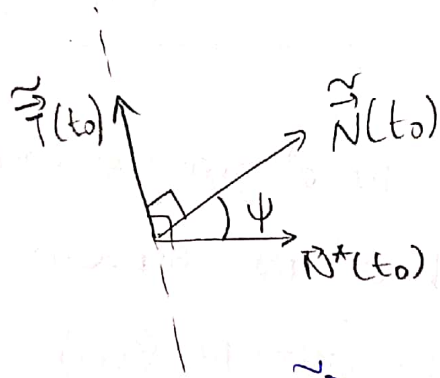
Θεωρούμε στροφή$_1$ η οποία απεικονίζει το $\vec{T}(t_0)$ στο $\tilde{\vec{T}}(t_0)$.

<u>στροφή$_1$</u>

$$\vec{T}(t_0) \to \tilde{\vec{T}}(t_0), \quad \vec{N}(t_0) \to \vec{N}^*(t_0), \quad \vec{B}(t_0) \to \vec{B}^*(t_0)$$

ένα άλλο διάνυσμα. δεν το ξέραμε

Το $\vec{T}(t_0)$ πέφτει πάνω στο $\tilde{\vec{T}}(t_0)$



αν έχω ορθοκανονικό διάνυσμα η στροφή το διατηρεί.

$$\text{στροφή}_2 \quad \begin{array}{ccc} \vec{T}(t_0) & \vec{N}^*(t_0) & \vec{B}^*(t_0) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vec{\tilde{T}}(t_0) & \vec{\tilde{N}}(t_0) & \vec{\tilde{B}}(t_0) \end{array}$$

$\vec{B}^*(t_0) \rightarrow$ αναγκαστικά πρέπει να πηγαίνει στο $\vec{\tilde{B}}(t_0)$ για να είναι κάθετο στα άλλα δύο.

→ Θα μπορούσε να είναι και το $-\vec{\tilde{B}}(t_0)$;
όχι γιατί με τη στροφή διατηρούν και τον προσανατολισμό τους.

Η σύνθεση $\text{στροφή}_2 \circ \text{στροφή}_1$ είναι γραμμική ισομετρία. Της αντιστοιχεί ένας 3x3 πίνακας (Γραμ. Αλ. Ι) και έστω P ο 3x3 ορθογώνιος πίνακας που της αντιστοιχεί.

Θεωρούμε την ισομετρία M με τύπο:

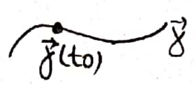
$$M(x,y,z) = \underset{3\times3}{P} \cdot \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} x - x(t_0) \\ y - y(t_0) \\ z - z(t_0) \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} \tilde{x}(t_0) \\ \tilde{y}(t_0) \\ \tilde{z}(t_0) \end{pmatrix}$$

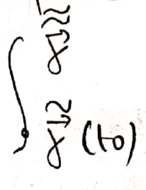
↓ διάνυσμα στήλη

$$\vec{\gamma}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} \qquad \vec{\tilde{\gamma}}(t_0) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t_0) \\ \tilde{y}(t_0) \\ \tilde{z}(t_0) \end{pmatrix}$$

(παίρνω ένα διάνυσμα με κορυφή $\gamma(t_0)$ το μεταφέρω, σε κορυφή 0 αφού το στρέψω πρώτα και μετά το προσθέτω στο $\vec{\tilde{\gamma}}(t_0)$)

Παίρνω την γ καμπύλη τη μεταφέρω σε μία καινούρια

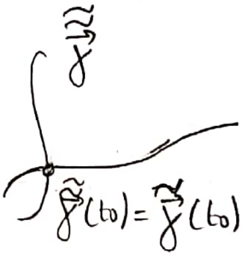




$\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}} \doteq M(\vec{\gamma})$

$\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}(t_0) = M(\vec{\gamma}(t_0)) = M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = \vec{\gamma}(t_0)$

η καινούρια καμπύλη $\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}$ έχει κοινό σημείο με την $\vec{\gamma}$



$$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}}(t) \\ \tilde{\tilde{y}}(t) \\ \tilde{\tilde{z}}(t) \end{pmatrix} = \underset{\text{σταθερός}}{\underset{\downarrow}{P}} \cdot \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \\ z(t) - z(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}}(t_0) \\ \tilde{\tilde{y}}(t_0) \\ \tilde{\tilde{z}}(t_0) \end{pmatrix}$$

παραγωγίζω:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}}'(t) \\ \tilde{\tilde{y}}'(t) \\ \tilde{\tilde{z}}'(t) \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$ Δηλαδή: $\boxed{\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}'(t) = P \cdot \vec{\gamma}'(t)}$

$\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}''(t) = P \cdot \vec{\gamma}''(t)$ παραγωγίζω όσες φορές θέλω.

Συμπέρασμα: $\|\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}'(t)\| = \|\vec{\gamma}'(t)\| \overset{\text{απο υπόθεση}}{=} 1$ η καμπύλη μου είναι μοναδιαίας ταχύτητας.

Άρα η $\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}$ είναι και αυτή μοναδιαίας ταχύτητας.

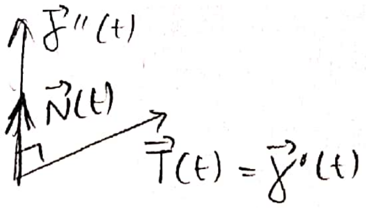
$$\tilde{\tilde{\vec{T}}}(t) = \tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}'(t) = P \cdot \vec{\gamma}'(t) = P \cdot \vec{T}(t)$$

Από την $\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}''(t) = P \cdot \vec{\gamma}''(t)$ έχω ότι: $\|\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}''(t)\| = \|\vec{\gamma}''(t)\|$

διαιρώ

$$\frac{\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}''(t)}{\|\tilde{\tilde{\vec{\gamma}}}''(t)\|} = P \cdot \frac{\vec{\gamma}''(t)}{\|\vec{\gamma}''(t)\|}$$

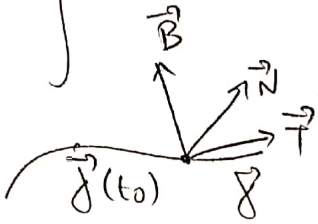
Έχουμε: $\tilde{\tilde{\vec{N}}}(t) = P\cdot \vec{N}(t)$

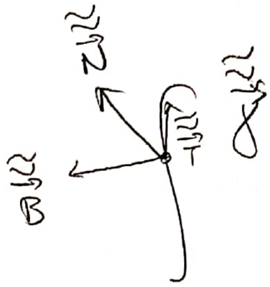


όπου $\vec{N}(t)$ είναι $\dfrac{\vec{\gamma}''(t)}{\|\vec{\gamma}''(t)\|}$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\tilde{\vec{T}}}(t) &= P\cdot \vec{T}(t) \\ \tilde{\tilde{\vec{N}}}(t) &= P\cdot \vec{N}(t) \\ \tilde{\tilde{\vec{B}}}(t) &= P\cdot \vec{B}(t) \end{aligned}\right\} (*) \quad \text{για κάθε } t.$$

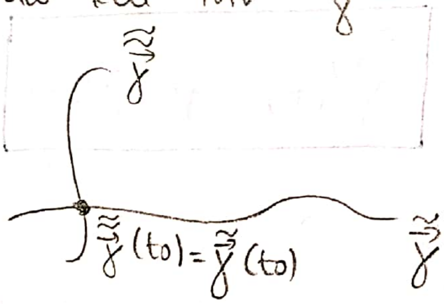
Έχω:





η $\tilde{\tilde{\gamma}}$ προκύπτει από τη $\vec{\gamma}$ με ισομετρία, οπότε το τρίεδρο Frenet θα στραφεί. όπως λένε οι σχέσεις παραπάνω (*)

Δεν ξεχνάω και την $\tilde{\tilde{\gamma}}$



Έχουμε ότι:

$$\tilde{\vec{T}}(t_0) = P\cdot \vec{T}(t_0)$$
$$\tilde{\vec{N}}(t_0) = P\, \vec{N}(t_0)$$
$$\tilde{\vec{B}}(t_0) = P\, \vec{B}(t_0)$$

(έτσι φτιάχτηκε ο πίνακας P.)

Άρα
$$\tilde{\tilde{\vec{T}}}(t_0) = \tilde{\vec{T}}(t_0)$$
$$\tilde{\tilde{\vec{N}}}(t_0) = \tilde{\vec{N}}(t_0)$$
$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}(t_0) = \tilde{\vec{B}}(t_0)$$

Όταν $t=t_0$ οι $\vec{\gamma}, \vec{\tilde{\tilde{\gamma}}}$ βρίσκονται στο ίδιο σημείο και έχουν το ίδιο τρίεδρο Frenet.

Παραγωγίζω $(*)$: $\vec{\tilde{\tilde{T}}}'(t) = P \cdot \vec{T}'(t)$ (1)

$$\vec{T}'(t) = k(t)\,\vec{N}(t) \quad (2)$$

$$\vec{\tilde{\tilde{T}}}'(t) = \tilde{\tilde{k}}(t)\,\vec{\tilde{\tilde{N}}}(t) \quad (3)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)(3)} \tilde{\tilde{k}}(t)\,\underbrace{\vec{\tilde{\tilde{N}}}(t) = k(t)\,P \cdot \vec{N}(t)}_{=} \xrightarrow{\vec{\tilde{\tilde{N}}}(t) = P \cdot N(t)}$$

$$\tilde{\tilde{k}}(t) = k(t) = \tilde{k}(t) \text{ (από υπόθεση)}$$

Άρα η καμπυλότητα της γ και της $\tilde{\tilde{\gamma}}$ είναι ίδιες.

Παραγωγίζω $(*)$: $\vec{\tilde{\tilde{B}}}'(t) = P \cdot \vec{B}'(t)$ (4)

$$\vec{B}'(t) = -\tau(t)\,\vec{N}(t) \quad (5)$$

$$\vec{\tilde{\tilde{B}}}'(t) = -\tilde{\tilde{\tau}}(t)\,\vec{\tilde{\tilde{N}}}(t) \quad (6)$$

$$(4) \xrightarrow{(5)(6)} -\tilde{\tilde{\tau}}(t)\,\underbrace{\vec{\tilde{\tilde{N}}}(t) = -\tau(t)\,P \cdot \vec{N}(t)}_{=}$$

$$\tilde{\tilde{\tau}}(t) = \tau(t) = \tilde{\tau}(t) \text{ (από υπόθεση)}$$

Άρα $\boxed{\tilde{\tilde{k}}(t) = \tilde{k}(t) \quad , \tilde{\tilde{\tau}}(t) = \tilde{\tau}(t)}$

Από εξισώσεις Frenet - Serret. για την $\vec{\gamma}$

$$\vec{T}'(t) = \tilde{k}(t)\vec{N}(t)$$

$$\vec{N}'(t) = -\tilde{k}(t)\vec{T}(t) + \tau(t)\vec{B}(t)$$

$$\vec{B}'(t) = -\tilde{\tau}(t)\vec{N}(t)$$

Εξισώσεις Frenet-Serret για την $\tilde{\vec{\gamma}}$

$$\tilde{\vec{T}}'(t) = \tilde{k}(t)\tilde{\vec{N}}(t)$$

$$\tilde{\vec{N}}'(t) = -\tilde{k}(t)\tilde{\vec{T}}(t) + \tilde{\tau}(t)\tilde{\vec{B}}(t)$$

$$\tilde{\vec{B}}'(t) = -\tilde{\tau}(t)\tilde{\vec{N}}(t)$$

Αντικαθιστώ με $\tau(t)$ τα $\tilde{\tau}(t)$ και $k(t)$ τα $\tilde{k}(t)$ και $\tilde{k}(t)$

Ορίζουμε:

$$A(t) = \vec{T}(t)\cdot\tilde{\vec{T}}(t) + \vec{N}(t)\cdot\tilde{\vec{N}}(t) + \vec{B}(t)\cdot\tilde{\vec{B}}(t)$$

$$A' = \vec{T}'\cdot\tilde{\vec{T}} + \vec{T}\cdot\tilde{\vec{T}}' + \vec{N}'\tilde{\vec{N}} + \vec{N}\cdot\tilde{\vec{N}}' + \vec{B}'\cdot\tilde{\vec{B}} + \vec{B}\cdot\tilde{\vec{B}}'$$

$$= \cancel{k\vec{N}\cdot\tilde{\vec{T}}} + \cancel{k\vec{T}\tilde{\vec{N}}} - \cancel{k\vec{T}\cdot\tilde{\vec{N}}} + \cancel{\tau\cdot\vec{B}\cdot\tilde{\vec{N}}} - \cancel{k\vec{N}\tilde{\vec{T}}} + \cancel{\tau\vec{N}\tilde{\vec{B}}}$$

$$- \cancel{\tau\vec{N}\cdot\tilde{\vec{B}}} - \cancel{\tau\vec{B}\tilde{\vec{N}}} = 0$$

Άρα $A(t)$ σταθερό $= A(t_0) = \vec{T}(t_0)\cdot\tilde{\vec{T}}(t_0) + \vec{N}(t_0)\cdot\tilde{\vec{N}}(t_0) + \vec{B}(t_0)\cdot\tilde{\vec{B}}(t_0)$

$$= |\vec{T}(t_0)|^2 + |\vec{N}(t_0)|^2 + |\vec{B}(t_0)|^2 =$$

$$= 1+1+1 = 3.$$ για κάθε t.

Το τρίεδρο Frenet είναι ίδιο στο t_0 για την $\vec{\gamma}$ και την $\tilde{\gamma}$.

29/03/22

Διαφορική Γεωμετρία - Διάλεξη 11

Συνέχεια απόδειξης

$A(t) = \tilde{T}(t)\tilde{\tilde{T}}(t) + \tilde{N}(t)\tilde{\tilde{N}}(t) + \tilde{B}(t)\cdot\tilde{\tilde{B}}(t)$

$A(t_0) = 3$

$A'(t) = 0$ για κάθε $t \in I$

$A(t) =$ σταθερή 3

$\tilde{T}(t)\cdot\tilde{\tilde{T}}(t) = \|\tilde{T}(t)\| \, \|\tilde{\tilde{T}}(t)\| \cos\theta \leq \|\tilde{T}(t)\| \, \|\tilde{\tilde{T}}(t)\| = 1$ ①

Ομοίως : $\tilde{N}(t)\cdot\tilde{\tilde{N}}(t) \leq 1$ ②

$\tilde{B}(t)\cdot\tilde{\tilde{B}}(t) \leq 1$ ③

Αν προσθέσω τις ①,②,③ έχουμε $A(t) \leq 3$

Επειδή $A(t) = 3$ συνεπάγεται ότι:

$\tilde{T}(t)\tilde{\tilde{T}}(t) = 1 \Longrightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \tilde{T}(t) = \tilde{\tilde{T}}(t)$ δηλαδή

$\tilde{N}(t)\tilde{\tilde{N}}(t) = 1$

$\tilde{B}(t)\cdot\tilde{\tilde{B}}(t) = 1$

$\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\tilde{\gamma}}'(t)$

$\frac{d}{dt}\left(\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)\right) = 0$

$\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t) =$ σταθερό $= \tilde{\gamma}(t_0) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t_0) = 0$

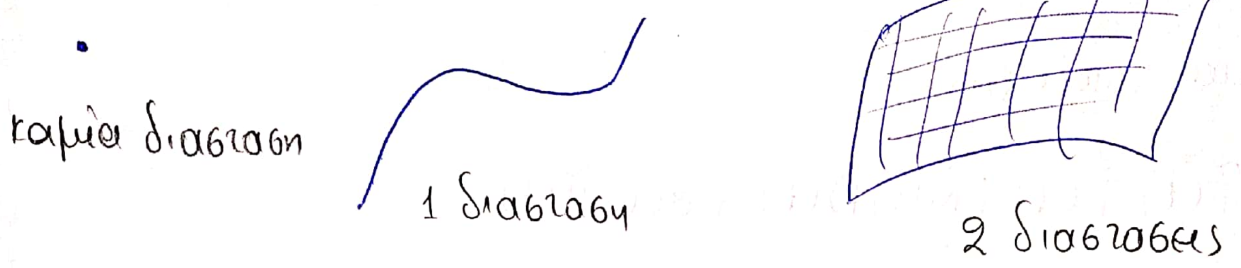
Άρα $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\tilde{\gamma}}(t)$ για κάθε $t \in I$

Άρα η $\tilde{\gamma}$ ταυτίζεται με την $\tilde{\tilde{\gamma}}$ η οποία προκύπτει από την γ με στερεά κίνηση.

Δηλαδή είναι στην ουσία η ίδια καμπύλη.

Scanned with CamScanner

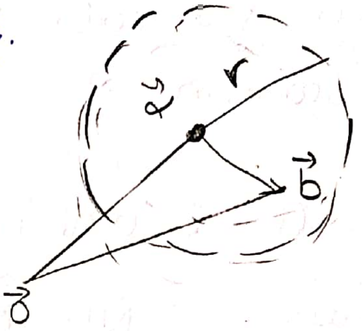
Επιφάνειες



Στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν οι ανοικτές μπάλες.

$$D_r(\vec{a}) = \{\vec{b}\in\mathbb{R}^n \mid \|\vec{b}-\vec{a}\|<r\}$$

$\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, $r>0$



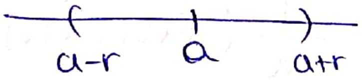
Κλειστές μπάλες : $\overline{D}_r(\vec{a}) = \{\vec{b}\in\mathbb{R}^n \mid \|\vec{b}-\vec{a}\|\leq r\}$

Ανοικτό σύνολο U στον $\mathbb{R}^n$

Για κάθε $\vec{a}\in U$ υπάρχει $r_{\vec{a}}$ ώστε $D_{r_{\vec{a}}}(\vec{a}) \subseteq U$

Ένα σύνολο είναι ανοιχτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο (= τα σημεία στα οποία έχαμε ισότητα)

Όταν $n=1$ δηλαδή είμαστε στον $\mathbb{R}$ τότε έχουμε ανοιχτό διάστημα



Στον $\mathbb{R}^2$: δίσκος.

Στον $\mathbb{R}^3$: μπάλα

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad \mathbb{R}^m$

$f: X \to \mathbb{R}^m$

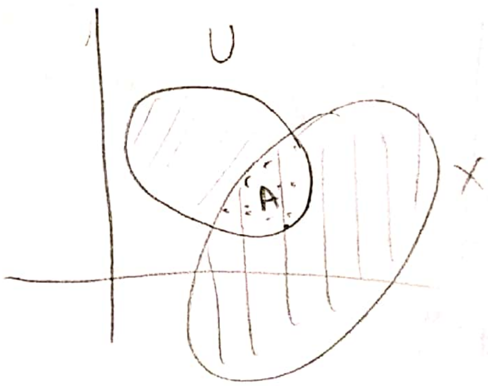
$\vec{a} \in X$. f συνεχής στο $\vec{a}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: $\vec{x} \in X, \|\vec{x} - \vec{a}\| \le \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| < \varepsilon$

f συνεχής (στο X) αν είναι συνεχής σε κάθε $\vec{a} \in X$

· $X \subseteq \mathbb{R}^n$

Παίρνω $A \subseteq X$ πότε το A είναι ανοικτό υποσύνολο X;

Το A λέμε ότι είναι ανοικτό υποσύνολο του X (ανοικτό στο X) αν υπάρχει U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ώστε $A = U \cap X$.



παράδειγμα

X: το κλειστό ημιεπίπεδο δηλ. μαζί με τα σημεία της ευθείας.

$A = U \cap X$

↑ ανοικτό στον $\mathbb{R}^2$

↑ ανοικτό στο X αλλά όχι στον $\mathbb{R}^2$ γιατί είναι τομή ανοικτού με το X όμως δεν είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}^2$ γιατί περιέχει συνοριακά σημεία.

Για να πω ότι το A είναι υποσύνολο του X πρέπει:

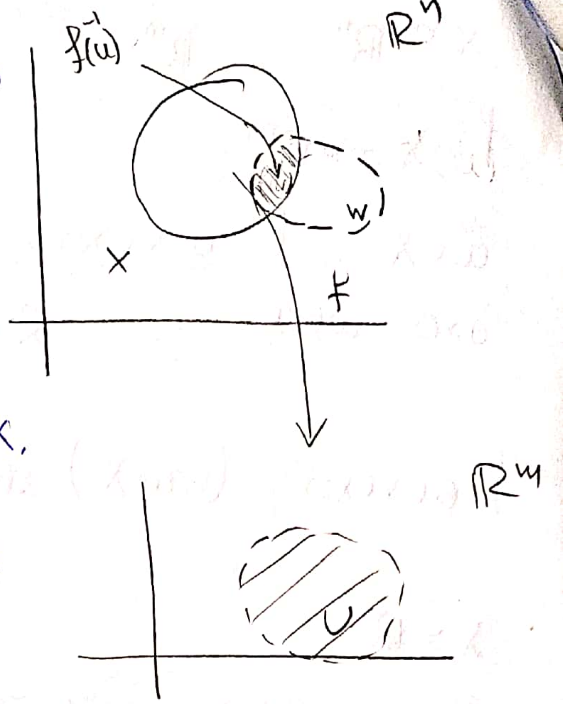
$A = A \cap X$

↑ ανοικτό στο $\mathbb{R}^2$

↑ ανοικτό στο X

Scanned with CamScanner

Πρόταση : Έστω $f: X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$
Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(i) Η f είναι συνεχής (στο X)
(ii) Για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^m$ το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο X.

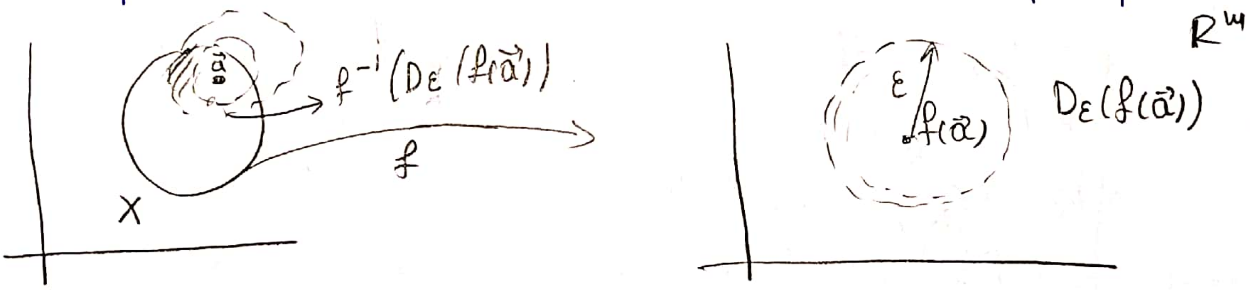


Δηλαδή υπάρχει ανοιχτό $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ώστε $f^{-1}(U) = W \cap X$

Απόδειξη

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Υποθέτουμε το (ii) και έστω τυχαίο $\vec{a} \in X$. Παίρνουμε $\varepsilon > 0$



Το $D_\varepsilon(f(\vec{a}))$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^m$.
Άρα από το (ii) το $f^{-1}(D_\varepsilon(f(\vec{a})))$ είναι ανοικτό στο X
δηλαδή υπάρχει ανοιχτό $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ώστε $\underbrace{f^{-1}(D_\varepsilon(f(\vec{a})))}_{\ni \vec{a}} = W \cap X$

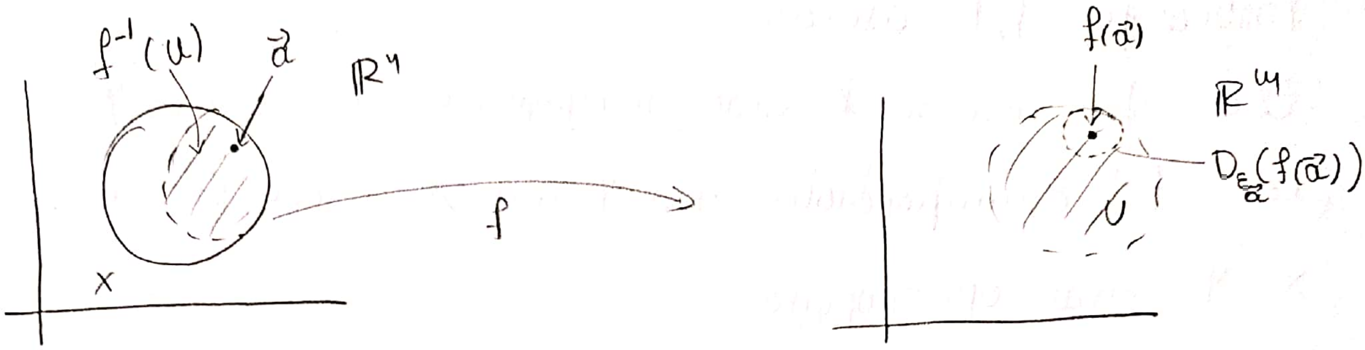
Τότε $\vec{a} \in W$. Επειδή W ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^n$ υπάρχει $\delta > 0$
$D_\delta(\vec{a}) \subseteq W$

Πάω να δω ότι ισχύει ... ορισμός της συνέχειας
$\vec{x} \in X,\ \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \vec{x} \in X,\ \vec{x} \in D_\delta(\vec{a}) \Rightarrow \vec{x} \in X,\ \vec{x} \in W$
$\Rightarrow x \in W \cap X = f^{-1}(D_\varepsilon(f(\vec{a}))) \Rightarrow f(\vec{x}) \in D_\varepsilon(f(\vec{a})) \Rightarrow$
$\|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| < \varepsilon$. Άρα f συνεχής στο $\vec{a}$ και άρα συνεχής στο X

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Υποθέτουμε f συνεχής σε κάθε $\vec{a} \in X$

Έστω U ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^m$



Έστω $\vec{a} \in f^{-1}(U)$ οπότε $f(\vec{a}) \in U$

Επειδή U ανοικτό, τότε υπάρχει $\varepsilon_{\vec{a}} > 0$ ώστε $D_{\varepsilon_{\vec{a}}}(f(\vec{a})) \subseteq U$

Όμως f συνεχής σε κάθε a

Υπάρχει $\delta_{\vec{a}} > 0$ ώστε: $\vec{x} \in X$, $\|\vec{x} - \vec{a}\| \leq \delta_{\vec{a}} \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| < \varepsilon_{\vec{a}}$

$\vec{x} \in X$, $\vec{x} \in D_{\delta_{\vec{a}}}(\vec{a}) \Rightarrow f(\vec{x}) \in D_{\varepsilon_{\vec{a}}}(f(\vec{a})) \Rightarrow f(\vec{x}) \in U$

$\Leftrightarrow \vec{x} \in f^{-1}(u)$

$W := \bigcup_{\vec{a} \in f^{-1}(U)} D_{\delta_{\vec{a}}}(\vec{a})$: ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^n$

(ένωση ανοικτών μπαλών)

Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(U) = W \cap X$

Πρώτη κατεύθυνση (α): $\vec{a} \in f^{-1}(U) \Rightarrow \vec{a} \in X$, $\vec{a} \in D_{\delta_{\vec{a}}}(\vec{a}) \Rightarrow \vec{a} \in X, \vec{a} \in W$

$\Rightarrow \vec{a} \in W \cap X.$

δεύτερη κατεύθυνση (β): $\vec{x} \in W \cap X \Rightarrow \vec{x} \in X, \vec{x} \in W \Rightarrow \vec{x} \in X$, $\vec{x} \in D_{\delta_{\vec{a}}}(\vec{a})$

για κάποιο $\vec{a} \in f^{-1}(U)$

$\Rightarrow \vec{x} \in f^{-1}(U)$

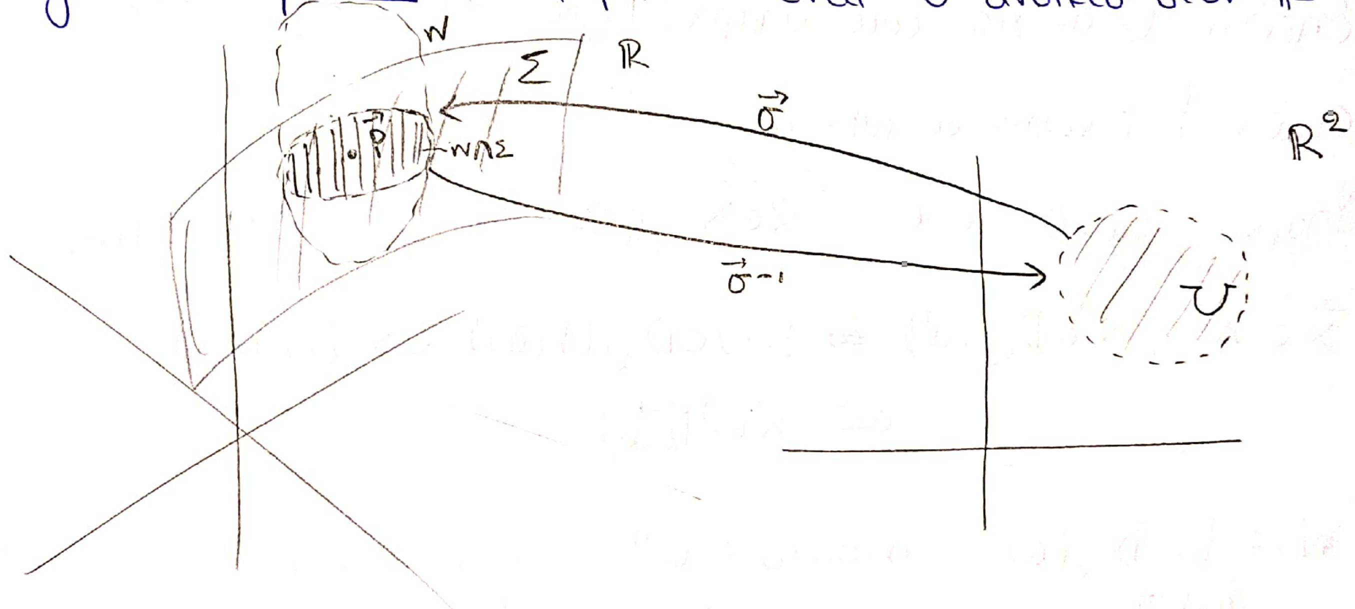
$X \subseteq \mathbb{R}^n \quad , \; Y \subseteq \mathbb{R}^m$

$f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y \qquad f^{-1} : Y \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X$

Υποθέτουμε f, f^{-1} συνεχείς

Τότε λέμε ότι η f είναι <u>ομοιομορφισμός</u> του X στο Y (και f^{-1} ομοιομορφισμός του Y στο X.) και ότι τα X, Y είναι <u>ομοιομορφικά</u>

Έστω $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$. Λέμε ότι το Σ είναι επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ αν γιά κάθε $\vec{p} \in \Sigma$ υπάρχουν ένα U ανοικτό στον $\mathbb{R}^2$



και ένα W ανοικτό στον $\mathbb{R}^3$ με $\vec{p} \in W$ έτσι ώστε τα U, $W \cap \Sigma$ να είναι <u>ομοιομορφικά</u>. Δηλαδή θα
↳ ανοικτό στο Σ

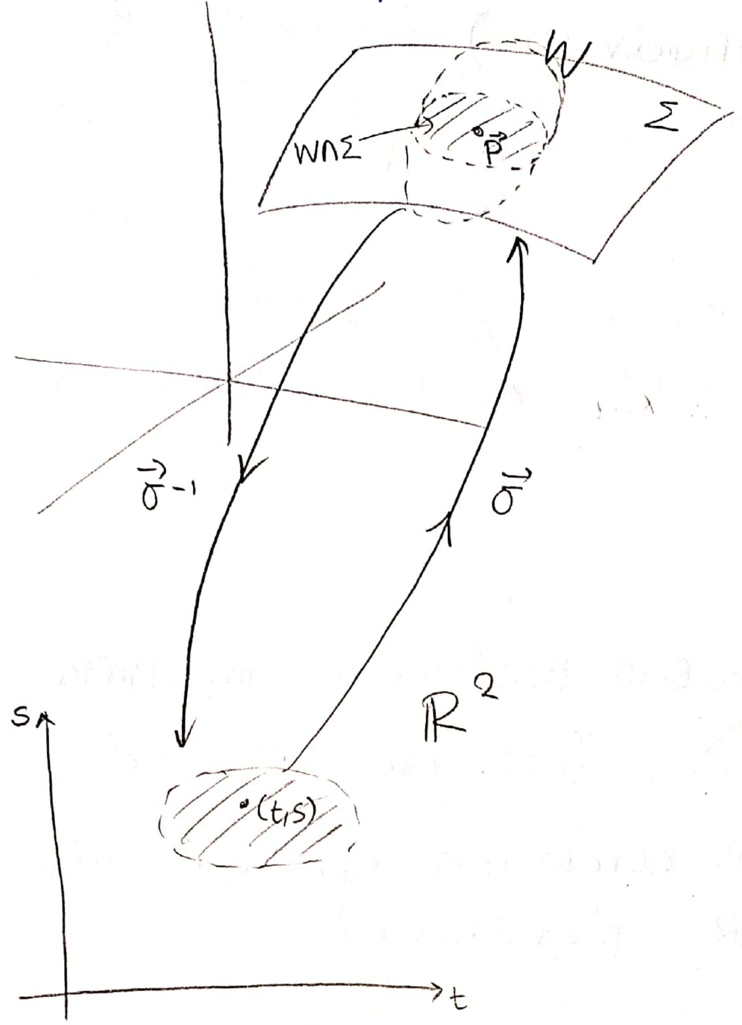
πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $\vec{\sigma} : U \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} W \cap \Sigma$ και η $\vec{\sigma}^{-1} : W \cap \Sigma \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} U$ που είναι και οι δύο συνεχείς.

Scanned with CamScanner

Δηλαδή το Σ είναι επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ αν κάθε σημείο του ανήκει σε κάποιο ανοικτό σύνολο στο Σ το οποίο είναι ομοιομορφικό με κάποιο ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^2$.

Διαφορική Γεωμετρία: Διάλεξη 12

31/03/22



$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ επιφάνεια αν κάθε σημείο του Σ ανήκει σε ένα ανοικτό υποσύνολο του Σ, το οποίο είναι ομοιομορφικό με κάποιο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

$\vec{\sigma} : U \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} W \cap \Sigma$ συνεχής

$\vec{\sigma}^{-1} : W \cap \Sigma \xrightarrow{1-1} U$ συνεχής.

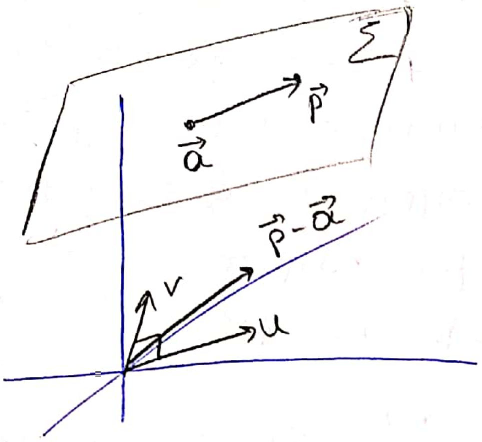
Κάθε τέτοιο ανοικτό υποσύνολο $W \cap \Sigma$ του Σ ονομάζεται <u>τμήμα επιφάνειας</u> και αντίστοιχη συνάρτηση $\vec{\sigma}$ ονομάζεται <u>παραμέτρηση</u> του τμήματος επιφάνειας.

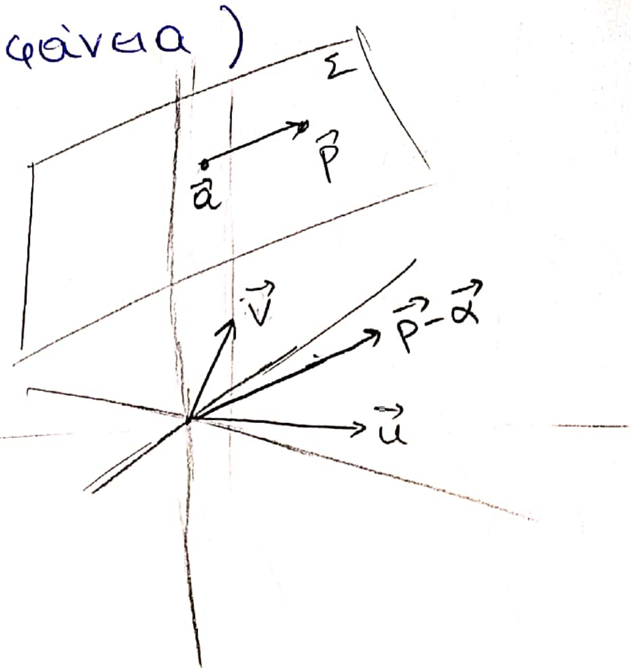
$\vec{\sigma}(t,s)$, $(t,s) \in U$

Όταν μεταβάλλεται το $(t,s) \in U$ μεταβάλλεται και το τμήμα $\vec{\sigma}(t,s)$ στο $W \cap \Sigma$

Το σύνολο των τμημάτων επιφάνειας που καλύπτουν την επιφάνεια Σ ονομάζεται <u>άτλας</u> της Σ.

Παράδειγμα (Επίπεδη Επιφάνεια)

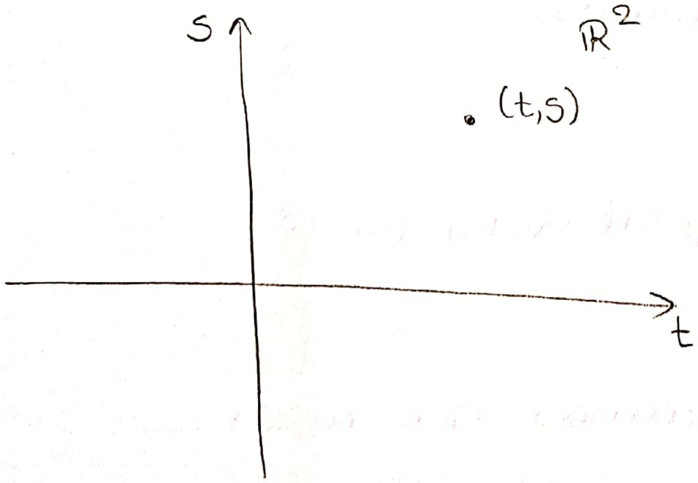




Θεωρούμε $\vec u,\vec v$ στον $\mathbb{R}^3$ κάθετα μοναδιαία και παράλληλα στο $Σ$. και σημείο $\vec a\in Σ$. Τότε για κάθε $\vec p\in Σ$ το $\vec p-\vec a$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec u,\vec v$ δηλ.
$\vec p-\vec a = t\vec u + s\vec v$ με $t,s\in\mathbb{R}$, $\vec p = t\vec u+s\vec v+\vec a$

$$(\vec p-\vec a)\cdot\vec u = t\,\vec u\cdot\vec u + s\underbrace{\vec v\cdot\vec u}_{\substack{0\\ \vec v\perp\vec u}} = t$$

$$(\vec p-\vec a)\vec v = t\cdot\vec u\cdot\vec v + s\,\vec v\cdot\vec v = s$$



$$\begin{array}{ccc} \vec\sigma:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\cap Σ = Σ \\ \| & & \| \\ U & & W \end{array}$$

$$\vec\sigma(t,s) = t\vec u+s\vec v+\vec a$$

$$\vec\sigma^{-1}: \mathbb{R}^3\cap Σ \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec\sigma^{-1}(\vec p) = ((\vec p-\vec a)\cdot\vec u, (\vec p-\vec a)\cdot\vec v)$$

↳ συνεχής.

$\vec{\sigma}, \vec{\sigma}^{-1}$ συνεχείς

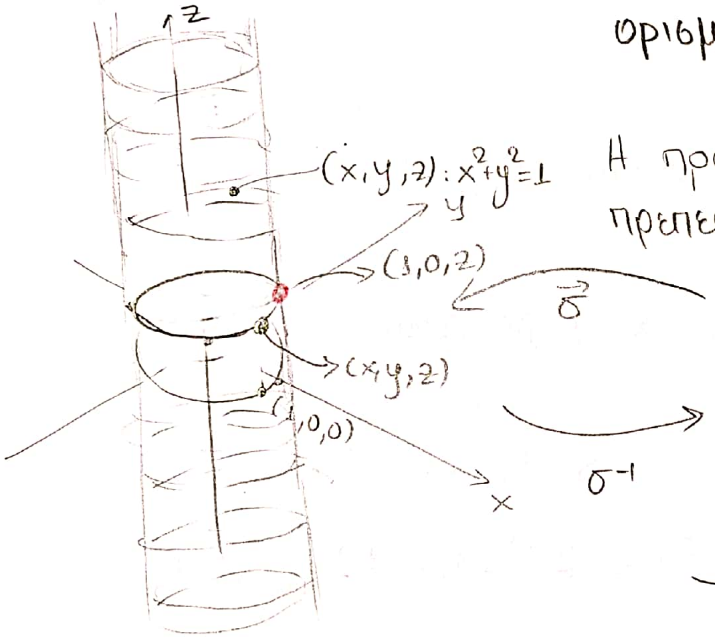
Το σύνολο Σ είναι ένα τμήμα επιφανείας που καλύπτει ολόκληρο το Σ.

Άρα το Σ είναι επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και ο άτλαντας που έχουμε ορίσει αποτελείται από ένα μόνο τμήμα επιφάνειας.

Παράδειγμα

Κυλινδρική Επιφάνεια.

Είναι επιφάνεια με βάση τους ορισμούς που έχουμε δώσει; και γιατί;



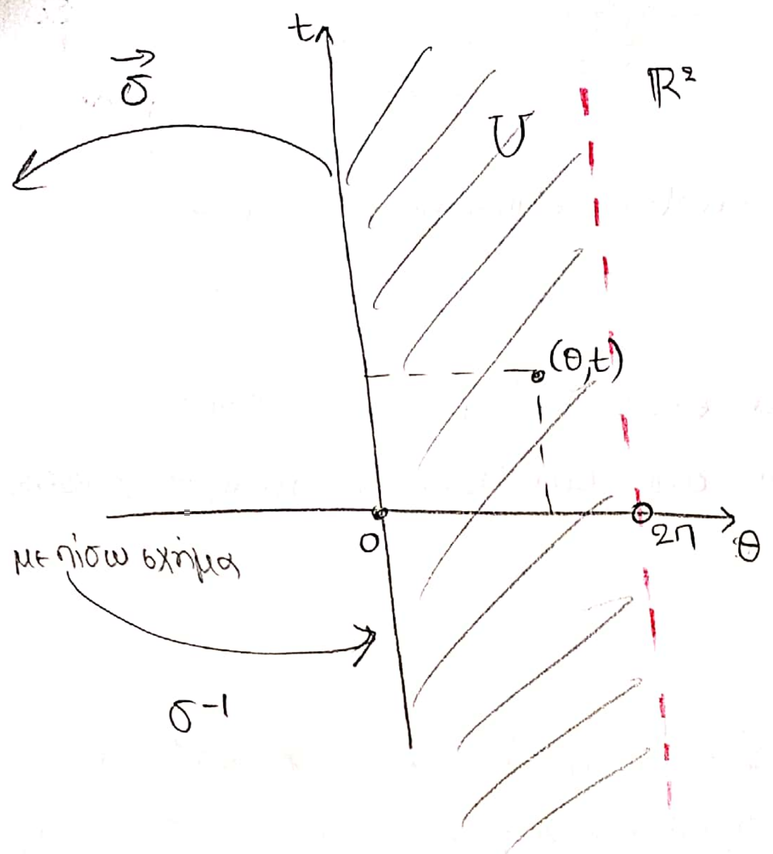
Η προβολή του κάθε σημείου στο x-y επίπεδο πρέπει να πέσει στο μοναδιαίο κύκλο.

Ο μόνος περιορισμός μας είναι:

$\Sigma = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1\}$

Μπορώ το $x=\cos\theta$ και $y=\sin\theta$ όμως για να είναι συνάρτηση πρέπει το θ να είναι μοναδικό οπότε διαλέγω $\theta \in [0,2\pi)$ ή $\theta \in (-\pi,\pi]$

ανοιχτό γιατί αλλιώς χάνω τη μοναδικότητα.



$\vec{\sigma}: U \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \Sigma = \mathbb{R}^3 \cap \Sigma$

$\vec{\sigma}(\theta,t) = (\underset{x}{\cos\theta}, \underset{y}{\sin\theta}, \underset{z}{t})$

$\vec{\sigma}^{-1}: \Sigma = \mathbb{R}^3 \cap \Sigma \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} U$

$\vec{\sigma}^{-1}(x,y,z) = (\theta,t)$ οπου $t=z$ και θ εκείνη η γωνία στο $[0,2\pi)$ για την οποία ισχύει ότι $x=\cos\theta$ και $y=\sin\theta$.

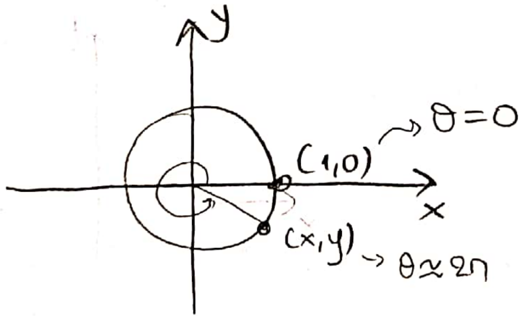
Προβλημα U δεν είναι ανοιχτό.

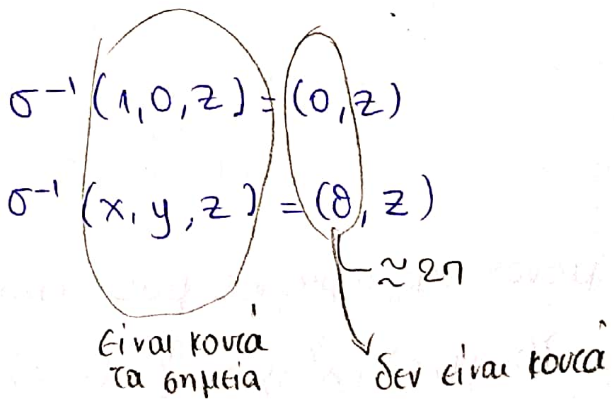
$\vec{\sigma}$ συνεχής ✓

$\vec{\sigma}^{-1}$ πρεπει να είναι συνεχής όμως δεν είναι.

Το σημειο $(1,0,z)$ έχει $\theta=0$

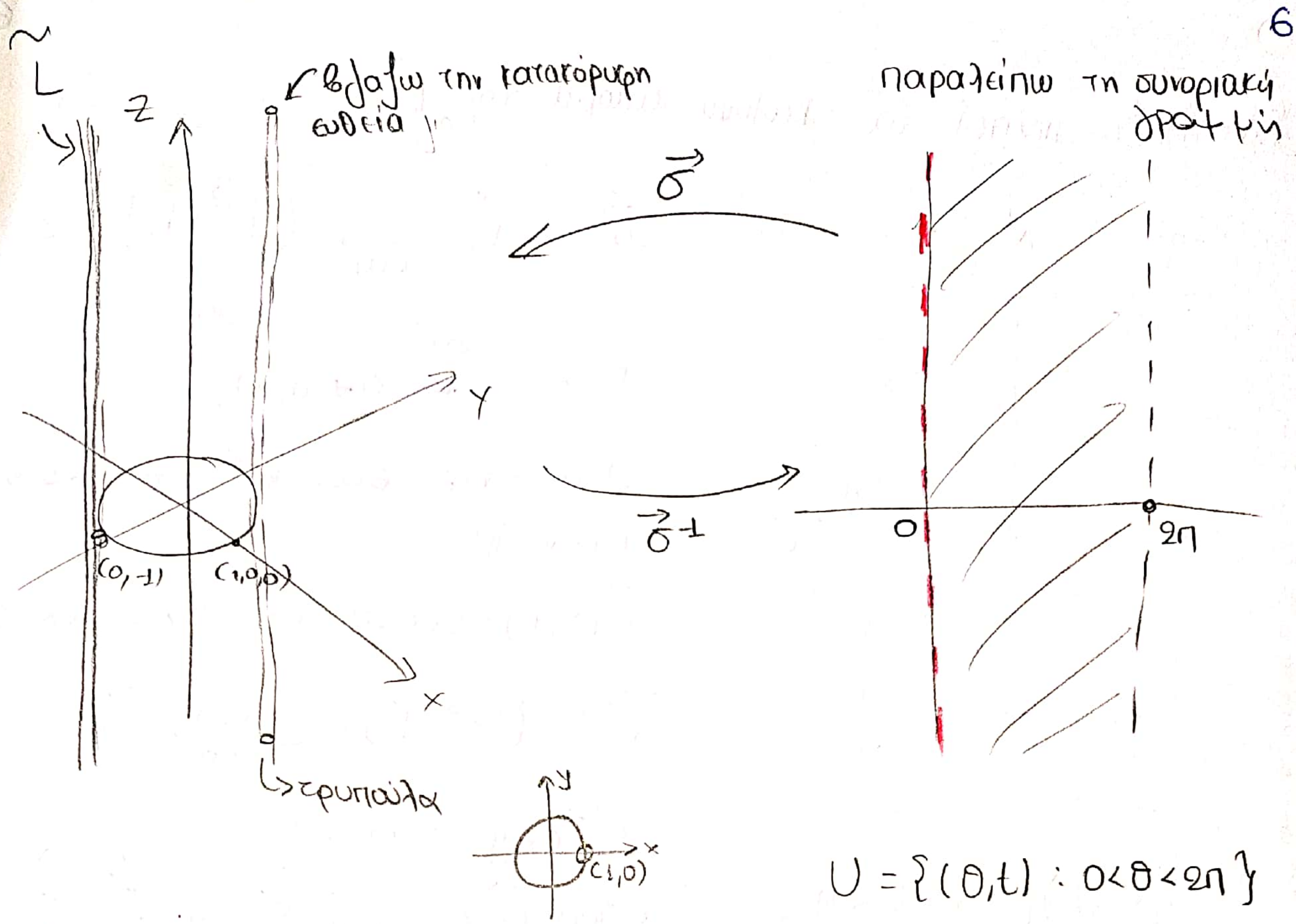
(x,y,z)





Το $(1,0,z) \simeq (x,y,z)$ είναι δηλαδή κοντά

όμω $\vec{\sigma}^{-1}(1,0,z) \not\simeq \vec{\sigma}^{-1}(x,y,z)$ δηλαδή σ^{-1} όχι συνεχής.



$U = \{(\theta,t) : 0<\theta<2\pi\}$

Τώρα η $\vec{\sigma}$ δεν είναι επί όλου του κυλίνδρου αφήνει $\theta=0$.

$$\vec{\sigma} : \underset{\text{ανοικτό στον } \mathbb{R}^2}{U} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \underbrace{(\mathbb{R}^3 \setminus L)\cap \Sigma}_{W \text{ ανοικτό στον } \mathbb{R}^3} \quad \text{όπου } L=\{(1,0,z)\}$$

$\vec{\sigma}(\theta,t) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$ συνεχής

$\vec{\sigma}^{-1} : (\mathbb{R}^3 \setminus L)\cap\Sigma \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} U$

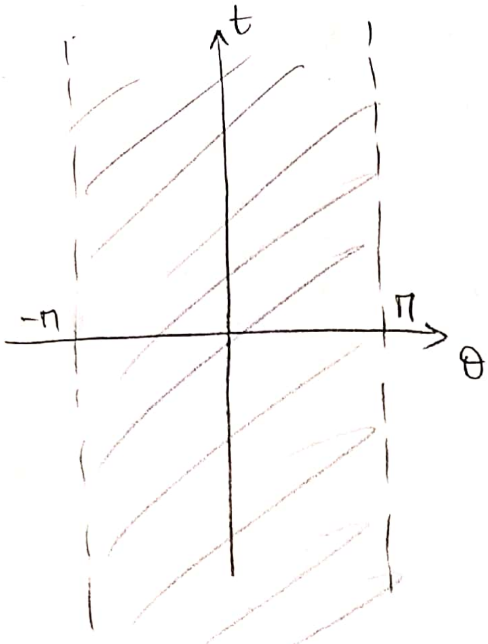
$\vec{\sigma}^{-1}(x,y,z) = (\theta, t)$ όπου $t=z$ και θ η γωνία στο $(0,2\pi)$ ώστε $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$

↳ συνεχής.

Οπότε έχω φτιάξει τμήμα επιφάνειας.

Όμως για να πω τον κύλινδρο επιφάνεια πρέπει να καλύψω όλα τα σημεία του.

Οπότε πρέπει να καλύψω ακόμα την L.



$\tilde{U} = \{(\theta, t) \mid -\pi < \theta < \pi\}$

$\vec{\tilde{\sigma}} : \tilde{U} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \underbrace{(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{L})}_{\tilde{W}} \cap \Sigma$

όπου $\tilde{L} = \{(-1, 0, z)\}$

$\tilde{U}$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^2$, $\tilde{W}$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^3$

$\vec{\tilde{\sigma}}(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$ συνεχής

$\vec{\tilde{\sigma}}^{-1} : (\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{L}) \cap \Sigma \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \tilde{U}$

$\vec{\tilde{\sigma}}^{-1}(x, y, z) = (\theta, t)$

όπου $t = z$ και θ η γωνία στο $(-\pi, \pi)$ ώστε $x = \cos\theta$
$y = \sin\theta$.

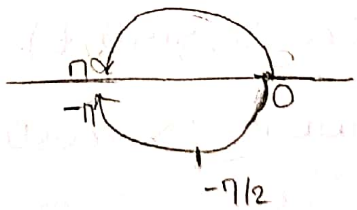
Έχουμε: $\vec{\sigma} : U \to \underbrace{(\mathbb{R}^3 \setminus L)}_{W} \cap \Sigma$ τμήμα επιφάνειας με παραμέτρηση την $\vec{\sigma}$

$\vec{\tilde{\sigma}} : \tilde{U} \to \underbrace{(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{L})}_{\tilde{W}} \cap \Sigma$ τμήμα επιφάνειας με παραμέτρηση την $\vec{\tilde{\sigma}}$

$\vec{\sigma}^{-1}(0, -1, z) = (\frac{3\pi}{2}, z)$

$\vec{\tilde{\sigma}}(0, -1, z) = (-\pi/2, z)$

$\downarrow$

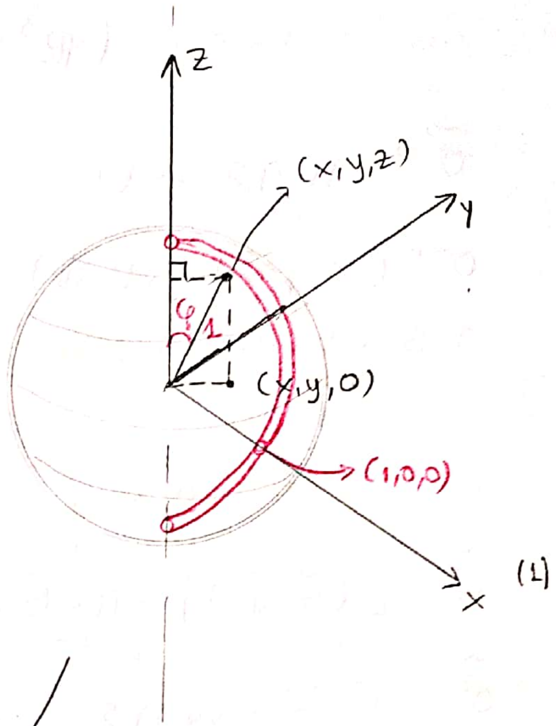


Ο κύλινδρος είναι επιφάνεια και έχαμε φτιάξει έναν άτλαντα που αποτελείται από δύο τμήματα επιφανείας.

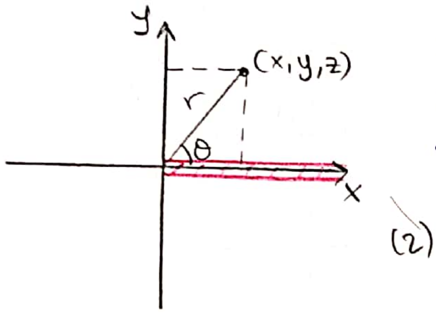
Διαφορική Γεωμετρία - Διάλεξη 13 5/4/22

Παράδειγμα. Η μοναδιαία σφαίρα

$$\Sigma = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$



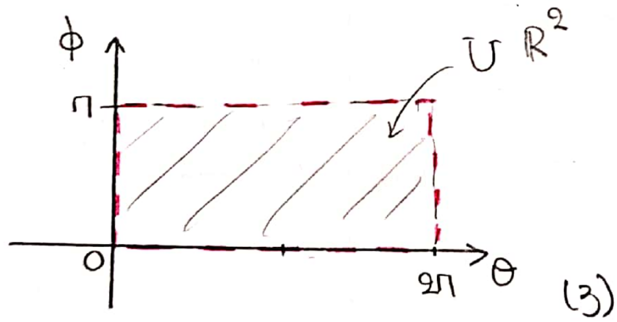
$z=\cos\phi \qquad 0\leq\phi\leq\pi$



$r=\sin\varphi$
$x=r\cos\theta=\cos\theta\sin\phi$
$y=r\cdot\sin\theta=\sin\theta\sin\phi$

$$\begin{cases} x=\cos\theta\sin\phi & 0\leq\theta\leq 2\pi \\ y=\sin\theta\sin\phi & 0\leq\phi\leq\pi \\ z=\cos\phi \end{cases} \quad (*)$$

$\vec{\sigma}$



$\vec{\sigma}: U \to \Sigma$

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi)=(\underbrace{\cos\theta\sin\phi}_{x}, \underbrace{\sin\theta\sin\phi}_{y}, \underbrace{\cos\phi}_{z})$$

Θέλω το U να είναι ανοιχτό άρα δεν θέλω τα συνοριακά σημεία.

$$U=\{(\theta,\varphi) \mid 0<\theta<2\pi,\ 0<\varphi<\pi\}$$

Πρέπει να λείψουν τα σημεία για $\theta=0$ δηλαδή στο (2) δημιουργείται σχισμή (στον θετικό άξονα x. (κόκκινο)
Δηλ στο (1) είναι το κόκκινο.

Οπότε $\vec{\sigma}: U \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \underbrace{(\mathbb{R}^3 \setminus \{(\sin\phi, 0, \cos\phi) \mid 0 \leq \phi \leq \pi\})}_{W} \cap \Sigma$

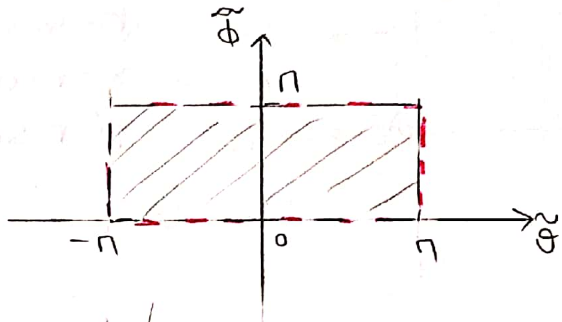
ή

$(\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \mid x^2+z^2=1,\ x \geq 0\})$

$\vec{\sigma}^{-1}: W \cap \Sigma \to U$

$\sigma^{-1}(x,y,z) = (\theta, \phi)$ όπου θ, ϕ είναι οι γωνίες που ικανοποιούν τις εξισώσεις (*) με $0<\theta<2\pi$, $0<\phi<\pi$

Για το ημικύκλειο που λείπει:

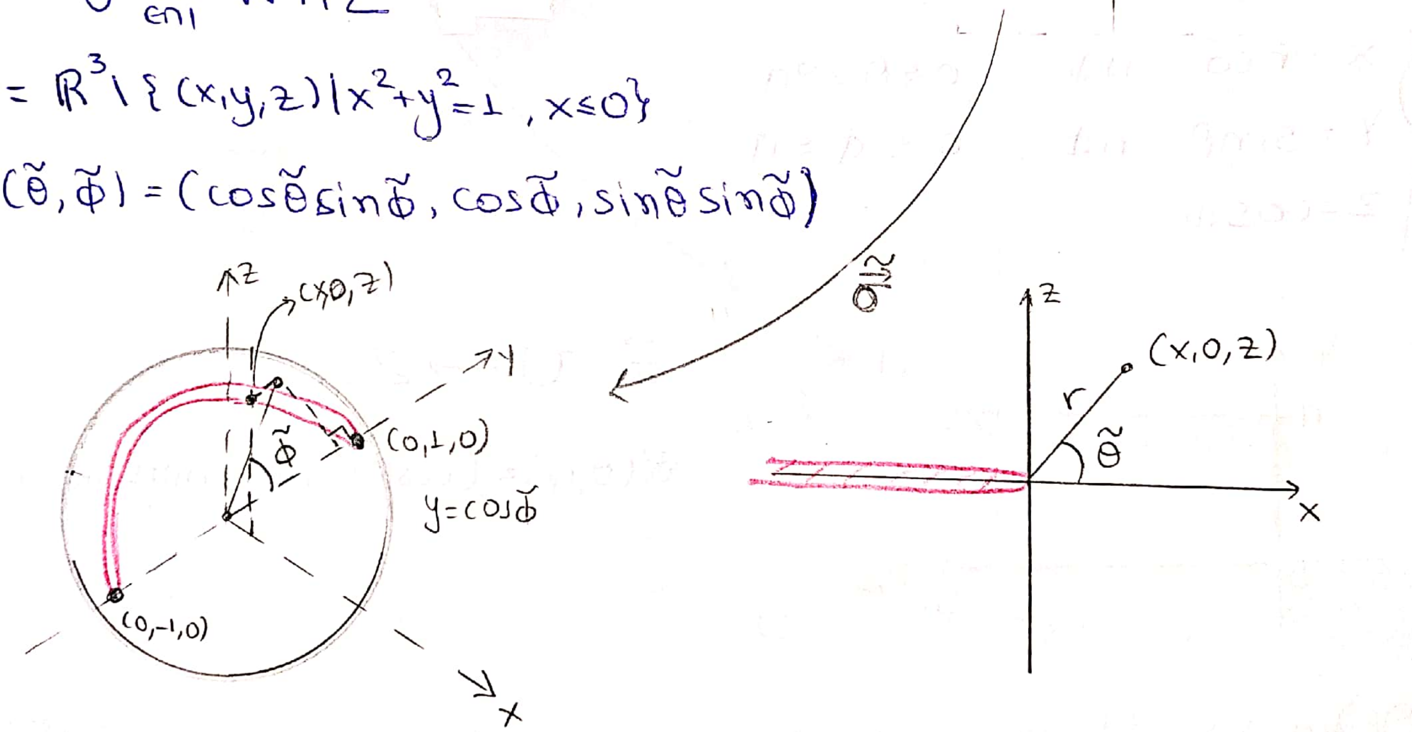


$\tilde{U} = \{(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \mid -\pi < \tilde{\theta} < \pi ,\ 0 < \tilde{\varphi} < \pi\}$

$\vec{\tilde{\sigma}} = \tilde{U} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \tilde{W} \cap \Sigma$

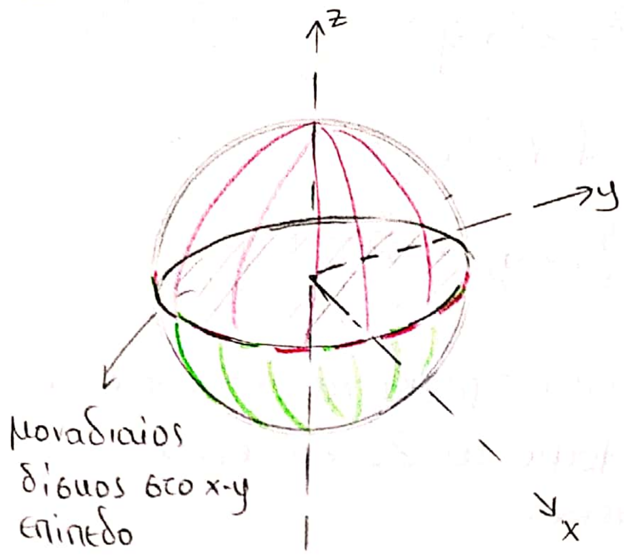
$\tilde{W} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1 ,\ x \leq 0\}$

$\vec{\tilde{\sigma}}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) = (\cos\tilde{\theta}\sin\tilde{\phi}, \cos\tilde{\phi}, \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\phi})$



Άρα η Σ καλύπτεται από δύο τμήματα επιφανείας άρα είναι επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$

Δεύτερος τρόπος



$x^2+y^2+z^2=1 \qquad z^2=1-x^2-y^2$

$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

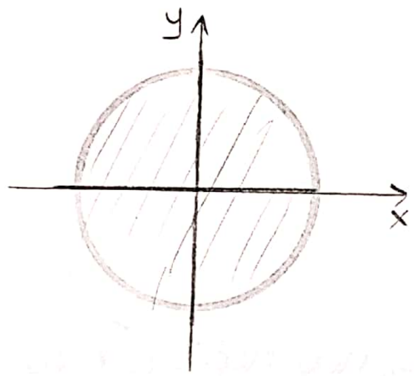
$x^2+y^2\leq 1$

$U=\{(x,y):\ x^2+y^2<1\}$ ↳ το παίρνω έτσι για να είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}^2$

$\vec{\sigma}: U \to W\cap\Sigma$

$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$

δηλ. $U \to \underbrace{\{(x,y,z)\,|\,z>0\}}_{W \text{ ανοικτό στον } \mathbb{R}^3}\cap\Sigma$



$\tilde{U}=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2<1\}$

$\tilde{\vec{\sigma}}: \tilde{U}\to\{(x,y,z)\,|\,z<0\}\cap\Sigma$

$\tilde{\vec{\sigma}}(x,y)=(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})$

με τη $\tilde{\vec{\sigma}}$ παίρνω το πράσινο με τη $\vec{\sigma}$ το κόκκινο κάτω και άνω ημισφαίριο αντίστοιχα. Όμως χάναμε τα σημεία τα σημεία του ισημερινού.

Θεωρούμε και τα άλλα τέσσερα βασικά ημισφαίρια με αντίστοιχες απεικονίσεις:

$(x,z)\longmapsto(x,\sqrt{1-x^2-z^2},z)$

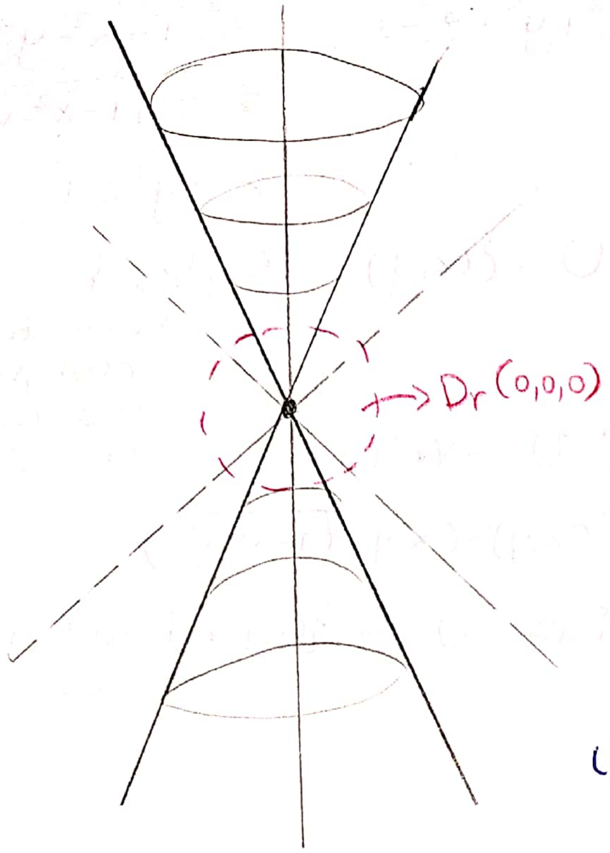
$(x,z)\longmapsto(x,-\sqrt{1-x^2-z^2},z)$

$(y,z)\longmapsto(\sqrt{1-y^2-z^2},y,z)$

$(y,z)\longmapsto(-\sqrt{1-y^2-z^2},y,z)$

και όλα μαζί τα έξι ημισφαίρια είναι τμήματα επιφάνειας που καλύπτουν την Σ.

Παράδειγμα κώνος



(4)

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Sigma = \{(x,y,z) \mid z^2 = x^2+y^2\}$$

Το $(0,0,0)$ πρέπει να αποκλειστεί αν θέλουμε το Σ να είναι επιφάνεια.

Έστω ότι το $(0,0,0)$ ανήκει στο Σ

Τότε πρέπει να υπάρχει τμήμα επιφάνειας που περιέχει το $(0,0,0)$. Έστω $\vec{\sigma} : \underset{\text{ανοικτό στον } \mathbb{R}^2}{U} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \underset{\text{ανοικτό στον } \mathbb{R}^3}{W} \cap \Sigma$

και $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}^{-1}$ συνεχείς.

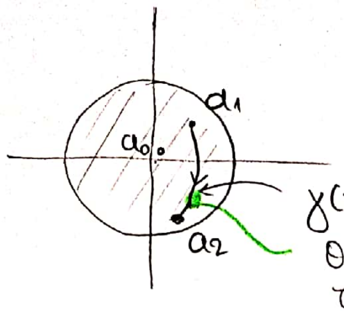
$(0,0,0) \in W \cap \Sigma$

Υπάρχει μπάλα με κέντρο $(0,0,0)$ που είναι $\subseteq W$ κόκκινη στο σχήμα (4).

Τότε υπάρχει σημείο της Σ (x_1, y_1, z_1) στην μπάλα με $z_1 > 0$ και (x_2, y_2, z_2) στην μπάλα με $z_2 < 0$

$(x_1, y_1, z_1) \in W \cap \Sigma$

$(x_2, y_2, z_2) \in W \cap \Sigma$



$\xrightarrow{\vec{\sigma}}$ $W \cap \Sigma$

Θα μου το στείλει στο $(0,0,0)$ όμως και a_0 η $\vec{\sigma}$ το στέλνει στην κορυφή. (∗)

$\vec{\sigma}(a_1) = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad\quad \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in U$

$\vec{\sigma}(a_2) = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{\sigma}(a_0) = (0,0,0) \in W \cap \Sigma$

$\gamma : [0,1] \to U$ συνεχής

$\gamma(0) = a_1 \quad \gamma(1) = a_2$

$\vec{\sigma} \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow W \cap \Sigma$ συνεχής.

$(\vec{\sigma} \circ \gamma)(0) = (x_1, y_1, z_1)$

$(\vec{\sigma} \circ \gamma)(1) = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{z}(\vec{\sigma}(\gamma(t)))$ συνεχής συνάρτηση του $t \in [0,1]$

$\vec{z}(\vec{\sigma}(\gamma(0))) = z_1 > 0$

$\vec{z}(\vec{\sigma}(\gamma(1))) = z_2 < 0$

Άρα υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε το $z(\underbrace{\vec{\sigma}(\gamma(t))}_{\in W \cap \Sigma}) = 0$

Άρα το $\vec{\sigma}(\gamma(t)) = (0,0,0)$

(∗) Άρα $\vec{\sigma}$ όχι 1-1.

Άτοπο.

Άρα θα θεωρήσαμε $\Sigma = \{(x,y,z) \mid z^2 = x^2 + y^2\} \setminus \{0,0,0\}$