Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Παραδώστε τις ασκήσεις 1, 4, 6 και 7 μέχρι το μάθημα της Παρασκευής 17/2.

1. Έστω χώρος X με δύο νόρμες: $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ ώστε να ισχύει $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν για κάθε (x_n) στον X η σύγκλιση $x_n \to 0$ ως προς τη μία νόρμα συνεπάγεται τη σύγκλιση $x_n \to 0$ ως προς την άλλη νόρμα.

2. Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$. Αποδείξτε ότι:
(1) $\mathrm{cl}(\{y \in X \mid \|y - x\| < r\}) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}$,
(2) $\mathrm{bd}(\{y \in X \mid \|y - x\| < r\}) = \{y \in X \mid \|y - x\| = r\}$.

3. Έστω γραμμικός χώρος X και μετρική d στον X η οποία είναι αναλλοίωτη από μεταφορές και θετικά ομογενής:
$$d(x + x_1, x + x_2) = d(x_1, x_2), \qquad d(\kappa x_1, \kappa x_2) = |\kappa| d(x_1, x_2)$$
για κάθε $x, x_1, x_2 \in X$, $\kappa \in F$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει νόρμα στον X από την οποία επάγεται η μετρική d.

4. Έστω χώρος X με νόρμα και $A, B \subseteq X$.
(1) Αν τα A, B είναι ανοικτά, αποδείξτε ότι το $A + B$ είναι ανοικτό.
(2) Αν τα A, B είναι συμπαγή, αποδείξτε ότι το $A + B$ είναι συμπαγές.
(3) Αν το A είναι κλειστό και το B συμπαγές, αποδείξτε ότι το $A + B$ είναι κλειστό.

5. Αποδείξτε ότι ένας χώρος X με νόρμα είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά στοιχείων του X συγκλίνει στον X.

6. Έστω χώρος X με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Αν οι $Y, X/Y$ είναι πλήρεις, αποδείξτε ότι ο X είναι πλήρης.

7. Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του F ο οποίος είναι απειροδιάστατος και έστω B μία βάση του X. Ορίζουμε νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ στον X με τύπους:
$$\|x\|_1 = |\kappa_1| + \cdots + |\kappa_n|, \qquad \|x\|_2 = \max\{|\kappa_1|, \ldots, |\kappa_n|\}$$
για κάθε $x \in X$, όπου $x = \kappa_1 b_1 + \cdots + \kappa_n b_n$ με $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ και $b_1, \ldots, b_n \in B$. Αποδείξτε ότι οι $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ είναι νόρμες στον X και ότι δεν είναι ισοδύναμες.